F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

1

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; GH. MIHOC, membru corespondent al Academiei R.P.R.; N. TEODORESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.; A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Anul XIV, nr. 1 1963

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Proprietăţi globale ale spaţiilor lui Riemann cu conexiune afină constantă 7

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. II. Formule de medie pentru soluţiile analitice ale unor ecuaţii sau sisteme de ecuaţii de tip parabolic sau hiperbolic 23

V. GORCIU, Asupra clasei reale a unui spaţiu cu curbură constantă şi negativă de dimensiune n 49

P. IVĂNESCU şi S. RUDEANU, Asupra rezolvării problemei transporturilor prin metoda lui Egerváry. II 59

EMERIC DEUTSCH, Probleme de tip Boussinesq pentru un semispaţiu elastic cu izotropie transversă 69

VICTORIA CRISTEA, Consideraţii, din punct de vedere al mecanicii newtoniene, asupra sistemelor de puncte materiale 99

DAN BURGHELEA şi NICOLAE POPESCU, Consideraţii asupra omologiei singulare pe CW-complexe 115

RECENZII 135

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

XIVe année, n° 1 1963

SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Topological properties of Riemannian spaces with affine constant connection 7

M. ROŞCULEŢ, Opérateurs intégraux généralisant les équations différentielles. II. Formules de moyenne pour les solutions analytiques de certaines équations ou systèmes d'équations du type parabolique ou hyperbolique . . 23

V. GORCIU, Sur la classe réelle d'un espace à courbure constante et négative de dimension n 49

P. IVĂNESCU et S. RUDEANU, Sur la résolution du problème des transports par la méthode d'Egerváry. II 59

EMERIC DEUTSCH, Boussinesq problems for an elastic half-space with transverse isotropy 69

VICTORIA CRISTEA, Considérations, au point de vue de la mécanique newtonienne, sur les systèmes de points matériels 99

DAN BURGHELEA et NICOLAE POPESCU, De l'homologie singulière sur les CW-complexes 115

COMPTES RENDUS 135

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Год XIV, № 1 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. ВРЭНЧАНУ, Топологические свойства римановых пространств с постоянной связностью 7

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, Интегральные операторы, обобщающие дифференциальные уравнения. II. Формулы о среднем значении для аналитических решений некоторых уравнений или систем уравнений параболического или гиперболического типа. 23

В. ГОРЧУ, О действительном классе n-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны 49

П. ИВЭНЕСКУ и С. РУДЯНУ, О решении транспортной задачи методом Эгервари. II 59

ЭМЕРИК ДЕЙЧ, Задачи типа Буссинеска для упругого трансверсально изотропного полупространства 69

ВИКТОРИЯ КРИСТЯ, Рассмотрение вопроса о системах материальных точек с точки зрения ньютоновой механики 99

ДАН БУРГЕЛЯ и НИКОЛАЕ ПОПЕСКУ, О сингулярной гомологии на CW-комплексах 115

РЕЦЕНЗИИ 135

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

PROPRIETĂȚI GLOBALE ALE SPAȚIILOR LUI RIEMANN CU CONEXIUNE AFINĂ CONSTANTĂ

DE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU

Se spune că un spațiu al lui Riemann V_n are conexiunea afină constantă, dacă există un sistem de variabile în care simbolurile lui Christoffel de speța a doua sînt constante.

Vagner [1]) a arătat că în cazul cînd metrica lui V_n este pozitiv definită trebuie să fie de forma

$$ds^2 = e^{2a_k x^k} c_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{1}$$

unde a_k și c_{ij} sînt constante, sau spațiul este produsul direct a două sau mai multe spații avînd această proprietate.

S-a arătat [2]) că atunci cînd metrica nu este pozitiv definită pot să existe spații V_n care nu sînt local euclidiene și a căror metrică nu este de forma (1). Ne propunem acum să dăm anumite proprietăți globale ale spațiilor (1) cu metrică pozitiv definită sau indefinită, și să arătăm că aceste spații au proprietăți analoge acelora ale spațiilor cu curbură constantă negativă, deci se pot construi cu ele anumite geometrii neeuclidiene hiperbolice generalizate.

I

Fiind dat un spațiu (1), acest spațiu este evident cu metrică pozitiv definită dacă forma pătratică

$$\varphi = c_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{2}$$

---

[1]) V. Vagner, *Spații ale lui Riemann cu simbolurile lui Christoffel constante*. Bul. Univ. Saratov (1938).

[2]) G. Vrănceanu, *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiunea constantă*. St. cerc. mat., **XIII**, 2 (1962).

este pozitiv definită. În acest caz, alegînd în această metrică un sistem de coordonate ortogonale avem

$$\varphi = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2.$$

Deoarece în raport cu transformările ortogonale de coordonate cantităţile a_k constituie componentele unui vector, putem să alegem un sistem de coordonate în care acest vector are direcţia axei x^1; putem deci scrie metrica (1) sub forma

$$ds^2 = e^{2a\,x^1}\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2]. \tag{3}$$

Cum a nu este egal cu zero, pentru că în acest caz spaţiul ar fi euclidian, putem considera schimbarea de variabile

$$x^i = -\frac{y^i}{a}$$

şi atunci metrica (3) se scrie

$$ds^2 = \frac{(dy^1)^2 + \ldots + (dy^n)^2}{a^2\,e^{2y^1}}$$

deci, făcînd abstracţie de înmulţirea cu un factor constant, putem presupune că metrica spaţiului (1) este dată de formula

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{e^{2x^1}} \tag{4}$$

care este asemănătoare cu forma lui Beltrami a unui spaţiu V_n cu curbură constantă negativă.

Într-adevăr, obţinem formula lui Beltrami dacă în formula (4) cantitatea e^{2x^1} este înlocuită prin $(x^1)^2$.

Să presupunem că acum considerăm o metrică fără restricţia ca forma (2) să fie o formă pătratică pozitiv definită. Şi în acest caz se poate ajunge la forma canonică

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \varepsilon_s\,(dx^s)^2}{e^{2x^1}}, \qquad (s = 2, \ldots, n), \tag{5}$$

unde $\varepsilon_s = \pm 1$ dacă lungimea vectorului a_k, calculată cu ajutorul formei φ, este diferită de zero.

Într-adevăr, putem totdeauna reduce forma pătratică la forma canonică

$$\varphi = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^p)^2 - (dx^{p+1})^2 - \ldots - (dx^n)^2.$$

Mai mult, prin transformări ortogonale, în variabilele $x^1, \ldots, x^p$ de o parte şi în variabilele $x^{p+1}, \ldots, x^n$ de alta, putem presupune că forma $a_k\,x^k$ a fost redusă la forma $ax^1 + bx^n$ şi putem presupune chiar că a şi b sînt cantităţi pozitive.

Dacă considerăm o transformare hiperbolică

$$\begin{aligned} x^1 &= x'^1 \operatorname{ch}\alpha + x'^n \operatorname{sh}\alpha \\ x^n &= x'^1 \operatorname{sh}\alpha + x'^n \operatorname{ch}\alpha \end{aligned} \qquad \left(\operatorname{ch}\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{sh}\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\right)$$

care, evident, nu schimbă forma canonică a lui φ, avem [1])

$$a' = a \operatorname{ch}\alpha + b \operatorname{sh}\alpha, \qquad b' = a \operatorname{sh}\alpha + b \operatorname{ch}\alpha.$$

Să presupunem că $a > b$. În acest caz putem alege α astfel ca b' să fie nul. Într-adevăr, în acest caz trebuie ca α să satisfacă formula

$$e^\alpha (a + b) - e^{-\alpha}(a - b) = 0$$

și forma canonică (5) este obținută.

La fel dacă $a < b$, putem anula a' și atunci printr-o schimbare de semn a metricei și prin schimbarea indicilor variabilelor se obține formula (5). Rămîne deci cazul cînd $a = b$ deci cazul cînd vectorul a_k are în raport cu forma φ lungime nulă. În acest caz, luînd ca variabile x^1, x^2 variabilele $x^1 - x^n$, $x^1 + x^n$ putem reduce metrica spațiului la forma canonică

$$ds^2 = \frac{2\,dx^1\,dx^2 + \varepsilon_\alpha (dx^\alpha)^2}{e^{2x^1}} \qquad (\alpha = 3, \ldots, n) \tag{6}$$

unde ε_α sînt egali cu ± 1.

Avem deci teorema :

Abstracție făcînd de un factor constant, metrica (1) *poate fi redusă la forma canonică* (5) *sau* (6).

Vom căuta acum ecuațiile geodezicelor spațiilor (5) și (6). Întrebuințînd energia cinetică asociată formei pătratice (5)

$$T = \frac{1}{2} \frac{(\dot{x}^1)^2 + \varepsilon_s (\dot{x}^s)^2}{e^{2x^1}}, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

și considerînd ecuațiile lui Lagrange, avem

$$\ddot{x}^1 = (\dot{x}^1)^2 - \varepsilon_s (\dot{x}^s)^2, \qquad \ddot{x}^s = 2\dot{x}^1 \dot{x}^s \tag{7}$$

deci simbolurile lui Christoffel de speța a doua, care nu sînt nule, sînt date de formulele

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}\right| = -1, \qquad \left|\begin{matrix} 1 \\ ss \end{matrix}\right| = \varepsilon_s, \qquad \left|\begin{matrix} s \\ s\,1 \end{matrix}\right| = -1. \tag{8}$$

În ceea ce privește simbolurile lui Riemann de a doua speță avem

$$R^i_{jkl} = \left|\begin{matrix} i \\ h\,k \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} h \\ j\,l \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ h\,l \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} h \\ j\,k \end{matrix}\right|.$$

---

[1]) A se vedea și G. Vrănceanu, *Reducerea la formă canonică a două forme pătratice*. St. cerc. mat., **XII**, *1*, 22 (1962).

Ținînd seamă de (8) găsim că aceste simboluri sînt nule afară de R^i_{jkl} unde i, j, k, l sînt diferiți de 1.

$$R^q_{tps} = \left|\begin{matrix} q \\ 1\,p \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 \\ t\,s \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} q \\ 1\,s \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 \\ t\,p \end{matrix}\right| = -\varepsilon_s\, \delta^p_q\, \delta^t_s + \delta^q_s\, \varepsilon_t\, \delta^t_p .$$

Aceste formule ne spun că q, t, p, s trebuie să fie egale cu 2 pentru ca componenta R^q_{tps} să fie diferită de zero, cînd avem

$$R^p_{spt} = -\varepsilon_s \qquad (p,\ s \neq 1). \tag{9}$$

Deci R^i_{jkl} sînt sau nule sau negative dacă metrica este pozitiv definită ($\varepsilon_s = 1$).

Vom arăta acum că dacă un spațiu V_n este în corespondență geodezică cu spațiul (5), metrica acelui spațiu diferă de (5) printr-un factor constant. Într-adevăr, se știe că componentele a_{ij} ale tensorului metric ale spațiilor V_n, în corespondență geodezică cu un spațiu dat, satisfac ecuațiile

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \left|\begin{matrix} s \\ i\,k \end{matrix}\right| a_{sj} + \left|\begin{matrix} s \\ j\,k \end{matrix}\right| a_{si}, \tag{10}$$

unde $\left|\begin{matrix} i \\ j\,k \end{matrix}\right|$ sînt simboluri lui Christoffel de a doua speță ale spațiului dat.

Se știe de asemenea că aceste ecuații au drept condiții de integrabilitate ecuațiile

$$R^s_{jkl}\, a_{si} + R^s_{ikl}\, a_{sj} = 0 \tag{11}$$

și ecuațiile în care R^i_{jkl} sînt înlocuite prin componentele tensorilor de curbură derivați. Să presupunem că se consideră aceste ecuații pentru $i = 1$, $j = l > 1$. Ținînd seama de formulele (9) obținem formulele

$$a_{k1}\, \varepsilon_i = 0 \qquad (k > 1).$$

Trebuie deci ca $a_{k1} = 0$ pentru $k > 1$.

Ținînd seama în formulele (10) de aceste condiții și de formulele (8) se găsește

$$-a_{kt} + \left|\begin{matrix} 1 \\ t\,k \end{matrix}\right| a_{11} = 0,$$

ceea ce ne spune că $a_{kt} = 0$ $(t \neq k > 1)$ și că

$$a_{kk} = \varepsilon_k\, a_{11},$$

ceea ce ne arată că metrica este proporțională cu metrica (5).

De altă parte, ținînd seama de (8), formulele (10) ne dau pentru $i = j = 1$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \qquad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^k} = 0 \qquad (k > 1)$$

și deci avem

$$a_{11} = Ae^{-2x^1},$$

unde A este o constantă. Considerînd că două spații V_n sînt identice dacă metricele lor variază printr-un factor constant, avem teorema :

Un spațiu Riemann (5) *este în corespondență geodezică numai cu el însuși.*

Rezultă, în particular, că un spațiu al lui Riemann (5) este determinat de geodezicele sale, abstracție făcînd de factorul constant.

Să considerăm acum spațiile cu metrica (6).

Considerînd energia cinetică asociată

$$T = \frac{2\dot{x}^1\dot{x}^2 + \varepsilon_\alpha(\dot{x}^\alpha)^2}{e^{2x^1}}, \qquad (\alpha = 3, \ldots, n), \tag{12}$$

ecuațiile lui Lagrange ne dau

$$\ddot{x}^1 = 2(\dot{x}^1)^2, \qquad \ddot{x}^2 = -\varepsilon_\alpha(\dot{x}^\alpha)^2, \qquad \ddot{x}^\alpha = 2\dot{x}^1\dot{x}^\alpha, \tag{13}$$

ceea ce ne arată că simbolurile lui Christoffel, diferite de zero, sînt date de formulele

$$\left|\begin{matrix}1\\11\end{matrix}\right| = -2, \qquad \left|\begin{matrix}2\\\alpha\alpha\end{matrix}\right| = \varepsilon_\alpha, \qquad \left|\begin{matrix}\alpha\\\alpha 1\end{matrix}\right| = -1. \tag{14}$$

Considerînd simbolurile lui Riemann R^i_{jkl} pe care, ținînd seama că toate simbolurile $\left|\begin{matrix}i\\2k\end{matrix}\right|$ sînt nule, putem să le scriem

$$R^i_{jkl} = \left|\begin{matrix}i\\1k\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1\\jl\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}i\\1l\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1\\jk\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}i\\\beta k\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}\beta\\jl\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}i\\\beta l\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}\beta\\jk\end{matrix}\right|,$$

unde β variază de la 3 la n, rezultă că R^1_{jkl} sînt nule și că R^2_{jkl} sînt de asemenea nule afară de

$$R^2_{\beta\beta 1} = -\varepsilon_\beta. \tag{15}$$

Avem de asemenea

$$R^\beta_{1\beta 1} = 1. \tag{15'}$$

Cît despre celelalte R^i_{jkl} toate sînt nule.

Deci considerînd condițiile de integrabilitate (11) pentru $i = j = k = \alpha > 2$, $l = 1$ obținem

$$a_{2\alpha} = 0. \tag{16}$$

Aceleași condiții (11) pentru $i = j = k = 1$, $l = \alpha$ ne dau

$$a_{1\alpha} = 0. \tag{16'}$$

Ținînd seama de aceste condiții în formulele (10) pentru $k = \beta > 2$ obținem

$$\left|\begin{matrix}s\\2\beta\end{matrix}\right| a_{s\alpha} + \left|\begin{matrix}s\\\alpha\beta\end{matrix}\right| a_{s2} = 0, \qquad \left|\begin{matrix}s\\1\beta\end{matrix}\right| a_{s\alpha} + \left|\begin{matrix}s\\\alpha\beta\end{matrix}\right| a_{s1} = 0,$$

din care primele ne dau $a_{22} = 0$, în timp ce ultimele , ținînd seama de (14), se scriu

$$- a_{\beta\alpha} + \delta^{\alpha}_{\beta}\, \varepsilon_\alpha\, a_{12} = 0\,; \tag{17}$$

avem deci $a_{\beta\alpha} = 0$ dacă $\beta \neq \alpha$ și $a_{\alpha\alpha} = \varepsilon_\alpha\, a_{12}$.

Se poate deci scrie metrica sub forma

$$ds^2 = \rho\psi + a_{11}\,(dx^1)^2, \tag{18}$$

unde ψ este forma pătratică (6).

Scriind ecuațiile (10) pentru $i = j = 1$ se obține

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 11 \end{vmatrix} a_{11} = -\,4a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^s} = 0 \qquad (s > 1).$$

Avem deci

$$a_{11} = k\mathrm{e}^{-4x^1}.$$

De asemenea, ecuațiile (10) se scriu pentru $i = 1$, $j = 2$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 11 \end{vmatrix} a_{12} = -\,2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^s} = 0.$$

Cum în (18) avem $a_{12} = \rho\, \mathrm{e}^{-2x^1}$, rezultă că ρ este o constantă.

Avem deci teorema :

Metricele care sînt în corespondență geodezică cu metrica (6) *se scriu sub forma*

$$ds^2 = \rho\,\psi + k\mathrm{e}^{-4x^1}\,(dx^1)^2, \tag{19}$$

unde ψ *este metrica* (6) *și* ρ *și* k *sînt constante.*

Se vede deci că o metrică (1) al cărei vector a_k este de lungime nulă nu este definită, abstracție făcînd de o constantă multiplicativă, de către geodezicele sale, așa cum se întîmplă în cazul cînd vectorul a_k este de lungime diferită de zero.

II

Să presupunem acum că se consideră un spațiu (1) cu metrică pozitiv definită ; putem deci scrie metrica acestui spațiu sub forma

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{a^2\,\mathrm{e}^{2x^1}}. \tag{20}$$

Dacă se introduc congruențe ortogonale

$$ds^1 = \frac{dx^1}{a\,\mathrm{e}^{x^1}}, \qquad ds^p = \frac{dx^p}{a\,\mathrm{e}^{x^1}} \qquad (p > 1)$$

se găsesc, pentru coeficienții nenuli ai lui Ricci cu patru indici, formulele

$$\gamma^p_{s\,p\,s} = -\,a^2\,e^{2x^1} \qquad (p,\ s > 1). \tag{21}$$

Deoarece coeficienții $\gamma^p_{s\,p\,s}$ ne dau curbura fațetei plane determinată de coordonatele x^p, x^s se vede deci că această curbură este aceeași pentru fiecare fațetă x^p, x^s (s, $p > 1$) și evident este nulă pentru o fațetă x^1, x^s căci $\gamma^1_{s\,1\,s} = 0$. Se vede deci că în metrica (20) constanta a măsoară, pentru o valoare dată a lui x^1, curbura unei fațete dacă această curbură nu este nulă. Este deci natural să se spună că $R = \dfrac{1}{a}$ este raza de curbură ($R > 0$, $a > 0$) a spațiului și să se scrie metrica (20) sub forma

$$ds^2 = R^2\,\frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}{e^{2x^1}}. \tag{22}$$

Ținînd seama de faptul că ultimele $n-1$ ecuații (7) ale geodezicelor se pot scrie

$$\frac{dx^p}{ds} = c_p\,e^{2x^1},$$

unde c_p sînt constante, se vede că dacă toate aceste constante sînt nule, atunci geodezica este o paralelă la axa x^1.

Dacă c_p nu sînt toate nule, se poate ca, întrebuințînd o transformare ortogonală a coordonatelor $x^2, \ldots, x^n$, să se presupună că toate constantele c_p sînt nule afară de $c_2 = c$ și în acest caz geodezica se găsește într-un plan paralel cu planul x^1, x^2.

Avem deci teorema:

O geodezică a metricei (20) *este o curbă plană.*

Punînd $x^1 = x$, $x^2 = y$ și întrebuințînd și integrala energiei cinetice să integrăm sistemul

$$\frac{dy}{ds} = c\,e^{2x}, \qquad R^2\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + c^2\,e^{4x}\right] = e^{2x},$$

sistem ce poate fi scris sub forma

$$\frac{dx}{ds} = \frac{e^x}{R}\sqrt{1 - R^2\,c^2\,e^{2x}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{R\,c\,e^x}{\sqrt{1 - R^2\,c^2\,e^{2x}}}. \tag{22'}$$

A doua din aceste ecuații ne dă

$$y = \arcsin R\,c\,e^x + n,$$

unde n este o constantă de integrare. Dar putem scrie această ecuație sub forma

$$\sin(y - n) = R\,c\,e^x. \tag{23}$$

Cum valoarea maximă a lui sin este unitatea, se vede că curba este situată la stînga dreptei $x = m$, unde m satisface condiția $R\,c\,e^{m} = \pm 1$ după cum c este pozitiv sau negativ.

Putem deci scrie ecuația unei geodezice sub forma

$$\sin(y - n) = \varepsilon\, e^{x-m}, \tag{23'}$$

unde ε este egal cu $1, -1$ sau cu zero.

Se vede deci că, în primul caz, curba este situată între următoarele două paralele :

$$y = n + 2k\pi, \qquad y = n + \pi + 2k\pi, \tag{24}$$

unde k este un număr întreg și punctul $M\left(m, n + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ este punctul

avînd abscisa maximă, în timp ce în cazul al doilea curba este situată între paralelele

$$y = n + \pi + 2k\pi, \qquad y = n + 2(k+1)\pi \tag{24'}$$

și punctul de abscisă maximă este $M'\left(m, n + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$. În al treilea caz, curba este una din dreptele $y = n + k\pi$ paralele cu axa x.

În primele două cazuri curba are ca asimptote, pentru x tinzînd către $-\infty$, paralelele corespunzătoare (24), (24'). Deci curba vine de la infinit și se duce din nou la infinit.

De altă parte, cum numărul k este oarecare, o geodezică are o infinitate de ramuri. Ținînd seama de faptul că lărgimea unei ramuri este egală cu π, rezultă că fiind date două puncte $P'(x', y', z')$, $P''(x'', y'', z'')$ se poate face să treacă prin aceste două puncte numai o ramură de geodezică dacă diferența $|y'' - y'|$ este mai mică decît π și în acest caz geodezica este unică. Într-adevăr, în acest caz trebuie să avem

$$\sin(y' - n) = \varepsilon\, e^{x'-m}, \qquad \sin(y'' - n) = \varepsilon\, e^{x''-m}. \tag{25}$$

Dacă $y' = y''$ trebuie să avem

$$\varepsilon\, e^{-m}\,[e^{x'} - e^{x''}] = 0,$$

deci dacă $x' \neq x''$ trebuie să avem $\varepsilon = 0$ și geodezica este paralelă la axa $x\,(y = y' = y'')$. Dacă $0 < |y' - y''| < \pi$, ε nu poate să fie nul și atunci avem prin împărțire

$$\frac{\sin y' - \cos y' \cdot \operatorname{tg} n}{\sin y'' - \cos y'' \cdot \operatorname{tg} n} = e^{x'-x''},$$

ceea ce ne definește o valoare bine determinată pentru n dacă

$$\sin y' \cos y'' - \cos y' \sin y'' = \sin(y' - y'') \neq 0$$

ceea ce are loc în cazul nostru. Avem deci

$$\operatorname{tg} n = \frac{e^{-x'} \sin y' - e^{-x''} \sin y''}{e^{-x'} \cos y' - e^{-x''} \cos y''}.$$

Se vede că dacă n este o soluție într-o bandă de lărgime 2π, atunci în această bandă există și o soluție $n \pm \pi$. Deci într-o bandă de lărgime π, unde se găsește banda geodeziceî, avem o singură soluție pentru n și natural și pentru m.

Avem deci teorema:

Dacă cantitatea $|y' - y''|$ *este mai mică decît* π, *prin două puncte trece o ramură de geodezică și numai una singură.*

Rezultă că prin două puncte nu trece nici o geodezică dacă

$$y' - y'' = (2k + 1)\,\pi.$$

De altă parte, fiind date punctele P', P'' se poate totdeauna lăsa punctul P' fix și se poate considera în loc de P'' un punct care se obține adăugînd un multiplu de 2π astfel încît să avem $|y' - y''| \leqslant \pi$.

Dacă avem $|y' - y''| = \pi$ este evident că nu trece nici o geodezică prin cele două puncte.

Să luăm acum o geodezică (23) cu $c \neq 0$ și să căutăm lungimea acestei geodezice între două din punctele sale P', P''. Avem

$$s = R\int_{P'}^{P''} \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\mathrm{e}^x}.$$

Ținînd seama de (23) avem

$$\mathrm{e}^x = \frac{\sin(y-n)}{Rc}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\cos(y-n)}{\sin(y-n)}\,\mathrm{d}y$$

și deci avem formula

$$s = R^2 c\int_{y'}^{y''} \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2(y-n)} = R^2 c\,[\operatorname{ctg}(y'-n) - \operatorname{ctg}(y''-n)],$$

formulă ce poate fi scrisă încă

$$s = R^2 c\,\frac{\sin(y''-y')}{\sin(y'-n)\sin(y''-n)} = \frac{1}{c}\,\frac{\sin(y''-y')}{\mathrm{e}^{x'+x''}}. \tag{25'}$$

De altă parte, eliminînd n între ecuațiile (25), se găsește că c este definit de expresia

$$c = \frac{\sin(y''-y')}{R\sqrt{\mathrm{e}^{2x'} + \mathrm{e}^{2x''} - 2\cos(y'-y'')\,\mathrm{e}^{x'+x''}}} \tag{25''}$$

și deci distanța geodezică între P' și P'' este dată de formula

$$l = R\sqrt{\mathrm{e}^{-2x'} + \mathrm{e}^{-2x''} - 2\cos(y'-y'')\,\mathrm{e}^{-x'-x''}}. \tag{26}$$

Dacă $c = 0$, deci $y' = y''$, avem

$$l = R\int_{x'}^{x''} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x} = \pm R\,(\mathrm{e}^{-x''} - \mathrm{e}^{-x'}). \tag{26'}$$

Avem deci teorema :

Distanța l între două puncte P', P'' este dată de formula (26) *sau* (26′) *după cum* $y' \neq y''$ *sau* $y' = y''$.

În ceea ce privește unghiurile, metrica fiind conformă unei metrice euclidiene, unghiurile se calculează ca în spațiile euclidiene.

Însemnînd cu $m = \operatorname{tg} \theta$ coeficientul unghiular al tangentei în P' la geodezica $P'P''$, avem, ținînd seama de a doua formulă (22′) și (25″)

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{Rc\, e^{x'}}{\sqrt{1 - R^2 c^2 e^{2x'}}} = \frac{e^{x'-x''}}{\sqrt{1 - 2 \cos (y' - y'')\, e^{x'-x''}}}. \tag{27}$$

Dacă se înseamnă cu θ' unghiul corespunzător pentru curba $P'P'''$ avem deci

$$m' = \operatorname{tg} \theta' = \frac{e^{x'-x'''}}{\sqrt{1 - 2 \cos (y' - y''')\, e^{x'-x'''}}}$$

și deci unghiul φ al geodezicelor $P'P''$, $P'P'''$ este dat de formula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m' - m}{1 + mm'}.$$

Avem deci unghiul unui triunghi $P'P''P'''$ cu ajutorul coordonatelor vîrfurilor triunghiului. În particular, unghiul φ este drept dacă avem

$$1 + mm' = 0.$$

Se poate deci considera o trigonometrie în spațiile lui Riemann cu conexiunea afină constantă și cu metrică definit-pozitivă.

Se poate evita faptul că o geodezică a spațiilor (20) este formată dintr-o infinitate de ramuri convenind că identificăm punctele ale căror coordonate x^s $(s > 1)$ diferă printr-un număr $2k\pi$, unde k este un număr întreg.

Un astfel de spațiu este atunci închis în raport cu variabilele x^s și deschis în raport cu variabila x^1. Cu alte cuvinte, acest spațiu este, din punct de vedere topologic, produsul direct al unei drepte x^1 și a $n-1$ cercuri pe care x^s sînt unghiuri. Vom spune că aceste spații sînt spații cilindrice cu conexiune constantă.

Un astfel de spațiu poate fi definit, din punctul de vedere al geometriei diferențiale globale, prin 2^{n-1} vecinătăți luînd într-una din aceste vecinătăți drept coordonate

$$u^1 = x^1, \qquad u^h = \operatorname{tg} \frac{x^h}{2} \qquad (h > 1) \tag{28}$$

și apoi considerînd ca transformare de coordonate de la o vecinătate la alta o transformare care păstrează toate variabilele $u^1, \ldots, u^n$ afară de una din variabilele $u^2, \ldots, u^n$ care se transformă în inversa sa. Avem deci

$$u'^1 = u^1, \; u'^\alpha = u^\alpha, \; u'^\beta = \frac{1}{u^\beta} \qquad (\beta \neq \alpha),$$

unde β este un număr fix.

Ținînd seama de (28), metrica (22) a spațiului V_n devine în vecinătatea $V(u^1, u^2, \ldots, u^n)$

$$ds^2 = \frac{R^2}{e^{2u^1}} \left[(du^1)^2 + \frac{4\,(du^h)^2}{[1 + (u^h)^2]^2} \right] \tag{29}$$

și această metrică rămîne invariantă printr-o transformare de variabile în care una sau mai multe din variabilele u^h se schimbă în inversele lor.

Ținînd seama de considerațiile făcute mai sus, rezultă că geodezicele spațiului (29) sînt curbe plane și dacă se ia ca plan al geodezicei plane paralele cu planul variabilelor u^1, u^2 și se pune

$$u^1 = t, \quad u^2 = u, \quad u^k = c^k,$$

ecuațiile (23′) ale geodezicelor se scriu

$$\frac{u^2 + 2u \operatorname{ctg} n - 1}{1 + u^2} = \frac{\varepsilon}{\sin n} e^{t-m} \tag{30}$$

și sînt deci curbe care au ca asimptote dreptele $u = \rho$, unde ρ este soluție a ecuației

$$\rho^2 \sin n + 2\rho \cos n - \sin n = 0;$$

avem deci drept soluții

$$\rho_1 = \operatorname{tg} \frac{n}{2}, \qquad \rho_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{n}{2}}.$$

Geodezica se găsește în interiorul sau în exteriorul fișiei cuprinsă între dreptele

$$u = \rho_1, \qquad u = \rho_2,$$

după cum $\dfrac{\varepsilon}{\sin n}$ este negativ sau pozitiv.

De asemenea, curba exterioară are ca asimptotă dreapta $t = t_0$, sau este definită de formula

$$e^{t_0 - m} = \frac{\sin n}{\varepsilon}.$$

Se poate totuși remarca că printr-o transformare $u' = \dfrac{1}{u}$ ramura interioară a geodezicei se schimbă în ramura exterioară și invers.

Rezultă că prin două puncte $P'(u', t')$, $P''(u'', t'')$ trece totdeauna o geodezică și numai una, în afară de cazul cînd u', u'' sînt soluții ale unei o ecuații de ordinul al doilea

$$u^2 + 2u \operatorname{ctg} n - 1 = 0,$$

cînd nu există o geodezică prin P', P''.

În acest caz, în ecuația (30) avem $\varepsilon = 0$ și punctele P', P'' sînt situate pe două drepte

$$u' = \operatorname{tg}\frac{n}{2}, \qquad u'' = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{n}{2}}, \tag{30'}$$

astfel încît avem $u'u'' + 1 = 0$.

Vedem că dreptele planului se asociază două cîte două prin formulele (30'), astfel încît prin punctele P', P'', situate pe două din aceste drepte, nu trece nici o geodezică.

Se poate evita această excepție definind ca geodezică a spațiului o curbă de felul celei reprezentate de (30) în care ε are și valoarea 0, cînd geodezica este formată de cele două drepte (30').

Să presupunem că se dă o geodezică g avînd asimptotele (30') și un punct P în afara acestei geodezice.

Putem face atunci să treacă prin acest punct o infinitate de geodezice avînd asimptotele (30'). Toate aceste geodezice sînt deci paralele la geodezica g. De asemenea, putem face să treacă prin P geodezica avînd asimptote diferite de (30'). Toate aceste geodezice întîlnesc geodezica g.

Avem deci teorema:

Prin două puncte ale unui spațiu cilindric cu conexiune constantă trece totodeauna o geodezică și numai una și printr-un punct P trece o infinitate de geodezice care întîlnesc (sau nu întîlnesc) o geodezică dată g.

În spațiile cilindrice, cu conexiune constantă, se verifică deci postulatul paralelelor lui Lobacevski.

Vom arăta acum că un spațiu V_n cu metrică (4) poate fi scufundat într-un spațiu euclidian E_{2n-2}, că deci un astfel de spațiu este cel mult de clasa $n-2$.

Într-adevăr, se știe că în general un spațiu Riemann V_n a cărui metrică este conformă cu aceea a unui spațiu euclidian

$$ds^2 = \rho^2 [(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2], \tag{31}$$

unde ρ depinde de o singură variabilă, să zicem de x^1, este cel mult de clasa reală $n - 1$ [1]). Într-adevăr, să considerăm spațiul euclidian E_{2n-1} $(x, y^2, \ldots, y^n, z^2, \ldots, z^n)$ și să considerăm în acest spațiu locul geometric

$$x = \psi(x^1), \qquad y^i = \rho\,\alpha \cos\frac{x^i}{\alpha}, \qquad z^i = \rho\,\alpha \sin\frac{x^i}{\alpha}, \tag{32}$$

unde α este o constantă.

Ținînd seama că, pentru o anumită valoare a lui i, avem

$$(dy^i)^2 + (dz^i)^2 = \alpha^2\, d\rho^2 + \rho^2 (dx^i)^2,$$

rezultă că avem ca metrică a locului geometric

$$ds^2 = [\psi'^2 + \alpha^2 (n-1)\, \rho'^2]\, (dx^1)^2 + \rho^2 [(dx^2)^2 + \ldots + (dx^n)^2],$$

---

[1]) G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1957, II, 46.

unde ψ' și ρ' sînt derivatele lui ψ și ρ în raport cu x^1, și această metrică coincide cu (31) dacă avem

$$\rho^2 = \psi'^2 + \alpha^2 (n-1)\, \rho'^2,$$

ceea ce definește funcția ψ. Dacă de exemplu ρ este egal cu $(x^1)^{-2}$, deci dacă (31) este metrica unui spațiu cu curbură constantă negativă, avem

$$\psi' = \frac{1}{(x^1)^3} \sqrt{(x')^2 - 4\alpha^2 (n-1)},$$

ceea ce ne spune că scufundarea (32) a spațiului cu curbură constantă negativă nu este globală pentru că x^1 trebuie să fie mai mare decît $2\alpha \sqrt{n-1}$ pentru ca ψ să fie real.

Să presupunem că spațiul V_n este cu conexiune afină constantă, cu metrică (3) deci

$$\rho = e^{ax^1}.$$

În acest caz, avem

$$\psi' = e^{ax^1} \sqrt{1 - \alpha^2 a^2 (n-1)}$$

și putem presupune că ψ este o constantă, alegînd α astfel încît să avem $1 - \alpha^2 a^2 (n-1) = 0$. Rezultă că putem realiza scufundarea spațiului (3) într-un spațiu euclidian E_{2n-2} (y^i, z^i). Deci avem teorema :

Spațiul (3) *poate fi scufundat într-un spațiu euclidian* E_{2n-2} *prin formulele*

$$y^i = \frac{e^{ax^1}}{a\sqrt{n-1}} \cos \sqrt{n-1}\, x^i, \qquad z^i = \frac{e^{ax^1}}{a\sqrt{n-1}} \sin \sqrt{n-1}\, x^i. \tag{33}$$

În ceea ce privește proprietățile acestei scufundări se vede că unui punct al lui V_n îi corespunde un punct al lui E_{2n-2} dar că, invers, unui punct al lui E_{2n-2} aparținînd locului corespund o infinitate de puncte ale lui V_n. Într-adevăr, punctelor

$$x_0^1,\ x_0^h + \frac{2k_h \pi}{a\sqrt{n-1}},$$

unde k_h sînt numere întregi, le corespund aceleași valori pentru y^i, z^i.

Dacă se convine să se considere spațiul cilindric pentru care se identifică punctele ale căror coordonate x^h diferă printr-un număr $\dfrac{2k_h \pi}{a\sqrt{n-1}}$, avem teorema :

Există o corespondență biunivocă între punctele spațiului cilindric V_n *cu conexiune constantă și punctele locului geometric* (33) *al spațiului euclidian* E_{2n-2}.

Deci scufundarea spațiului cilindric V_n în E_{2n-2} este globală.

Din punctul de vedere al scufundării, spațiile cilindrice V_n $(n > 2)$ cu conexiune constantă apar ca fiind mai simple decît spațiile V_n cu curbură constantă negativă. Într-adevăr, pentru aceste spații se știe numai că există scufundări globale în spații R_{6n-5} [1]), prin formule infinite derivabile de o infinitate de ori.

Să considerăm grupul de mișcări al unui spațiu cu conexiune afină constantă a cărui metrică a fost scrisă sub forma canonică (4). Este ușor să se vadă că un astfel de spațiu posedă ca grup de mișcare grupul

$$x'^1 = x^1, \qquad x'^s = a^s_t\, x^t + a^s, \tag{34}$$

unde a^s_t satisfac condițiilor de ortogonalitate. Deci acest grup posedă $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri și nu este tranzitiv în ceea ce privește variabila x^1. Se poate arăta că pentru $n > 2$ acest grup este grupul total de mișcare al spațiului. Într-adevăr, fiind dată o transformare infinitezimală,

$$x'^i = x^i + \xi^i,$$

unde ξ^i sînt considerate cantități de primul ordin, această transformare lasă invariantă metrica cu coeficienți a_{ij} dacă avem, cum se știe bine,

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\,\xi^k + a_{is}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^j} + a_{js}\frac{\partial \xi^s}{\partial x^i} = 0.$$

În cazul metricei (4) aceste ecuații se scriu

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \xi^1, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0, \tag{35}$$

unde i, j sînt indici ficși diferiți. Aceste ecuații ne dau pentru $i = 1$

$$\xi^1 = m\, e^{x^1}, \qquad \xi^j = -\, m_j\, e^{x^1} + p_j \qquad \left(m_j = \frac{\partial m}{\partial x^j}\right),$$

unde m și p_j sînt independente de x^1. Cea de-a doua ecuație (35) pentru $i, j > 1$ ne spune că $m_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ deci

$$m = m_2 + \ldots + m_n,$$

unde m_k $(k > 1)$ depinde numai de variabila x^k. Introducînd în primele ecuații (35) pentru $i = k$, avem

$$-\frac{\partial m_k}{\partial x^k} = m,$$

[1]) A se vedea D. Blanusa, *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in Euclidische Räume*. Monatshefte für Mathematik, **59**, 207–229 (1955).

ecuații care nu pot fi verificate pentru $n \geqslant 3$ decît de $m = 0$. Avem deci $x'^1 = x^1$ și teorema

Grupul de mișcări al spațiului (4) *pentru* $n > 2$ *este grupul* (34).

Rezultă deci că, pentru $n > 2$, spațiul V_n cu conexiunea afină constantă (4) nu este un spațiu omogen.

Considerînd totuși ca identice două spații V_n astfel încît raportul metricelor lor să fie constant, considerînd deci geodezicele ca invariant, avem ca grup de mișcare al geodezicelor

$$x'^1 = x^1 + a, \qquad x'^s = a_t^s x^t + a^s,$$

unde a_t^s satisfac la condițiile de ortogonalitate, care evident este un grup tranzitiv cu $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ parametri.

Acum să presupunem că se consideră variabilele $x^1, x^2, \ldots, x^n$ ca unghiuri și că se iau ca noi variabile

$$y_i = \operatorname{tg} \frac{x^i}{2}.$$

Atunci avem formulele

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+y_i^2} \frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2}{1+y_i^2} \frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}t^2} - \frac{4y_i}{[1+y_i^2]^2} \frac{\mathrm{d}y_i^2}{\mathrm{d}t^2}$$

și în consecință ecuațiile (7) cu $\varepsilon_s = 1$ se scriu:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{2(y_1+1)}{1+y_1^2} \frac{\mathrm{d}y_1^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{2(1+y_1^2)}{(1+y_s^2)^2} \frac{\mathrm{d}y_s^2}{\mathrm{d}t^2} && (s=2,\ldots,n), \\ \frac{\mathrm{d}^2 y_h}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{2y_h}{1+y_h^2} \frac{\mathrm{d}y_h^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{4}{1+y_1^2} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}t} && (h=2,\ldots,n). \end{aligned} \tag{36}$$

Este ușor să se vadă că aceste ecuații păstrează forma printr-o schimbare de variabilă

$$y_i' = y_i, \qquad y_j' = -\frac{1}{y_j} \qquad (i = 1,\ldots,j-1,\ j+1,\ldots,n), \tag{37}$$

j avînd o valoare fixă oarecare.

Deci curbele definite de (36) sînt curbe invariante pe varietatea închisă definită de vecinătatea $V(y_1, \ldots, y_n)$ și vecinătățile definite de formulele (37). Cum această varietate este torul cu n dimensiuni, rezultă că (36) sînt pe tor geodezicele spațiului V_n cu conexiune constantă (4) sau (22).

Primită la redacție la 28 octombrie 1962

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОСТОЯННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

РЕЗЮМЕ

Показывается, что пространства V_n с постоянной связностью с метрикой

$$ds^2 = e^{2a_k x^k} c_{ij} dx^i dx^j,$$

где a_k, c_{ij} — постоянные, обладают некоторыми свойствами, сходными со свойствами пространств с постоянной отрицательной связностью.

Показывается, например, что в случае, когда вектор a_k не имеет нулевой длины, пространства вполне характеризуются их геодезическими.

Далее даются некоторые свойства „в целом" геодезических этих пространств и показывается, каким образом эти пространства могут быть построенными на цилиндре и на n-мерном торе.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF RIEMANNIAN SPACES WITH AFFINE CONSTANT CONNECTION

ABSTRACT

It is shown that the V_n spaces with constant connection having as metric

$$ds^2 = e^{2a_k x^k} c_{ij} dx^i dx^j,$$

(where a_k, c_{ij} are constant), have a number of properties which approach them to spaces with constant, negative curvature.

Thus it is shown that, if a_k is not a null vector, the corresponding spaces are completely characterized by their geodesics.

Some over all properties of the geodesics of these spaces are then given, and itis shown how such spaces can be constructed on a cylinder and on an n-dimensional torus.

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE

II. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE UNOR ECUAȚII SAU SISTEME DE ECUAȚII DE TIP PARABOLIC SAU HIPERBOLIC

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

Introducere. Obiectul lucrării de față este stabilirea de formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor ecuații sau sisteme de ecuații de tip parabolic sau hiperbolic, varietățile care poartă valorile soluțiilor deducîndu-se, la fel ca pentru cele de tip eliptic, din varietățile caracteristice ale ecuațiilor respective.

O mențiune specială trebuie făcută doar pentru ecuațiile de tip hiperbolic la care soluțiile sînt date pe o mulțime de puncte imaginare, valoarea medie obținută fiind totuși reală.

Rezultatele acestei lucrări arată că se poate trata unitar cele trei tipuri de ecuații cu derivate parțiale, modificînd adecvat domeniul în care soluțiile sînt date.

Lucrarea de față este o continuare a lucrărilor [1] și [3].

I. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE UNOR ECUAȚII SAU SISTEME DE ECUAȚII DE TIP PARABOLIC

1. În [1] am arătat că dacă $f(x, y, z)$ este analitică în stratul

$$(S) \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad a \leqslant z \leqslant b, \tag{1}$$

atunci avem următoarea relație :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2-v^2} f(x + \alpha hu, y + \beta hv, \quad z + h^2\gamma)\, \mathrm{d}v =$$

$$= f(x, y, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{k!}\left[\gamma \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]^{(k)} f(x, y, z) \tag{2}$$

din care am dedus

TEOREMA 1_1. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\gamma \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

în stratul definit de (1) *verifică următoarea formulă de medie*:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x + \alpha hu, y + \beta hv, z + \gamma h^2)\, dv \tag{4}$$

pentru orice punct $(x, y, z + \gamma h^2)$ *situat în domeniul de analiticitate* (1) α, β, γ, h fiind parametri oarecare.

În acest capitol ne propunem să folosim relaţia (2) pentru a stabili formule de medie pentru anumite ecuaţii sau sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic.

2. În (2) să presupunem că $f(x, y, z)$ este o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{1}{4}\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda^2 u = 0, \quad \lambda = \text{const.}, \tag{5}$$

ecuaţie pe care o vom numi *metacalorică* extinzînd o numire intrată în uz [2].

Ţinînd seamă că f verifică (5), (2) se transformă în

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(u + \alpha hu, y + \beta hv, z + h^2\gamma)\, dv =$$

$$= \left[1 - \frac{h^2\lambda^2}{1!} + \frac{h^4\lambda^4}{2!} - \cdots + (-1)^m \frac{h^{2m}\lambda^{2m}}{m!} + \cdots \right] f(x, y, z),$$

de unde deducem

TEOREMA 2_1. *Soluţiile analitice* $f(x, y, z)$ *ale ecuaţiei metacalorice*

$$\frac{1}{4}\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} = -\lambda^2 u$$

în stratul (1) *verifică următoarea formulă de medie*:

$$e^{-\lambda^2 h^2} f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x + \alpha hu, y + \beta hv, z + \gamma h^2)\, dv, \tag{6}$$

pentru orice punct $(x, y, z + \gamma h^2) \in S$, α, β, γ, h *fiind arbitrari.*

3. Să considerăm acum ecuaţia

$$\left(\frac{1}{4}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(m)} u = -\lambda^{2m} u. \tag{7}$$

Dacă $f(x, y, z)$ este o soluţie analitică în stratul (1) a ecuaţiei (7), obţinem din (2)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x + \alpha hu, y + \beta hv, z + h^2\gamma)\, dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{h^{2k}}{k!} - \frac{h^{2m+2k}\lambda^{2m}}{(m+k)!} + \cdots \right) \left(\frac{1}{4}\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right)^{(k)} f(x, y, z). \tag{8}$$

Dacă integrăm acum în (8) în raport cu h pentru $0 < h < \eta_p$, $p = 0,1, \ldots, m-1$, obținem sistemul

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta_p} \mathrm{d}(h^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2-v^2} f(x+\alpha hu,\ y+\beta hv,\ z+h^2\gamma)\,\mathrm{d}v =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda^{2k+2}}\left(\frac{\eta_p^{2k+2}\lambda^{2k+2}}{(k+1)!} - \frac{\eta_p^{2k+2m+2}\,\lambda^{2k+2m+2}}{(k+m+1)!} + \cdots\right)\left(\frac{1}{4}\,\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\,\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(k)} f, \qquad p = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m-1,$$

din care deducem

TEOREMA 3_1. *Soluțiile analitice $f(x, y, z)$ ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\left(\frac{1}{4}\,\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\,\beta^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^{(m)} u = -\,\lambda^{2m}\,u \tag{9}$$

în stratul (1), *verifică următoarea formulă de medie*:

$$f(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} Y_0 & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_0^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_0^2\lambda^2) \\ Y_1 & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_1^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_1^2\lambda^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_{m-1} & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_{m-1}^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_{m-1}^2\lambda^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda^2}\,a_1(\eta_0^2\lambda^2) & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_0^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_0^2\lambda^2) \\ \frac{1}{\lambda^2}\,a_1(\eta_1^2\lambda^2) & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_1^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_1^2\lambda^2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{\lambda^2}\,a_1(\eta_{m-1}^2\lambda^2) & \frac{1}{\lambda^4}\,a_2(\eta_{m-1}^2\lambda^2)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2m}}\,a_m(\eta_{m-1}^2\lambda^2) \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

unde am notat

$$Y_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta_k}\mathrm{d}(h^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2-v^2} f(x+\alpha hu,\ y+\beta hv,\ z+h^2\gamma)\,\mathrm{d}v, \tag{11}$$

$a_k(\eta^2\lambda^2)$ sînt cosinuși ai lui Paul Appell definiți fie de seriile

$$a_k(\eta_p^2\,\lambda^2) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{\eta_p^{2k+2ms}\,\lambda^{2k+2ms}}{(k+ms)!} \tag{12}$$

fie, în mod echivalent, prin intermediul exponențialelor, $e^{-\lambda^2\eta_p^2\varepsilon^k}$, $\varepsilon^{m+1}=1$, *de*

$$a_0(\eta_p^2\,\lambda^2) - \varepsilon^k a_1(\eta_p^2\,\lambda^2) + \ldots + \varepsilon^{mk}(-1)^m\, a_m(\eta_p^2\,\lambda^2) = e^{-\lambda^2\eta_p^2\varepsilon^k}, \tag{12'}$$

cu $k = 0,1, \ldots, m$; $p = 0,1, \ldots, m-1$.

4. Să considerăm acum sistemul

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda v,\\ &\frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z} = \mu u, \qquad \lambda\mu > 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Folosind pe (2), unde înlocuim pe h^2 cu $h > 0$, obținem dacă $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ este un sistem de soluții al lui (13)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x+\sqrt{h}\,\alpha u, y+\sqrt{h}\,\beta v, z+\gamma h)\, dv =$$

$$= \left[1 + \frac{\lambda\mu h^2}{2!} + \frac{\lambda^2\mu^2 h^4}{4!} + \ldots + \frac{\lambda^m\mu^m h^{2m}}{(2m)!} + \ldots\right] f(x, y, z) + \tag{14}$$

$$+ \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\left[\frac{h\sqrt{\lambda\mu}}{1!} + \frac{h^3(\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}{3!} + \ldots + \frac{(\lambda\mu)^{\frac{2m+1}{2}} h^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots\right] g(x, y, z)$$

și

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+\sqrt{h}\,\alpha u, y+\sqrt{h}\,\beta v, z+\gamma h)\, dv =$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda\mu h^2}{2!} + \frac{\lambda^2\mu^2 h^4}{4!} + \ldots + \frac{\lambda^m\mu^m h^{2m}}{(2m)!} + \ldots\right) g(x, y, z) + \tag{14'}$$

$$+ \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\left(\frac{h\sqrt{\lambda\mu}}{1!} + \frac{h^3(\lambda\mu)^{\frac{3}{2}}}{3!} + \ldots + \frac{(\lambda\mu)^{\frac{2m+1}{2}} h^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots\right) f(x, y, z)$$

care ne conduce la sistemul

$$\begin{aligned} Y(f) &= \operatorname{ch}(h\sqrt{\lambda\mu})\, f(x, y, z) + \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda\mu})\, g(x, y, z),\\ Y(g) &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\operatorname{sh}(h\sqrt{\lambda\mu})\, f(x, y, z) + \operatorname{ch}(h\sqrt{\lambda\mu})\, g(x, y, z), \end{aligned} \tag{14''}$$

unde am notat cu $Y(.)$ operatorul integral din partea întîi din (14) sau (14'). Determinantul sistemului (14'') este

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\,(h\sqrt{\lambda\mu}) & \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\operatorname{sh}\,(h\sqrt{\lambda\mu}) \\ \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\operatorname{sh}\,(h\sqrt{\lambda\mu}) & \operatorname{ch}\,(h\sqrt{\lambda\mu}) \end{vmatrix} = 1,$$

deci putem determina totdeauna pe f și g prin intermediul lui $Y(f)$ și $Y(g)$, realizînd astfel o formulă de medie pentru soluțiile f și g, ceea ce ne permite să formulăm

TEOREMA 4_1. *Soluțiile analitice ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} &= \lambda v \\ \frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z} &= \mu u \end{aligned} \tag{15}$$

în stratul (1) *verifică următoarea formulă de medie*:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,f(x,y,z) &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\operatorname{ch}\,(h\sqrt{\lambda\mu})\,Y(f) - \operatorname{sh}\,(h\sqrt{\lambda\mu})\,Y(g), \\ \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,g(x,y,z) &= \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\operatorname{ch}\,(h\sqrt{\lambda\mu})\,Y(g) - \operatorname{sh}\,(h\sqrt{\lambda\mu})\,Y(f) \end{aligned} \tag{16}$$

pentru orice punct $(x, y, z + \gamma h)$ *situat în* (1), α, β, γ, h, λ, μ $(\lambda\mu > 0)$ *fiind parametri arbitrari.* $Y(\cdot)$ *este operatorul integral din partea întîi din relațiile* (14) *sau* (14').

5. Fie acum sistemul de n ecuații cu n funcții necunoscute:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \lambda_2 u_2, \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial u_2}{\partial z} = \lambda_3 u_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \lambda_n u_n, \\ &\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial u_n}{\partial z} = \lambda_1 u_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ este un sistem de soluții, avem folosind pe (2)

$$Y(f_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f_k(x + 2\sqrt{h}u,\ y + 2\sqrt{h}\,v,\ z + h)\,dv =$$

$$= f_k(x, y, z) + \frac{h}{1!}\lambda_{k+1} f_{k+1}(x, y, z) + \frac{h^2}{2!}\lambda_{k+1}\lambda_{k+2} f_{k+2}(x,y,z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-k}}{(n-k)!}\lambda_{k+1}\ldots\lambda_n f_n(x, y, z) + \frac{h^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\lambda_{k+1}\ldots\lambda_n\lambda_1 f_1(x, y, z) + \ldots \tag{18}$$

$$\ldots + \frac{h^n}{n!}\lambda_{k+1}\ldots\lambda_n\lambda_1\ldots\lambda_k f_k(x, y, z) = \left[1 + \frac{h^n\lambda^n}{n!} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^{2n}\lambda^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] f_k(x, y, z) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda}\left(\frac{h\lambda}{1!} + \frac{h^{n+1}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right) f_{k+1}(x,y,z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\lambda_{k+1}\ldots\lambda_n\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\lambda^{n-1}}\left[\frac{h^{n-1}\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{h^{2n-1}\lambda^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right] f_{k-1}(x,\ y,\ z)$$

și unde am pus $\lambda^n = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. Deoarece coeficientul lui f_{k+p} este $a_p(h\lambda)$, unde $a_p(h\lambda)$, $p = 0,1,\ldots, n-1$, sînt cosinușii lui Paul Appell, definiți de

$$a_0(\lambda h) + \varepsilon^p a_1(\lambda h) + \ldots + \varepsilon^{(n-1)p} a_{n-1}(\lambda h) = e^{h\lambda\varepsilon^p},\ p = 0,1,\ \ldots,\ n-1,$$

iar ε este o rădăcină n a unității deci $\varepsilon^n = 1$, determinantul sistemului (18) în necunoscutele f_k este egal cu unitatea. Într-adevăr, dacă considerăm determinantul circulant cu elementele $a_i(\lambda h)$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{vmatrix} \tag{19}$$

care are valoarea

$$\prod_{p=0}^{n-1}(a_0 + \varepsilon^p a_1 + \ldots + \varepsilon^{(n-1)p} a_{n-1}) = \exp\left(\sum_{p=0}^{n-1} h\ \lambda\ \varepsilon^p\right) = 1,$$

se observă că și determinantul sistemului (18) are o descompunere în produs de aceiași factori iar coeficientul lui a_0^n, de exemplu, este același.

Să mai observăm că dacă dezvoltăm determinantul (19) după coloana întîi,

$$a_0A_0 + a_{n-1}A_1 + \ldots + a_1A_{n-1} = 1,$$

determinantul circulant al funcțiilor A_k este de asemenea egal cu unitatea și avem în plus

$$A_k' = -A_{k-1},\ A_k^{(p)} = (-1)^p A_{k-p} \qquad (\text{mod } n),$$

de unde deducem imediat că

$$A_k(\lambda h) = a_k(-\lambda h).$$

Ținînd seama acum de legătura dintre determinantul sistemului (18) și determinantul (19) putem enunța

TEOREMA 5_1. *Soluțiile analitice* $f_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = \lambda_2 u_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z} = \lambda_n u_n,\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial u_n}{\partial z} = \lambda_1 u_1,
\end{aligned} \tag{20}$$

în stratul (1), *verifică următoarea formulă de medie*:

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= a_0(-\lambda h) Y(f_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda} a_1(-\lambda h)\, Y(f_2) + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda^2} a_2(-\lambda h) Y(f_3) +\\
&+ \cdots + \frac{\lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n}{\lambda^{n-1}} a_{n-1}(-\lambda h) Y(f_n),\\
f_2(x, y, z) &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 \ldots \lambda_n}{\lambda^{n-1}} a_{n-1}(-\lambda h)\, Y(f_1) + a_0(-\lambda h)\, Y(f_2) +\\
&+ \frac{\lambda_1}{\lambda} a_1(-\lambda h)\, Y(f_3) + \ldots + \frac{\lambda_3 \lambda_4 \ldots \lambda_n}{\lambda^{n-1}} a_{n-2}(-\lambda h) Y(f_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_n(x, y, z) &= \frac{\lambda_1}{\lambda} a_1(-\lambda h) Y(f_1) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda^2} a_2(-\lambda h) Y(f_2) +\\
&+ \ldots + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}}{\lambda^{n-1}} a_{n-1}(-\lambda h) Y(f_{n-1}) + a_0(-\lambda h) Y(f_n),
\end{aligned} \tag{21}$$

unde am pus $\lambda^n = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$, λ_i *fiind* n *numere reale oarecare, iar* h *astfel luat încît* $(x, y, z + h) \in$ *domeniului de analiticitate* (1).

6. Dacă considerăm acum ecuația

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{4}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \gamma \frac{\partial}{\partial y^2}\right]^{(n)} u &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k \left[\frac{1}{4}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) +\right.\\
&\left. + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right]^{(k)} u,\ b_k = \text{const.},
\end{aligned} \tag{22}$$

și $f(x, y, z)$ o soluție analitică în banda (1), aplicîndu-i (2) obținem, ținînd seamă de (22),

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x + \alpha h u, y + \beta h v, z + h^2\gamma)\, dv = \tag{23}$$

$$= c_0(h) f(x, y, z) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k(h) \left[\frac{1}{4}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right]^{(k)} f(x, y, z),$$

relație căreia dacă îi aplicăm procedeul de la 3 sîntem conduși la o formulă de medie pentru soluțiile $f(x, y, z)$. Coeficienții $c_k(h)$ se obțin prin intermediul unor formule de recurență.

7. Toate rezultatele de mai sus se transmit și la ecuația

$$E(u) \equiv \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + \ldots + \alpha_m \frac{\partial u}{\partial y_m} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{P} \left(\beta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_{i1}} + \beta_{i2} \frac{\partial}{\partial x_{i2}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \beta_{i_{s_i}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{s_i}}} \right)^{(2)} u \tag{24}$$

deoarece am arătat în [1] că avem următoarea formulă integrală :

$$\frac{1}{\pi^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega\infty} e^{-u_1^2 - v_2^2 - \cdots - u_p^2} f(y + \alpha h^2, x_{s1} + \beta_1 u_1 h, \ldots, x_{sp} + \beta_p u_p h)\, du_1\, du_2 \ldots du_p =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{2k}}{k!} E^{(k)}(f),$$

unde s-a pus :

$$y + \alpha h^2 \text{ pentru } y_1 + \alpha_1 h^2,\ y_2 + \alpha_2 h^2, \ldots, y_m + \alpha_m h^2,$$

$x_{sk} + \beta_k u_k h$ pentru $x_{k1} + \beta_{k1} u_k h,\ x_{k2} + \beta_{k2} u_k h, \ldots, x_{ksk} + \beta_{ksk} u_k h$, Ω_∞ fiind domeniul definit de $-\infty < x_{ki} < +\infty$, funcția f fiind analitică în stratul definit de $a_j \leqslant y_j \leqslant b_j$, $-\infty < x_{ki} < +\infty$.

8. În toate formulele de medie de mai sus operatorul diferențial de ordinul doi era de tip eliptic. Ținînd seamă de rezultate ce le vom detalia în capitolul următor, avem și următoarea formulă integrală :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-v^2} f(x + \alpha h u, y + i\beta h v, z + h^2\gamma)\, dv =$$

$$= f(x y, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{k!} \left[\gamma \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]^{(k)} f(x, y, z),$$

ceea ce permite să extindem toate teoremele acestui capitol la soluțiile analitice ale ecuațiilor în care ecuația diferențială (3) se înlocuiește cu

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\gamma \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

În ceea ce privește domeniul de analiticitate al lui f se va ține seama de observația de la teorema 1_2.

II. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE UNOR ECUAȚII SAU SISTEME DE ECUAȚII DE TIP HIPERBOLIC

1. Să considerăm integrala

$$\mathcal{J}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} f(x + a \operatorname{ch} t,\ y + a \operatorname{sh} t)\, dt, \tag{1}$$

care este o integrală de funcții reale, de argumente reale pe o mulțime de puncte situată pe axa imaginară a planului complex, sau, cum se poate verifica imediat, pe *o mulțime de puncte imaginare situate pe hiperbola reală*

$$(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2 = a^2$$

cu centrul în punctul (x, y). Cu substituția $t = i\theta$, $i = \sqrt{-1}$, integrala (1), se transformă în

$$\mathcal{J}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + a \cos\theta,\ y + ia \sin\theta)\, d\theta. \tag{1'}$$

Să presupunem că f este analitică; putem deci scrie

$$f(x + a \operatorname{ch} t, y + a \operatorname{sh} t) = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left[\operatorname{ch} t \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sh} t \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(n)} f(x, y) =$$

$$= f(x, y) + \sum_{\alpha+\beta=n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\alpha!\,\beta!} \operatorname{ch}^\alpha t \operatorname{sh}^\beta t \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}. \tag{2}$$

Dacă înlocuim pe (2) în (1) și integrăm, coeficientul $A_{\alpha,\beta}$ al lui $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ este dat de

$$A_{\alpha,\beta} = \frac{a^n}{\alpha!\,\beta!} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} \operatorname{ch}^\alpha t \operatorname{sh}^\beta t\, dt = \frac{a^n}{\alpha!\,\beta!} \cdot \frac{i^\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta\, d\theta, \tag{3}$$

însă integrala din partea a doua este nulă dacă cel puțin unul din numerele α sau β este impar și pentru α și β par are valoarea

$$2 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2}{2}\right)} = \frac{(\alpha-1)!!\ (\beta-1)!!}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)!\, 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \cdot 2\pi,$$

deci

$$A_{2\alpha,2\beta} = (-1)^{\beta} \frac{a^{2(\alpha+\beta)}}{(2\alpha)!(2\beta)!} \cdot \frac{(2\alpha-1)!!(2\beta-1)!!}{(\alpha+\beta)!\,2^{\alpha+\beta}} =$$

$$= (-1)^{\beta} \frac{a^{2(\alpha+\beta)}}{\alpha!\,\beta!\,(\alpha+\beta)!} \cdot \frac{1}{2^{2(\alpha+\beta)}} \tag{3'}$$

și

$$\sum_{\alpha+\beta=n} A_{2\alpha,2\beta} \frac{\partial^{2(\alpha+\beta)} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} = \frac{a^{2(\alpha+\beta)}}{2^{2(\alpha+\beta)}} \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{\beta} \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,(\alpha+\beta)!} \frac{\partial^{2(\alpha+\beta)} f}{\partial x^{2\alpha} \partial y^{2\beta}} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+\beta)!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2(\alpha+\beta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(\alpha+\beta)} f(x, y),$$

încît (1) se transformă în

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} f(x + a \operatorname{ch} t,\ y + a \operatorname{sh} t)\, dt = f(x, y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) \tag{4}$$

care ne îngăduie să enunțăm

TEOREMA 1_2. *Soluțiile analitice ale ecuației coardei vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

verifică următoarea formulă de medie :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi i} f(x + a \operatorname{ch} t,\ y + a \operatorname{sh} t)\, dt. \tag{6}$$

Observație. În enunțul de mai sus nu este precizat domeniul de analiticitate al funcției $f(x, y)$. În (4), în partea întîi sub semnul integral este o funcție reală însă integrarea se face pe axa imaginară *ot*.

Dacă considerăm funcția reală $f(x, y)$ ca urma unei funcții de două variabile complexe, z_1, z_2, atunci funcția $f(z_1, z_2)$ trebuie să fie olomorfă conform lui (1′) în raport cu z_1, într-un domeniu al planului z_1 care conține segmentul axei reale $z_1 = x + a \cos \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, iar în raport cu z_2 într-un domeniu al planului z_2 care conține segmentul paralel cu axa imaginară

$$z_2 = y + ia \sin \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad (y \text{ real}).$$

2. Fie acum o reprezentare parametrică a suprafeței

$$y^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 = a^2 \tag{7}$$

dată de

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1} \operatorname{sh}\varphi,\\
\xi_2 &= a \cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1} \operatorname{sh}\varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= a \cos\theta_{n-1} \operatorname{sh}\varphi,\\
\eta &= a \operatorname{ch}\varphi,
\end{aligned} \tag{7'}$$

și să considerăm integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_1, x_2 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_2, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, \mathrm{d}S_{n+1}, \tag{8}$$

unde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\bar{\xi}_k$, $\bar{\eta}$ se obțin din (7′) înlocuind pe $\operatorname{sh}\varphi$, $\operatorname{ch}\varphi$ cu $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, S_{n+1} și $\mathrm{d}S_{n+1}$ fiind respectiv aria și elementul de arie al sferei din spațiul cu $n+1$ dimensiuni, de rază unitatea. Integrala (7) poate fi transformată într-o integrală de funcții reale luată pe o mulțime de puncte imaginare situate pe suprafața (7), anume unde θ_k sînt reali iar φ se înlocuiește cu $\mathrm{i}\varphi$, deci pur imaginar, θ_k și $|\varphi|$ avînd aceeași variație ca în (8) pentru a parcurge S_{n+1}. În ipoteza că f este analitică, putem scrie

$$\begin{aligned}
f(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y + \eta) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) +\\
+ \sum_1^\infty \frac{1}{p!} \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \right) & f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).
\end{aligned} \tag{9}$$

Dacă $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta}$ este coeficientul lui $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y^\beta}$ din (8), el este dat de

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta} = \frac{(\mathrm{i})^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \cdot a^{2p}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!\, \beta} \cdot \frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} \bar{\xi}_1^{\alpha_1} \bar{\xi}_2^{\alpha_2} \ldots \bar{\xi}_n^{\alpha_n} \bar{\eta}^\beta \, \mathrm{d}S_{n+1},$$

însă integrala din partea a doua este diferită de zero numai pentru toți α_i și β pari, cînd are valoarea

$$\frac{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_n!\, \beta!\, a^{2p}}{2^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta - 1} \left(\frac{\alpha_1}{2}\right)! \ldots \left(\frac{\alpha_n}{2}\right)! \left(\frac{\beta}{2}\right)!} \cdot \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta + n + 1}{2}\right)}$$

și cum

$$S_{n+1} = \frac{2\, \pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

urmează că

$$A_{2\alpha_1,\ldots,2\alpha_n,2\beta} = \frac{a^{2p}}{2^p\,(n+1)\,(n+3)\ldots(n+2p-1)} \cdot \frac{(-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\alpha_1!\;\alpha_2!\ldots\alpha_n!\;\beta!}$$

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\beta=p),$$

ceea ce ne permite să scriem următoarea relaţie :

$$\frac{1}{S_{n+1}}\int_{S_{n+1}} f(x_1+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_1,\, x_2+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_2,\ldots,x_n+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_n,\, y+\bar{\eta})\,\mathrm{d}S_{n+1} = \tag{10}$$

$$= f(x_1,\, x_2,\ldots,x_n,\, y) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a^{2p}}{p\,!\,2^p\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+2p-1)} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{(p)} f$$

din care deducem

TEOREMA 2_2. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \tag{11}$$

verifică următoarea formulă de medie :

$$f(x_1,\ldots,x_n,\,y) = \frac{1}{S_{n+1}}\int_{S_{n+1}} f(x_1+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_1,\ldots,x_n+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y+\bar{\eta})\,\mathrm{d}S_{n+1}, \mathrm{i}=\sqrt{-1}, \tag{12}$$

unde S_{n+1} *şi* $\mathrm{d}S_{n+1}$ *sînt respectiv aria şi elementul de arie al sferei din spaţiul cu* $n+1$ *dimensiuni, iar* $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}$ *coordonatele unui punct de pe* S_{n+1}.

În ceea ce priveşte domeniul de analiticitate al lui f se deduce în mod asemănător ca la aliniatul precedent.

3. În (10) înainte de a împărţi cu S_{n+1} să integrăm în raport cu a; avem

$$\frac{1}{V_{n+1}(R) - V_{n+1}(r)}\int_r^R \mathrm{d}a \int_{S_{n+1}(a)} f(x_1+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_1,\, x_2+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_2,\ldots,x_n+$$

$$+\mathrm{i}\,\bar{\xi}_n,\, y+\bar{\eta})\,\mathrm{d}S_{n+1} = f(x_1,\, x_2,\ldots,x_n,\, y) + \tag{13}$$

$$+\frac{1}{R^{n+1}\,r^{n+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R^{2p+n+1} - r^{2p+n+1}}{2^p\,p\,!\,(n+3)\,(n+5)\ldots(n+2p+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{(p)} f,$$

unde de astă dată $V_{n+1}(a)$ și dS_{n+1} sînt respectiv volumul și elementul de arie al unei sfere din spațiul cu $n+1$ dimensiuni de rază a, iar domeniul de integrare $S_{n+1}(a)$ este frontiera lui $V_{n+1}(a)$. Avem așadar

TEOREMA 3_2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{1}{V_{n+1}(R) - V_{n+1}(r)} \times \times \int_r^R da \int_{S_{n+1}(a)} f(x_1 + i\,\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + i\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, dS_{n+1}. \tag{14}$$

Observații. *a*) Se poate înlocui da cu $\varphi(a)da$, cu condiția ca $a^n \varphi(a)$ să fie integrabilă pe intervalul (r, R). În această situație, integrala (14) se va împărți cu

$$\int_{S_{n+1}} a^n \varphi(a(\, da.$$

b) Am evitat să integrăm în (14) de la 0 la R, deoarece în această situație punctul $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ aparținea domeniului de integrare și (14) nu ar mai fi servit pentru determinarea valorii lui f într-un punct cînd sînt date valorile lui f într-un domeniu care — bineînțeles — nu trebuie să conțină punctul respectiv.

4. În (10) să presupunem că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este o soluție analitică a ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u, \quad \lambda = \text{const.}; \tag{15}$$

atunci relația (10) se transformă în

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + i\,\bar{\xi}_1, x_2 + i\,\bar{\xi}_2, \ldots, x_n + i\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, dS_{n+1} = \tag{16}$$

$$= \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{(a\lambda)^{2p}}{p!\, 2^p\, (n+1)(n+3)\ldots(n+2p-1)}\right] f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

și dacă ținem seamă că funcția lui Bessel $J_{\frac{n-1}{2}}$ are dezvoltarea

$$J_{\frac{n-1}{2}}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\, \Gamma\left(\frac{n+2p+1}{2}\right)} \cdot \frac{z^{2p}}{2^{2p}},$$

deci pentru $n = 2m$

$$J_{m-\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{m-\frac{1}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\, 2^{m+p}}{p\,!\,(2m+2p-1)\,!\,!} \cdot \frac{z^{2p}}{2^{2p}}$$

iar pentru $n = 2m + 1$

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p\,!\,(m+p)\,!} \cdot \frac{z^{2p}}{2^{2p}},$$

putem enunța

TEOREMA 4_2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u$$

verifică următoarea formulă de medie: pentru $n = 2m$

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, \mathrm{d}S_{n+1} =$$

$$= \frac{(2m-1)\,!\,!}{(a\lambda)^{m-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, J_{m-\frac{1}{2}}(a\lambda)\, f(x_1, \ldots, x_n, y), \quad (17)$$

iar pentru $n = 2m + 1$

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, \mathrm{d}S_{n+1} =$$

$$= \frac{m\,!\,2^m}{(a\lambda)^m} J_m(a\lambda)\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y), \quad (17')$$

unde J_α *este funcția lui Bessel de speța întîi și ordinul* α.

În particular, soluțiile analitice ale ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda^2 u$$

verifică următoarea formulă de medie ($m = 0$):

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi\mathrm{i}} f(x + a\ \mathrm{sh}\ t,\ y + a\ \mathrm{ch}\ t)\, \mathrm{d}t = J_0(a\lambda)\, f(x, y), \quad (18)$$

unde $J_0(a\lambda)$ este funcția lui Bessel de speța întîi și ordinul zero.

5. Să presupunem că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este o soluție analitică a ecuației (15) și să folosim de astă dată formula (13); avem

$$\frac{1}{V_{n+1}(R) - V_{n+1}(r)} \int_r^R \mathrm{d}a \int_{S_{n+1}(a)} f(x_1 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, \mathrm{d}S_{n+1} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{R^{n+1} - r^{n+1}} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\, (R\lambda)^{2p}}{2^p\, p\,!\,(n+3)(n+5)\ldots(n+2p+1)}\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) -$$

$$- \frac{r^{n+1}}{R^{n+1} - r^{n+1}} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\, (r\lambda)^{2p}}{2^p\, p\,!\,(n+3)(n+5)\ldots(n+2p+1)}\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \quad (19)$$

și dacă ținem seamă de rezultatele aliniatului 4 putem enunța

TEOREMA 5_2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda^2 u$$

verifică următoarea formulă de medie: pentru $n=2m+1$

$$\frac{1}{V_{n+1}(R)-V_{n+1}(r)}\int_r^R da\int_{S_{n+1}(a)} f(x_1+i\bar{\xi}_1,\ldots,x_n+i\,\bar{\xi}_n,y+\bar{\eta})\,dS_{n+1}= \tag{20}$$

$$=\frac{2^{m+1}}{\lambda^{m+1}}\cdot\frac{(m+1)!}{R^{2m+2}-r^{2m+2}}\left[R^{m+1}J_{m+1}(\lambda R)-r^{m+1}J_{m+1}(\lambda r)\right]f(x_1,\ldots,x_n,y)$$

iar pentru $n=2m$

$$\frac{1}{V_{n+1}(R)-V_{n+1}(r)}\int_r^R da\int_{S_{n+1}(a)} f(x_1+i\,\bar{\xi}_1,\ldots,x_n+i\,\bar{\xi}_n,\ y+\bar{\eta})\,dS_{n+1}= \tag{20'}$$

$$=\frac{(2m+1)!!}{R^{2m+1}-r^{2m+1}}\cdot\frac{1}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[R^{m+\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(R\lambda)-r^{m+\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(r\lambda)\right]\times$$

$$\times f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y),$$

unde am notat $J_\alpha(\lambda R)$ funcția lui Bessel de speța întîi și ordinul α.

6. Să presupunem acum că $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ este o soluție a ecuației

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1}-\frac{\partial^2}{\partial x_2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n}\right)^{(p)}u=-\lambda^{2p}u. \tag{21}$$

Înlocuind în (10) obținem

$$\frac{1}{S_{n+1}}\int_{S_{n+1}(a)} f(x_1+i\bar{\xi}_1,x_2+i\bar{\xi}_2,\ldots,x_n+i\,\bar{\xi}_n,y+\bar{\eta})\,dS_{n+1}=$$

$$=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda a)^{2pk}}{(pk)!\,2^{pk}(n+1)\ldots(n+2pk-1)}\right]f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)+$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda a)^{2pk+2}}{(pk+1)!\,2^{pk+1}(n+1)(n+3)\ldots(n+2pk+1)}\right]\times \tag{22}$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)f+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{\lambda^{2p-2}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda a)^{2pk+2p-2}}{(pk+p-1)!\,2^{pk+p-1}(n+1)\ldots(n+2pk+2p-3)}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{(p-1)}f.$$

Dacă înainte de a împărți cu $S_{n+1}(a)$ integrăm în raport cu a de la r la R, obținem

$$\frac{1}{V_{n+1}(R)-V_{n+1}(r)}\int_r^R da\int_{S_{n+1}(a)} f(x_1+i\bar{\xi}_1,\ldots,x_n+i\bar{\xi}_n,y+\bar{\eta})\,dS_{n+1}=$$

$$=\sum_{h=0}^{p-1}\frac{1}{\lambda^{2h}}\beta_h(r,R,\lambda)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{(h)}f, \tag{23}$$

în care dacă înlocuim pe r cu $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$, obținem un sistem de p ecuații încît putem enunța

TEOREMA 6_2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}-\ldots-\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)^{(p)}u=-\lambda^{2p}u$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} Y(f,r_0) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_0,R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_0,R,\lambda)\\ Y(f,r_1) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_1,R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_1,R,\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ Y(f,r_{p-1}) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_{p-1},R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_{p-1},R,\lambda)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_0(r_0,R,\lambda) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_0,R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_0,R,\lambda)\\ \beta_0(r_1,R,\lambda) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_1,R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_1,R,\lambda)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \beta_0(r_{p-1},R,\lambda) & \frac{1}{\lambda^2}\beta_1(r_{p-1},R,\lambda)\ldots & \frac{1}{\lambda^{2p-2}}\beta_{p-1}(r_{p-1},R,\lambda)\end{vmatrix}}$$

unde am notat $Y(f,r)$ *operatorul integral din partea întîi din* (23) *iar cu*

$$\beta_h(r,R,\lambda)=\frac{R^{n+1}}{R^{n+1}-r^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda R)^{2pk+2h}}{(pk)!\,2^{pk}(n+3)(n+5)\ldots(n+2pk+2h+1)}- \tag{23'}$$

$$-\frac{r^{n+1}}{R^{n+1}-r^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\lambda r)^{2pk+2h}}{(pk)!\,2^{pk}(n+3)(n+5)\ldots(n+2pk+2h+1)}.$$

Funcțiile β_h se exprimă destul de simplu cu ajutorul funcțiilor lui Bessel prin intermediul sistemului următor: pentru $n = 2m + 1$

$$\beta_0 - \varepsilon_i \beta_1 + \varepsilon_i^2 \beta_2 - \ldots + (-1)^{p-1} \varepsilon_i^{p-1} \beta_{p-1} =$$

$$= \frac{2^{m+1}(m+1)!}{R^{2m+2} - r^{2m+2}} \cdot \frac{1}{\lambda^{m+1}} [R^{m+1} J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon_i}\, \lambda R) - r^{m+1} J_{m+1}(\sqrt{\varepsilon_i}\, \lambda r)], \tag{24}$$

iar pentru $n = 2m$

$$\beta_0 - \varepsilon_i \beta_1 + \varepsilon_i^2 \beta_2 - \ldots + (-1)^{p-1} \varepsilon_i^{p-1} \beta_{p-1} =$$

$$= \frac{(2m+1)!!}{R^{2m+1} - r^{2m+1}} \cdot \frac{1}{\lambda^{m+\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} [R^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{\varepsilon_i}\, \lambda R) - r^{m+\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(\sqrt{\varepsilon_i}\, \lambda r)], \tag{24'}$$

cu $i = 0,1,\ldots,p-1$, iar $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ cele p rădăcini ale ecuației $\varepsilon^p = 1$.

7. Să considerăm acum sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} &= \lambda v \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} &= \mu u \end{aligned} \tag{25}$$

și f, g două soluții analitice ale sistemului; înlocuind pe f în (16) obținem

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + i\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + i\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, dS_{n+1} =$$

$$= \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^p a^{4p}}{(2p)!\, 2^{2p} (n+1)(n+3)\ldots(n+4p-1)}\right] f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) + \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{\mu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^{p+1} a^{4p+2}}{(2p+1)!\, 2^{2p+1} (n+1)(n+3)\ldots(n+4p+1)} g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

și

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} g(x_1 + i\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + i\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta})\, dS_{n+1} =$$

$$= \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^p a^{4p}}{(2p)!\, 2^{2p} (n+1)(n+3)\ldots(n+4p-1)}\right] g(x_1, \ldots, x_n, y) + \tag{26'}$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^{p+1} a^{4p+2}}{(2p+1)!\, 2^{2p+1} (n+1)(n+3)\ldots(n+4p+1)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

care ne permite să enunțăm

TEOREMA 7_2. *Soluțiile analitice ale sistemului*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \lambda v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} = \mu u$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{\alpha_0(a\sqrt[4]{\lambda\mu})\, Y(u) - \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,\alpha_1(a\sqrt[4]{\lambda\mu})\, Y(v)}{\alpha_0^2(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) - \alpha_1^2(a\sqrt[4]{\lambda\mu})},$$

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{\alpha_0(a\sqrt[4]{\lambda\mu})\, Y(v) - \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\alpha_1(a\sqrt[4]{\lambda\mu})\, Y(u)}{\alpha_0^2(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) - \alpha_1^2(a\sqrt[4]{\lambda\mu})}, \tag{27}$$

unde am pus

$$\alpha_0(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^p\, a^{4p}}{(2p)!\, 2^{2p}(n+1)(n+3)\ldots(n+4p-1)},$$

$$\sqrt{\lambda\mu}\,\alpha_1(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^{p+1}\, a^{4p+2}}{(2p+1)!\, 2^{2p+1}(n+1)(n+3)\ldots(n+4p+1)}$$

iar operatorul integral $Y(\cdot)$ *este operatorul integral din partea întîi din* (26) *sau* (26′).

Să observăm că pentru $n = 1$, $\lambda = -\lambda$, $\mu = \mu$, funcțiile α_0 și α_1 sînt funcțiile lui W. Thomson și anume:

$$\alpha_0(a\sqrt[4]{-\lambda\mu}) = \operatorname{ber}(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,(a\sqrt[4]{\lambda\mu})^{4p}}{2^{4p}(2p)!\,(2p)!},$$

$$\alpha_1(a\sqrt[4]{-\lambda\mu}) = \mathrm{i}\operatorname{bei}(a\sqrt[4]{\lambda\mu}) = \mathrm{i}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\,(a\sqrt[4]{\lambda\mu})^{4p+2}}{2^{4p+2}(2p+1)!\,(2p+1)!},$$

încît obținem ca un caz particular

TEOREMA $7_2'$. *Soluțiile analitice ale sistemului*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u = 0, \tag{28}$$

verifică următoarea formulă de medie :

$$u(x, y) = \frac{\text{ber}(a)\, Y(u) + \text{bei}(a)\, Y(v)}{\text{ber}^2(a) + \text{bei}^2(a)},$$
$$v(x, y) = \frac{\text{ber}(a)\, Y(v) - \text{bei}(a)\, Y(u)}{\text{ber}^2(a) + \text{bei}^2(a)}. \tag{29}$$

8. Fie sistemul de m ecuații cu m funcții necunoscute :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2} = \lambda_2 u_2 \\
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_n^2} = \lambda_3 u_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_n^2} = \lambda_m u_m \\
&\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n^2} = \lambda_1 u_1 .
\end{aligned} \tag{30}$$

Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ este un sistem de soluții, avem, folosind pe (10),

$$\frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f_k(x_1 + \mathrm{i}\,\overline{\xi}_1,\ x_2 + \mathrm{i}\,\overline{\xi}_2, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\overline{\xi}_n,\ y + \overline{\eta})\, \mathrm{d}S_{n+1} =$$

$$= f_k(x_1, \ldots, x_n, y) + \frac{a^2 \lambda_{k+1}}{1!\,2\,(n+1)} f_{k+1}(x_1, \ldots, x_n, y) +$$

$$+ \frac{a^4 \lambda_{k+1} \lambda_{k+2}}{2!\,2^2 (n+1)(n+3)} f_{k+2}(x_1, \ldots, x_n, y) + \ldots \tag{31}$$

$$\ldots + \frac{a^{2(m-k)} \lambda_{k+1} \lambda_{k+2} \ldots \lambda_m}{(m-k)!\,2^{m-k}(n+1)(n+3)\ldots(n+2m-2k-1)} f_m(x_1, \ldots, x_n, y) +$$

$$+ \frac{a^{2(m-k+1)} \lambda_{k+1} \lambda_{k+2} \ldots \lambda_m \lambda_1}{(m-k+1)!\,2^{m-k+1}(n+1)(n+3)\ldots(n+2m-2k+1)} f_1(x_1, \ldots, y) + \ldots$$

sau

$$Y(f_k) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2mh} \lambda^{mh}}{(mh)!\,2^{mh}(n+1)(n+3)\ldots(n+2mh-1)} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) +$$

$$+ \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2mh+2} \lambda^{mh+1}}{(mh+1)!\,2^{mh+1}(n+1)(n+3)\ldots(n+2mh+1)} f_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\lambda_{k+1} \lambda_{k+2} \ldots \lambda_m \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\lambda^{m-1}} \times \tag{31'}$$

$$\times \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2mh+2m-2} \lambda^{mh+m-1}}{(mh+m-1)!\,2^{mh+m-1}(n+1)(n+3)\ldots(n+2mh+2m-3)} f_{k-1},$$

unde am pus $\lambda^m = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m$. Dacă notăm cu

$$\gamma_k(a\sqrt{\lambda}) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a^{2mh+2k}\lambda^{mh+k}}{(mh+k)!\,2^{mh+k}(n+1)(n+3)\ldots(n+2mh+2k-1)}, \qquad (32)$$

$$k = 0,1,\ldots,m-1,$$

determinantul sistemului (31) este egal cu determinantul circulant al funcțiilor $\gamma_k(a\sqrt{\lambda})$ după cum am arătat la capitolul I, paragraful **5**, deci valoarea sa este

$$\prod_{p=0}^{m-1}(\gamma_0 + \varepsilon_p\gamma_1 + \ldots + \varepsilon_p^{m-1}\gamma_{m-1}),\quad \varepsilon_p^m = 1.$$

Avem însă și

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(a^2\lambda)^h}{h!\,2^h(n+1)(n+3)\ldots(n+2h-1)},$$

$$\gamma_0 + \varepsilon_p\gamma_1 + \ldots + \varepsilon_p^{m-1}\gamma_{m-1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(a^2\varepsilon_p\lambda)^h}{h!\,2^h(n+1)(n+3)\ldots(n+2h-1)}$$

și se vede imediat că aceste sume se exprimă cu ajutorul funcțiilor lui Bessel de argument imaginar. Într-adevăr, avem pentru $n = 2s+1$

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-1} = \frac{2^s s!}{(a\sqrt{-\lambda})^s} J_s(a\sqrt{-\lambda}),$$

$$\gamma_0 + \varepsilon_p\gamma_1 + \ldots + \varepsilon_p^{m-1}\gamma_{m-1} = \frac{2^s s!}{(a\sqrt{-\varepsilon_p\lambda})^s} J_s(a\sqrt{-\varepsilon_p\lambda}),\ p = 1,2,\ldots,m-1,$$

iar pentru $n = 2s$

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-1} = \frac{(2s-1)!!}{(a\sqrt{-\lambda})^{s-\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, J_{s-\frac{1}{2}}(a\sqrt{-\lambda}),$$

$$\gamma_0 + \varepsilon_p\gamma_1 + \ldots + \varepsilon_p^{m-1}\gamma_{m-1} = \frac{(2s-1)!!}{(a\sqrt{-\varepsilon_p\lambda})^{s-\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, J_{s-\frac{1}{2}}(a\sqrt{-\lambda\varepsilon_p}),$$

care rezolvat ne dă de exemplu pe γ_0, dacă $n = 2s+1$:

$$\gamma_0 = \frac{1}{m}\frac{2^s s!}{(a\sqrt{-\lambda})^s}\left[J_s(a\sqrt{-\lambda}) + \frac{1}{(-\varepsilon_1)^{\frac{s}{2}}} J_s(a\sqrt{-\lambda\varepsilon_1}) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(-\varepsilon_{m-1})^{\frac{s}{2}}} J_s(a\sqrt{-\lambda\varepsilon_{p-1}})\right].$$

În concluzie, toți γ_k se exprimă cu ajutorul funcțiilor lui Bessel J_s de argument convenabil ales. Putem deci enunța

TEOREMA 8_2. *Soluțiile analitice ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_n^2} = \lambda_2 u_2$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_n^2} = \lambda_3 u_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_n^2} = \lambda_m u_m$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n^2} = \lambda_1 u_1$$

verifică următoarele formule de medie: pentru $n = 2s + 1$

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{m^m \cdot a^{ms} (-\lambda)^{\frac{ms}{2}}}{2^{ms} (s\,!)^m} \cdot D_k, \tag{33}$$

iar pentru $n = 2s$

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{a^{m\left(s-\frac{1}{2}\right)} (-\lambda)^{\frac{m}{2}\left(s-\frac{1}{2}\right)}}{[(2s-1)\,!\,!]^m} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot D_k,$$

unde D_k *este determinantul sistemului* (31′) *în care se înlocuiește coloana* k *cu* $Y(f_1), Y(f_2), \ldots, Y(f_m)$, $Y(\cdot)$ *fiind operatorul integral din partea întîi din* (31) *sau* (31′).

Observație. În mod asemănător se pot stabili formule de medie pentru sisteme liniare de forma (30) în care operatorii diferențiali sînt iterați și aplicați în aceeași ecuație la mai multe funcții necunoscute, cu diferite ordine de iterație.

În rezumat se observă că în toate cazurile prezentate în acest capitol formulele de medie sînt realizate prin intermediul unui operator integral Y, coeficienții fiind obținuți prin funcții Bessel de speța întîi și diferite ordine, în argumente convenabil alese.

9. Să considerăm suprafața

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - y_1^2 - y_2^2 - \ldots - y_q^2 = a^2, \quad p + q = n,$$

și o reprezentare parametrică a sa:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-1} \operatorname{ch}\psi,\\
\xi_2 &= a \cos \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-1} \operatorname{ch}\psi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_p &= a \cos \theta_{p-1} \operatorname{ch}\psi,\\
\eta_1 &= a \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{q-1} \operatorname{sh}\psi,\\
\eta_2 &= a \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{q-1} \operatorname{sh}\psi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\eta_q &= a \cos \varphi_{q-1} \operatorname{sh}\psi,
\end{aligned} \tag{34}$$

cît și funcțiile:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= a \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{p-1} \cos \psi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\xi}_p &= a \cos \theta_{p-1} \cos \varphi,\\
\bar{\eta}_1 &= a \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{q-1} \sin \psi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{\eta}_q &= a \cos \varphi_{q-1} \sin \psi,
\end{aligned} \tag{35}$$

între care există legătura

$$\xi_j(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}, \mathrm{i}\,\psi) = \bar{\xi}_j(\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}, \psi),$$

$$\eta_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1}, \mathrm{i}\,\psi) = \mathrm{i}\,\bar{\eta}_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{q-1}, \psi), \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}, \tag{36}$$

și

$$\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2 + \ldots + \bar{\xi}_p^2 + \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \ldots + \bar{\eta}_q^2 = a^2.$$

Deci, $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_k$ constituie o reprezentare a suprafeței sferei din spațiul cu n dimensiuni deoarece conțin $n-1$ parametri.

Fie acum integrala

$$\frac{1}{S_n}\int_{S_n} f(x_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, x_p + \bar{\xi}_p, y_1 + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_1, \ldots, y_q + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_q)\, \mathrm{d}S_n, \tag{37}$$

unde S_n și $\mathrm{d}S_n$ sînt respectiv aria și elementul de arie al sferei din spațiul cu n dimensiuni de rază unitatea. Ținînd seamă de relațiile (36) integrala (37) poate fi considerată ca o integrală de funcții reale pe o mulțime de puncte imaginare situate pe suprafața reală

$$(\xi_1 - x_1)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2 - (\eta_1 - y_1)^2 - \ldots - (\eta_q - y_q)^2 = a^2$$

pe care θ_i și φ_i sînt reali iar ψ pur imaginar, domeniul de variație al lui θ_i, φ_i, $|\psi|$ fiind același ca pentru S_n. Presupunînd pe f analitică, dezvol-

tînd-o în jurul punctului $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$, înlocuind în (37), atunci coeficientul $A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q}$ al lui

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p} \partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_q^{\beta_q}}, k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \beta_1 + \ldots + \beta_q,$$

este dat de

$$A_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q} = \frac{(\mathrm{i})^{\beta_1 + \cdots + \beta_q}}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_p ! \, \beta_1 ! \ldots \beta_q !} \cdot \frac{a^k}{S_n} \times$$

$$\times \int_{S_n} \bar{\xi}_1^{\alpha_1} \ldots \bar{\xi}_p^{\alpha_p} \bar{\eta}_1^{\beta_1} \ldots \bar{\eta}_q^{\beta_q} \, \mathrm{d}S_n,$$

care este diferită de zero numai dacă toți α_i, β_j sînt pari; înlocuind α_i cu $2\alpha_i$, β_j cu $2\beta_j$ obținem, cu $2\alpha_1 + \ldots + 2\beta_q = 2s$,

$$A_{2\alpha_1, \ldots, 2\alpha_p, 2\beta_1, \ldots, 2\beta_q} = \frac{(-1)^s a^{2s}}{2^s n (n+2)(n+4) \ldots (n+2s-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots \alpha_p ! \, \beta_1 ! \ldots \beta_q !}$$

care ne permite să scriem următoarea relație:

$$\frac{1}{S_n} \int_{S_n} f(x_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, x_p + \bar{\xi}_p, y_1 + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_1, \ldots, y_q + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_q) \, \mathrm{d}S_n =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s a^{2s}}{s ! \, 2^s n (n+2) \ldots (n+2s-2)} \times \quad (38)$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial y_q^2} \right)^{(s)} f$$

din care deducem

TEOREMA 9_2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_q^2} = 0 \quad (39)$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$\frac{1}{S_n} \int_{S_n} f(x_1 + \bar{\xi}_1, x_2 + \bar{\xi}_2, \ldots, x_p + \bar{\xi}_p, y_1 + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_1, \ldots, y_q + \mathrm{i}\,\bar{\eta}_q) \, \mathrm{d}S_n =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q),$$

unde S_n este aria sferei din spațiul cu n dimensiuni iar $\mathrm{d}S_n$ elementul de arie al lui S_n.

Dacă considerăm pe $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q)$ ca *urma* unei funcții de variabilele complexe $z_1, z_2, \ldots, z_p, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_q$, funcția $f(z_1, z_2, \ldots, z_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ trebuie să fie analitică într-un domeniu D_n al variabilelor z_i, ζ_k, care să conțină segmentele de axă reală

$(x_i - a, x_i + a)$ pentru planele z_i și segmentele de dreaptă paralele cu axele imaginare $\zeta_k = y_k + ia \sin \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, pentru planele ζ_k (y_k reali).

Relația integrală (38) arată că putem extinde *toate* teoremele de medie din acest capitol la ecuația (39) fără nici o modificare pentru coeficienții ce intervin în formule, operatorul integral respectiv fiind înlocuit însă cu operatorul integral ce intervine în (38).

Primită la redacție la 15 septembrie 1962

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОБОБЩАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

II. ФОРМУЛЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ИЛИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ИЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

РЕЗЮМЕ

В работе даются формулы о среднем значении для аналитических решений некоторых уравнений или систем уравнений параболического или гиперболического типа.

Укажем для примера:

ТЕОРЕМА 2_1. Аналитические решения $f(x, y, z)$ метакалорического уравнения

$$\frac{1}{4}\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} = -\lambda^2 u$$

в слое (S) $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $a \leqslant z \leqslant b$,

удовлетворяют следующей формуле о среднем значении:

$$e^{-\lambda^2 h^2} f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2 - w^2} f(x + \alpha h v, y + \beta h w, z + \gamma h^2)\, dw$$

для всех $(x, y, z + \gamma h^2) \in S$, при произвольных α, β, γ, h.

ТЕОРЕМА 2_2. Аналитические решения уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

удовлетворяют следующей формуле о среднем значении:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + i\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + i\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta}) \times$$

$$\times\, dS_{n+1}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

где S_{n+1} и $\mathrm{d}S_{n+1}$ суть соответственно площадь и элемент площади сферы $n+1$-мерного пространства, а $\overline{\xi}_i$, $\overline{\eta}$ — координаты точки S_{n+1}. Область аналитичности установлена в главе II, § 1.

ТЕОРЕМА 7_2. Аналитические решения системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u = 0$$

удовлетворяют следующей формуле о среднем значении:

$$u(x, y) = \frac{\mathrm{ber}(a)\ Y(u) + \mathrm{bei}(a)\ Y(v)}{\mathrm{ber}^2(a) + \mathrm{bei}^2(a)},$$

$$v(x, y) = \frac{\mathrm{ber}(a)\ Y(v) - \mathrm{bei}(a)\ Y(u)}{\mathrm{ber}^2(a) + \mathrm{bei}^2(a)},$$

где

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,[x + a\cos t, y + ai\sin t]\,\mathrm{d}t, \quad i = \sqrt{-1},$$

а ber (a) и bei (a) — функции В. Томпсона.

OPÉRATEURS INTÉGRAUX GÉNÉRALISANT LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

II. FORMULES DE MOYENNE POUR LES SOLUTIONS ANALYTIQUES DE CERTAINES ÉQUATIONS OU SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE OU HYPERBOLIQUE

RÉSUMÉ

L'étude comprend des formules de moyenne pour les solutions analytiques de certaines équations ou systèmes d'équations du type parabolique ou hyperbolique.

On donne, comme exemples :

THÉORÈME 2_1. *Les solutions analytiques* $f(x, y, z)$ *de l'équation métacalorique*

$$\frac{1}{4}\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\beta^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} = -\lambda^2 u$$

dans la couche $(S) -\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $a \leqslant z \leqslant b$, *vérifient la formule de moyenne suivante*

$$\mathrm{e}^{-\lambda^2 h^2} f(x, y, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-v^2-w^2}\ f(x + \alpha h v,\quad y + \beta h w,\ z + \gamma h^2)\,\mathrm{d}w$$

pour $(x, y, z + \gamma h^2) \in S$, α, β, γ, h *étant arbitraires.*

THÉORÈME 2_2 *Les solutions analytiques de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

vérifient la formule de moyenne

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{1}{S_{n+1}} \int_{S_{n+1}} f(x_1 + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_1, \ldots, x_n + \mathrm{i}\,\bar{\xi}_n, y + \bar{\eta}) \times$$

$$\times \, \mathrm{d}S_{n+1}, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

où S_{n+1} et $\mathrm{d}S_{n+1}$ sont, respectivement, l'aire et l'élément d'aire de la sphère de l'espace à $n+1$ dimensions, et $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}$ les coordonnées d'un point situé sur S_{n+1}.

Le domaine d'analyticité est établi au paragraphe 1 du chapitre II.

THÉORÈME 7_2. *Les solutions analytiques du système*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u = 0$$

vérifient la formule de moyenne suivante

$$u(x, y) = \frac{\mathrm{ber}(a)\, Y(u) + \mathrm{bei}(a)\, Y(v)}{\mathrm{ber}^2(a) + \mathrm{bei}^2(a)}$$

$$v(x, y) = \frac{\mathrm{ber}(a)\, Y(v) - \mathrm{bei}(a)\, Y(u)}{\mathrm{ber}^2(a) + \mathrm{bei}^2(a)}$$

où

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + a\cos t, y + a\mathrm{i}\sin t)\, \mathrm{d}t, \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

et ber (a) et bei (a) *sont les fonctions de W. Thomson.*

BIBLIOGRAFIE

1. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor ecuații cu derivate parțiale de tip parabolic.* Com. Acad. R.P.R., **XI**, *8* (1961).
2. MIRON NICOLESCU, *Ecuația iterată a căldurii.* St. cerc. mat., **V**, *3—4* (1954).
3. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Operatori integrali care generalizează ecuațiile cu derivate parțiale. Formule de medie.* St. cerc. mat., **XII**, *2* (1961).

ASUPRA CLASEI REALE A UNUI SPAȚIU CU CURBURĂ CONSTANTĂ ȘI NEGATIVĂ DE DIMENSIUNE n

DE

V. GORCIU

În cartea sa de geometrie diferențială [1] prof. G. Vrănceanu arată că clasa reală a unui spațiu cu curbură constantă negativă, de dimensiune $n > 2$, este mai mare decît 1.

Otsuki Tominosuka a arătat [2] că clasa reală a unui asemenea spațiu, de dimensiune n, este egală cu $n - 1$, însă demonstrația dată folosește teoria formelor diferențiale exterioare și este, relativ, greu de urmărit.

În partea întîia a acestei lucrări, servindu-ne de mijloace elementare, vrem să arătăm că clasa reală a unui spațiu cu curbură constantă negativă, de dimensiune $n > 3$, este mai mare decît 2.

Dacă considerăm ecuațiile (53′) din [1] (v. II, p. 15), deci ecuațiile lui Gauss, vom arăta că în cazul clasei 2, cînd indicii din simbolurile lui Riemann de prima speță pot lua numai patru valori, aceste ecuații, în număr de 20, nu admit soluții reale.

Într-adevăr, să presupunem că lucrăm într-un sistem de congruențe ortogonale și că cea de-a doua formă pătratică a fost redusă la forma canonică $\sum c_{ii}\ (ds^i)^2$. În cazul nostru ecuațiile corespunzătoare ecuațiilor (53′) sînt :

$$b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 + c_{11}\,c_{22} = -\,l^2 \tag{1}$$

$$b_{11}\,b_{33} - b_{13}^2 + c_{11}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{2}$$

$$b_{11}\,b_{44} - b_{14}^2 + c_{11}\,c_{44} = -\,l^2 \tag{3}$$

$$b_{22}\,b_{33} - b_{23}^2 + c_{22}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{4}$$

$$b_{22}\,b_{44} - b_{24}^2 + c_{22}\,c_{44} = -\,l^2 \tag{5}$$

$$b_{33}\,b_{44} - b_{34}^2 + c_{33}\,c_{44} = -\,l^2 \tag{6}$$

$$b_{12}\,b_{13} - b_{11}\,b_{23} = 0 \tag{7}$$

$$b_{12}\,b_{14} - b_{11}\,b_{24} = 0 \tag{8}$$
$$b_{12}\,b_{23} - b_{22}\,b_{13} = 0 \tag{9}$$
$$b_{12}\,b_{24} - b_{22}\,b_{14} = 0 \tag{10}$$
$$b_{13}\,b_{14} - b_{11}\,b_{34} = 0 \tag{11}$$
$$b_{13}\,b_{23} - b_{33}\,b_{12} = 0 \tag{12}$$
$$b_{13}\,b_{34} - b_{33}\,b_{14} = 0 \tag{13}$$
$$b_{14}\,b_{24} - b_{44}\,b_{12} = 0 \tag{14}$$
$$b_{14}\,b_{34} - b_{44}\,b_{13} = 0 \tag{15}$$
$$b_{23}\,b_{24} - b_{22}\,b_{34} = 0 \tag{16}$$
$$b_{23}\,b_{34} - b_{33}\,b_{24} = 0 \tag{17}$$
$$b_{24}\,b_{34} - b_{23}\,b_{44} = 0 \tag{18}$$
$$b_{12}\,b_{34} - b_{23}\,b_{14} = 0 \tag{19}$$
$$b_{12}\,b_{34} - b_{24}\,b_{13} = 0. \tag{20}$$

În cazul ecuațiilor (53′) $-l^2 = \dfrac{1}{K\,(X_1)^2}$, unde $K < 0$ este curbura spațiului. Primele 6 ecuații sînt de forma:

$$b_{ii}\,b_{jj} - b_{ij}^2 = -l^2 - c_{ii}\,c_{jj}. \tag{21}$$

Numim relația (21) relația (ij), referindu-ne la indicii termenului $c_{ii}\,c_{jj}$.

Putem demonstra următoarele două leme, de care avem nevoie în cele ce urmează:

LEMA 1. *Dacă componentele tensorului fundamental al celui de-al doilea spațiu sînt reale, nu pot avea loc, simultan, relații de forma* $(ij) = (ik) = (jk) = 0$.

Într-adevăr, dacă aceste relații ar fi satisfăcute am putea scrie:

$$c_{ii}\,c_{jj} = c_{ii}\,c_{kk} = c_{jj}\,c_{kk} = -l^2.$$

Deci $c_{jj} = c_{kk}$. Ar rezulta $c_{jj}^2 = c_{kk}^2 = -l^2$, deci c_{jj} și c_{kk} ar fi imaginari.

Evident că $(ij) = (ji)$.

LEMA 2. *Dacă 3 dintre cele 6 relații* (1) — (6) *sînt diferite de zero, există două relații de forma* $(ij) \neq 0$, $(ik) \neq 0$.

Într-adevăr, fiind numai 4 litere și primele 2 relații întrebuințînd cel puțin 3 litere, cea de-a treia relație are o literă comună cu cel puțin una din relații.

Urmează că dacă numai 2 din relațiile (ij) sînt diferite de zero, putem avea $\binom{2}{6} = 15$ grupuri de asemenea relații.

Din acestea numai combinațiile [(12), (34); (13), (24) și (14), (23)] nu sînt de forma (ij), (ik).

Ultima relație este de aceeași formă ca prima.

Într-adevăr, este suficient să scriem literele în ordinea j, k, l, i pentru ca să se vadă că afirmația este adevărată.

Există, deci, două cazuri:

1. Nu există două relații $(ij) \neq 0$, $(ik) \neq 0$ și atunci avem fie a) $(il) \neq 0$, $(jk) \neq 0$, fie b) $(ik) \neq 0$, $(jl) \neq 0$.

2. Există două astfel de relații.

Trebuie, deci, să studiem următoarele cazuri:

Nu există relații de forma $(ij) \neq 0$, $(ik) \neq 0$

1. a) $(23) \neq 0$, $(14) \neq 0$. Toate celelalte relații sînt egale cu zero. Avem deci:

$$b_{11}\, b_{44} - b_{14}^2 = -\, l^2 - c_{11}\, c_{44} \neq 0 \tag{3}$$

$$b_{22}\, b_{33} - b_{23}^2 = -\, l^2 - c_{22}\, c_{33} \neq 0. \tag{4}$$

Considerăm ecuațiile (11) și (15):

$$b_{14}\, b_{13} - b_{11}\, b_{34} = 0$$

$$b_{44}\, b_{13} - b_{14}\, b_{34} = 0.$$

Ținînd seama de (3), rezultă:

$$b_{13} = b_{34} = 0.$$

În mod asemănător, ecuațiile (9) și (12)

$$b_{23}\, b_{12} - b_{22}\, b_{13} = 0$$

$$b_{33}\, b_{12} - b_{23}\, b_{13} = 0$$

ținînd seama de ecuația (4) ne dau

$$b_{12} = b_{13} = 0.$$

Ținînd seama că $b_{12} = b_{13} = b_{34} = 0$ și că $(12) = (13) = (24) = (34) = 0$ cele 20 de ecuații devin:

$$b_{11}\, b_{22} = 0 \tag{1'}$$

$$c_{11}\, c_{22} = -\, l^2 \tag{1''}$$

$$b_{11}\, b_{33} = 0 \tag{2'}$$

$$c_{11}\, c_{33} = -\, l^2 \tag{2''}$$

$$b_{11}\, b_{44} - b_{14}^2 + c_{11}\, c_{44} = -\, l^2 \tag{3'}$$

$$b_{22}\, b_{33} - b_{23}^2 + c_{22}\, c_{33} = -\, l^2 \tag{4'}$$

$$b_{22}\, b_{44} - b_{24}^2 = 0 \tag{5'}$$

$$c_{22}\, c_{44} = -\, l^2 \tag{5''}$$

$$b_{33}\, b_{44} = 0 \tag{6'}$$

$$c_{33}\, c_{44} = -\, l^2 \tag{6''}$$

$$b_{11}\, b_{23} = 0 \tag{7'}$$

$$b_{11}\, b_{24} = 0 \qquad (8')$$
$$b_{22}\, b_{14} = 0 \qquad (10')$$
$$b_{33}\, b_{14} = 0 \qquad (13')$$
$$b_{14}\, b_{24} = 0 \qquad (14')$$
$$b_{23}\, b_{24} = 0 \qquad (16')$$
$$b_{33}\, b_{24} = 0 \qquad (17')$$
$$b_{44}\, b_{23} = 0 \qquad (18')$$
$$b_{23}\, b_{14} = 0 \qquad (19')$$

Observăm că b_{14} și b_{23} nu pot fi egale cu zero în același timp.
Într-adevăr, dacă am avea $b_{14} = b_{23} = 0$ ar rezulta, din (3') și (4'),

$$b_{11}\, b_{22}\, b_{33}\, b_{44} = (l^2 + c_{11}\, c_{44})\,(l^2 + c_{22}\, c_{33}).$$

Din (1') sau (12') ar rezulta :

$$(l^2 + c_{11}\, c_{44})\,(l^2 + c_{22}\, c_{33}) = 0.$$

Deci cel puțin una din relațiile (14) și (23) ar fi egale cu 0, ceea ce nu se poate.
Considerăm, deci, următoarele două cazuri :

$$\alpha)\ b_{14} = 0, \qquad b_{23} \neq 0.$$

Ținînd seama de aceasta, obținem :

$$c_{11}\, c_{44} = -\, l^2 \qquad (3''')$$
$$b_{11} = 0 \qquad (7''')$$
$$b_{24} = 0 \qquad (16''')$$
$$b_{44} = 0. \qquad (18''')$$

Dacă înmulțim (1'') cu (5'') obținem

$$c_{22}^2\, c_{11}\, c_{44} = l^4.$$

Dacă c_{22} este real ar rezulta că $c_{11}\, c_{44} > 0$.
Dar din (3''') rezultă că $c_{11}\, c_{44} < 0$. Am ajuns la o contradicție.

$$\beta)\ b_{14} \neq 0, \qquad b_{23} = 0.$$

Obținem următoarele relații :

$$b_{22} = 0 \qquad (10''')$$
$$b_{33} = 0 \qquad (13''')$$
$$b_{24} = 0 \qquad (14''')$$
$$c_{11}\, c_{22} = -\, l^2 \qquad (1''')$$
$$c_{11}\, c_{33} = -\, l^2 \qquad (2''')$$
$$c_{22}\, c_{33} = -\, l^2 \qquad (4''')$$
$$c_{22}\, c_{44} = -\, l^2 \qquad (5''')$$
$$c_{33}\, c_{44} = -\, l^2. \qquad (6''')$$

Dacă înmulțim (5''') cu (6''') obținem $c_{44}^2\, c_{22}\, c_{33} = l^4$.
Dacă c_{44} este real, rezultă că $c_{22}\, c_{33} > 0$.
Dar din (4'') rezultă că $c_{22}\, c_{33} < 0$.
Am ajuns, și în cazul acesta, la o contradicție.
b) $(13) \neq 0$, $(24) \neq 0$.

$$b_{11}\, b_{33} - b_{13}^2 = -\, l^2 - c_{11}\, c_{33} \qquad (2')$$
$$c_{11}\, c_{44} = -\, l^2 \qquad (2'')$$
$$b_{22}\, b_{44} - b_{24}^2 = -\, l^2 - c_{22}\, c_{44} \qquad (5')$$
$$b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 = 0 \qquad (1')$$
$$c_{11}\, c_{22} = -\, l^2 \qquad (1'')$$
$$b_{11}\, b_{44} - b_{14}^2 = 0 \qquad (3')$$
$$c_{22}\, c_{33} = -\, l^2 \qquad (3'')$$
$$b_{22}\, b_{33} - b_{23}^2 = 0 \qquad (4')$$
$$c_{33}\, c_{44} = -\, l^2 \qquad (4'')$$
$$b_{33}\, b_{44} - b_{34}^2 = 0. \qquad (6')$$

Ecuațiile (7) și (12), ținînd seama de (2'), ne dau $b_{12} = b_{23} = 0$.
De asemenea, din ecuațiile (10) și (14), ținînd seama de ecuația (5'), obținem $b_{12} = b_{14} = 0$.
În baza relațiilor $b_{12} = b_{14} = b_{23} = 0$, cele 20 de ecuații devin:

$$b_{11}\, b_{22} = 0 \qquad (1'')$$
$$b_{11}\, b_{44} = 0 \qquad (3'')$$
$$b_{22}\, b_{33} = 0 \qquad (4'')$$
$$b_{11}\, b_{24} = 0 \qquad (8'')$$
$$b_{22}\, b_{13} = 0 \qquad (9'')$$
$$b_{11}\, b_{34} = 0 \qquad (11'')$$
$$b_{13}\, b_{34} = 0 \qquad (13'')$$
$$b_{14}\, b_{13} = 0 \qquad (15'')$$
$$b_{22}\, b_{34} = 0 \qquad (16'')$$
$$b_{24}\, b_{33} = 0 \qquad (17'')$$
$$b_{24}\, b_{34} = 0 \qquad (18'')$$
$$b_{24}\, b_{13} = 0. \qquad (20'')$$

Printr-un argument asemănător celui de la cazul 1.a) se vede că b_{13} și b_{24} nu pot fi egali cu zero în același timp.
Considerăm deci:

$$\gamma)\ b_{13} = 0, \qquad b_{24} \neq 0.$$

Din (17′) rezultă $b_{33} = 0$, iar din (18) $b_{34} = 0$. Din (2′) rezultă $c_{11}\, c_{33} = -\, l^2$. Dacă înmulțim (2) cu (4) obținem :

$$c_{11}\, c_{33}\, c_{44}^2 = l^4.$$

Dacă c_{44} este real ar urma că $c_{11}\, c_{33} > 0$; avem deci o contradicție.

$$\delta)\ b_{13} \neq 0, \qquad b_{24} = 0.$$

Din (13″) și din (15″) rezultă respectiv $b_{34} = 0$, $b_{44} = 0$.

Deci :

$$c_{22}\, c_{44} = -\, l^2. \tag{5″}$$

Avem însă prin înmulțirea lui (3) cu (4) : $c_{22}\, c_{33}^2\, c_{44} = l^4$.

Dacă c_{33} este real ar urma că $c_{22}\, c_{44} > 0$.

2. Există două relații de forma (ij), (ik) diferite de zero.

Presupunem că $(12) \neq 0$, $(13) \neq 0$.

Deci

$$b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2 = -\, l^2 - c_{11}\, c_{22} \neq 0 \tag{1}$$

$$b_{11}\, b_{33} - b_{13}^2 = -\, l^2 - c_{11}\, c_{33} \neq 0. \tag{2}$$

Sistemul format de ecuațiile

$$b_{12}\, b_{13} - b_{11}\, b_{23} = 0 \tag{7}$$

$$b_{22}\, b_{13} - b_{12}\, b_{23} = 0, \tag{9}$$

ținînd seama de (1), ne dă $b_{13} = b_{23} = 0$.

Sistemul format de ecuațiile

$$b_{13}\, b_{14} - b_{11}\, b_{34} = 0 \tag{11}$$

$$b_{33}\, b_{14} - b_{13}\, b_{34} = 0 \tag{13}$$

ținînd seama de (2), ne dă $b_{14} = b_{34} = 0$.

Relația (2) devine $b_{11}\, b_{33} = -\, l^2 - c_{11}\, c_{33} = (13)$.

Rezultă că $b_{11} \neq 0$, $b_{33} \neq 0$; în caz contrar am avea $(13) = 0$, contrar ipotezei făcute.

Din ecuația (8) deducem $b_{24} = 0$, iar din (12) $b_{12} = 0$.

Ținînd seama de ultimele relații, primele 6 ecuații se scriu :

$$b_{11}\, b_{22} + c_{11}\, c_{22} = -\, l^2 \tag{1′}$$

$$b_{11}\, b_{33} + c_{11}\, c_{33} = -\, l^2 \tag{2′}$$

$$b_{11}\, b_{44} + c_{11}\, c_{44} = -\, l^2 \tag{3′}$$

$$b_{22}\, b_{33} + c_{22}\, c_{33} = -\, l^2 \tag{4′}$$

$$b_{22}\, b_{44} + c_{22}\, c_{44} = -\, l^2 \tag{5′}$$

$$b_{33}\, b_{44} + c_{33}\, c_{44} = -\, l^2. \tag{6′}$$

Scădem ecuația (3) din (1) și ecuația (3) din (2). Obținem:

$$b_{11}(b_{22} - b_{44}) + c_{11}(c_{22} - c_{44}) = 0 \tag{7'}$$

$$b_{11}(b_{33} - b_{44}) + c_{11}(c_{33} - c_{44}) = 0. \tag{8'}$$

De asemenea, scăzînd (6') din (4') și (5') din (4') obținem:

$$b_{33}(b_{22} - b_{44}) + c_{33}(c_{22} - c_{44}) = 0 \tag{9'}$$

$$b_{22}(b_{33} - b_{44}) + c_{22}(c_{33} - c_{44}) = 0. \tag{10'}$$

Dacă $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & c_{11} \\ b_{33} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, sistemul format din (7') și (9') ne dă $b_{22} = b_{44}$, $c_{22} = c_{44}$.

Dacă $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & c_{11} \\ b_{22} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, sistemul format din (8') și (10') ne dă $b_{33} = b_{44}$, $c_{33} = c_{44}$.

Dacă cel puțin unul din determinanții Δ_1 sau Δ_2 este diferit de zero, rezultă că b_{22}, b_{33}, b_{44}, c_{22}, c_{33}, c_{44} nu pot fi reali. Într-adevăr, în acest caz în membrul întîi al uneia din cele două ecuații (5') și (6') am avea o cantitate pozitivă, iar în cel de-al doilea o cantitate negativă.

Să vedem ce se întîmplă dacă avem $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$.

În cazul acesta rezultă:

$$\frac{c_{11}}{b_{11}} = \frac{c_{22}}{b_{22}} = \frac{c_{33}}{b_{33}} = \rho.$$

Presupunînd că diferiți coeficienți ai formelor pătratice sînt reali, ρ este real.

În cazul acesta ecuațiile (1'), (2') și (4') devin respectiv:

$$b_{11} b_{22}(1 + \rho^2) = -l^2$$

$$b_{11} b_{33}(1 + \rho^2) = -l^2$$

$$b_{22} b_{33}(1 + \rho^2) = -l^2.$$

Deci

$$b_{11}^2 b_{22}^2 b_{33}^2 = -l^6.$$

Avem deci o contradicție: în membrul întîi o cantitate pozitivă, iar în al doilea una negativă.

*

În cazul unui spațiu cu 3 dimensiuni tensorul lui Riemann R_{ijkl} are 6 componente independente: R_{2323}, R_{1313}, R_{1212}, R_{1213}, R_{1223} și R_{1323}.

Păstrînd notațiile din prima parte a lucrării, putem scrie : ([1], formulele (51), (53′)) :

$$b_{22}\,b_{33} - b_{23}^2 + c_{22}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{1}$$

$$b_{11}\,b_{33} - b_{13}^2 + c_{11}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{2}$$

$$b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 + c_{11}\,c_{22} = -\,l^2 \tag{3}$$

$$b_{12}\,b_{13} - b_{11}\,b_{23} = 0 \tag{4}$$

$$b_{22}\,b_{13} - b_{12}\,b_{23} = 0 \tag{5}$$

$$b_{13}\,b_{23} - b_{12}\,b_{33} = 0. \tag{6}$$

Ecuația (3) poate fi scrisă :

$$b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 = -\,l^2 - c_{11}\,c_{22}.$$

Presupunem că membrul al doilea este diferit de zero. Deoarece acesta este negativ, este suficient să presupunem că c_{11} și c_{22} au același semn.

Sistemul format de ecuațiile (4) și (5) este omogen în b_{13} și b_{23}. Deoarece, conform presupunerii făcute, determinantul corespunzător este diferit de zero, urmează că $b_{13} = b_{23} = 0$.

Din ecuația (6) rezultă $b_{12}\,b_{33} = 0$. Luăm $b_{12} = 0$. Sistemul inițial de 6 ecuații se reduce la următorul sistem de 3 ecuații :

$$b_{22}\,b_{33} + c_{22}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{1′}$$

$$b_{11}\,b_{33} + c_{11}\,c_{33} = -\,l^2 \tag{2′}$$

$$b_{11}\,b_{22} + c_{11}\,c_{22} = -\,l^2. \tag{3′}$$

Sistemul format din ecuațiile (1′) și (2′) poate determina în mod unic pe b_{33} și c_{33} cu condiția ca

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & c_{11} \\ b_{22} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Să vedem ce rezultă dacă acest determinant este egal cu zero. Putem scrie :

$$\frac{b_{11}}{c_{11}} = \frac{b_{22}}{c_{22}} = \rho \longrightarrow \begin{matrix} b_{11} = \rho\, c_{11}, \\ b_{22} = \rho\, c_{22}. \end{matrix}$$

Substituind în (3′), obținem

$$c_{11}\,c_{22} = -\,\frac{l^2}{1 + \rho^2}.$$

Rezultă că c_{11} și c_{22} trebuie să fie de semn contrar. Aceasta contrazice presupunerea făcută. Deci $\Delta \neq 0$. Urmează că sistemul format din (1′) și (2′) determină pe b_{33} și c_{33} în funcția de b_{11}, b_{22}, c_{11} și c_{22}.

În cele de mai sus am presupus că ρ este real, deci că vrem să considerăm numai spațiile de clasă reală.

Rezultă deci că dacă în cazul $n = 3$ considerăm ecuațiile corespunzătoare celor întrebuințate pentru $n > 1$, nu ajungem la nici o contradicție.

Pentru a arăta că, în cazul $n = 3$, există efectiv un spațiu de clasă reală 2, ar fi necesar să se arate că soluția ecuațiilor considerate de noi satisface în plus atît ecuațiile (54′) ale lui Codazzi, cît și ecuațiile (54″) ale lui Ricci-Kühne [1] (vol. I, p. 302).

Primită la redacție la 11 septembrie 1962

О ДЕЙСТВИТЕЛЬНОМ КЛАССЕ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

РЕЗЮМЕ

Элементарными методами показывается, что действительный класс n-мерного пространства ($n > 3$) постоянной отрицательной кривизны больше 2.

Во второй части работы показывается, что при $n = 3$ уравнения, соответствующие тем, которые используются в первой части, могут иметь действительное значение.

SUR LA CLASSE RÉELLE D'UN ESPACE À COURBURE CONSTANTE ET NÉGATIVE DE DIMENSION n

RÉSUMÉ

On démontre, par des moyens élémentaires, que la classe réelle d'un espace à courbure constante négative, de dimension $n > 3$, est plus grande que 2.

Dans la IIe partie du travail on démontre que, pour $n = 3$, les équations correspondant à celles qui ont été utilisées dans la Ire partie, peuvent avoir une solution réelle.

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle.* 1957, **I**, **II**.
2. OTUKI TOMINOSUKE, *Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold.* Journ. Math. Soc. Japan, **6** (1954).
3. G. VRĂNCEANU, *Sulle condizioni di rigidita di una V_n in un S_n.* Rend. dei Lincei, **XI** (1930).

ASUPRA REZOLVĂRII PROBLEMEI TRANSPORTURILOR PRIN METODA LUI EGERVÁRY. II

DE

P. IVĂNESCU și S. RUDEANU

1. Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că problema determinării sistemului minimal de linii și coloane care să acopere toate elementele marcate ale unei matrice (operație necesară în metoda lui Egerváry [2] de rezolvare a problemelor de transporturi, dar nerezolvată de autor) revine la determinarea necunoscutelor $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ din L_2 pentru care funcția

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{i \in M_j} \alpha_i \tag{1}$$

își atinge minimul. Notațiile sînt aceleași ca în [1].

Scopul prezentei note este de a aplica o ideie a lui R. Fortet [3] pentru determinarea necunoscutelor α_i. În locul determinării directe a valorilor α_i pentru care (1) își atinge minimul absolut, vom determina toate minimele relative ale funcției g și vom alege dintre acestea pe aceea care realizează minimul absolut.

Definiție. *Funcția* $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *cu* $\alpha_i \in L_2$ *și cu valori în* R_2 *are un minim relativ în punctul* $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*)$ *dacă* $g(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*) \leqq$ $\leqq g(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{i-1}^*, \bar{\alpha}_i^*, \alpha_{i+1}^*, \ldots, \alpha_m^*)$, $(i = 1, \ldots, m)$.

Observăm că oricare ar fi i putem scrie

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_i \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) +$$

$$+ \psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m)$$

deoarece în expresia lui g nu intră variabile cu negaţie. Deci

$$\Delta_i = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) - g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) =$$
$$= \alpha_i \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) + \psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) -$$
$$- \bar{\alpha}_i \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) - \psi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) =$$
$$= (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m).$$

Avem deci

LEMA 1. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia g să aibă un minim relativ în punctul $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*)$ este ca relaţiile*

$$(\alpha_i^* - \bar{\alpha}_i^*) \varphi_i(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{i-1}^*, \alpha_{i+1}^*, \ldots, \alpha_m^*) \leqslant 0 \tag{2}$$

să fie satisfăcute pentru $i = 1, 2, \ldots, m$.

Se pune acum problema de a rezolva sistemul de inecuaţii (2). În acest scop vom demonstra mai întîi

LEMA 2 [1]). *Fie $F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m)$, $G_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m)$ două funcţii booleene având proprietăţile:*

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \geqslant 0 \Leftrightarrow F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \leqslant 0 \Leftrightarrow G_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) = 1. \tag{4}$$

Atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ să satisfacă inegalitatea

$$(\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \leqslant 0 \tag{2'}$$

este ca

$$F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \leqslant \alpha_i \leqslant G_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m). \tag{5}$$

Într-adevăr, inegalitatea (2′) are loc dacă şi numai dacă sînt satisfăcute următoarele două proprietăţi:

$$\begin{aligned} &\alpha_i = 0 \Rightarrow \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \geqslant 0, \\ &\alpha_i = 1 \Rightarrow \varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Ţinînd seama de condiţiile (3), (4), se vede că proprietatea (6) este echivalentă cu dubla inegalitate (5).

Observaţia 1. Condiţiile (3), (4) se pot scrie respectiv în forma

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) < 0 \Leftrightarrow F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) = 1, \tag{3'}$$

$$\varphi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) > 0 \Leftrightarrow G_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) = 0. \tag{4'}$$

[1]) În lemele 2,...,7 care urmează, i este un indice cu $1 \leqslant i \leqslant n$, dar altfel arbitrar.

Observația 2. Fie

$$G_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) = F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \cup \cup H_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m). \quad (7)$$

Atunci dubla inegalitate (5) are loc dacă și numai dacă α_i este de forma

$$\alpha_i = F_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) \cup H_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m) u_i, \quad (8)$$

u_i fiind un parametru arbitrar.

Să observăm acum că funcția φ_i este de forma

$$\varphi_i = q_i - \sum_{k=1}^{r} p_k \pi_k,$$

unde q_i, p_k sînt numere reale, iar π_k sînt produse ale unor variabile α_l $(l \neq i)$, adică sînt produse de forma

$$\pi_k = \alpha_{l_1} \ldots \alpha_{l_{s_k}}. \quad (9)$$

Dacă ținem seama de lema 2 și de observațiile precedente, obținem imediat următoarele propoziții :

LEMA 3. *Dacă $q_i < 0$, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca relația (2) să aibă loc este ca $\alpha_i^* = 1$.*

LEMA 4. *Dacă $q_i = 0$, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca relația (2) să aibă loc, este ca*

$$\alpha_i^* = u_i \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} \pi_k^*, \quad (10)$$

unde $\pi_k^* = \alpha_{l_1}^* \ldots \alpha_{l_{s_k}}^*$, iar u_i este un parametru arbitrar.

LEMA 5. *Dacă $0 < q_i < \sum_{k=1}^{r_i} p_k$, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca relația (2) să aibă loc este ca*

$$\alpha_i^* = \bigcup_{R \in \mathfrak{R}_i} \prod_{k \in R} \pi_k \cup \left(\bigcup_{S \in \mathfrak{S}_i} \prod_{k \in S} \pi_k^* \right) u_i, \quad (11)$$

unde $\pi_k^* = \alpha_{l_1}^* \ldots \alpha_{l_{s_k}}^*$, $\mathfrak{R}_i$ este mulțimea sistemelor $R = (k_1, \ldots, k_r)$ pentru care $q_i < \sum_{w=1}^{s} p_{k_w}$, $\mathfrak{S}_i$ este mulțimea sistemelor $S = (k_1, \ldots, k_s)$ pentru care $q_i = \sum_{w=1}^{s} p_{k_w}$, iar u_i este un parametru arbitrar.

LEMA 6. *Dacă* $q_i = \sum_{k=1}^{r_i} p_k$, *atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca relaţia* (2) *să aibă loc este ca*

$$\alpha_i^* = u_i \prod_{k=1}^{r_i} \pi_k^*, \tag{12}$$

unde $\pi_k^* = \alpha_{i_1}^* \dots \alpha_{i_{s_k}}^*$ *iar* u_i *este un parametru arbitrar.*

LEMA 7. *Dacă* $q_i > \sum_{k=1}^{r_i} p_k$, *atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca relaţia* (2) *să aibă loc este ca* $\alpha_i^* = 0$.

Demonstraţia fiecăreia din lemele 3, ..., 7 se reduce la determinarea funcţiilor F_i, G_i din lema 2, ceea ce se face fără nici o dificultate.

Din lemele 1, 3, 4, 5, 6, 7 se deduce imediat următoarea

TEOREMĂ. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia g să-şi atingă un minim relativ în punctul* $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*)$ *este ca:*

$$\alpha_i^* = \begin{cases} 1, & \text{dacă } q_i < 0, \\ u_i \cup \bigcup_{k=1}^{r_i} \pi_k^*, & \text{dacă } q_i = 0, \\ \bigcup_{R \in \Re_i} \prod_{k \in R} \pi_k^* \cup \left(\bigcup_{S \in \$_i} \prod_{k \in S} \pi_k^* \right) u_i, & \text{dacă } 0 < q_i < \sum_{k=1}^{r_i} p_k, \\ u_i \bigcup_{k=1}^{r_i} \pi_k^*, & \text{dacă } q_i = \sum_{k=1}^{r_i} p_k, \\ 0, & \text{dacă } q_i > \sum_{k=1}^{r_i} p_k, \end{cases}$$

pentru $i = 1, 2, \dots, m$, *unde* u_i, π_k^*, R, S, $\Re_i$, $\$_i$ *au semnificaţiile din lemele* 3, 4, 5, 6, 7.

2. Să notăm cu $((c_{ij}^0))$ matricea iniţială a costurilor, cu $((c_{ij}^k))$ matricea obţinută din $((c_{ij}^0))$ la iteraţia k, cu $g^{(k)}$ funcţia obţinută din (1) la iteraţia k, şi cu $\alpha_i^{(k)}$, $\beta_j^{(k)}$ valorile α_i^*, β_j^* la iteraţia k.

Pe baza celor de mai sus, algoritmul lui Egerváry va consta din următorii paşi:

1) Calcularea matricei $((c_{ij}^1)) = ((c_{ij}^0 - u_i - v_j))$, unde

$u_i = \min_j c_{ij}$, $v_j = \min_i (c_{ij}^0 - u_i)$.

În etapa k se efectuează următoarele operaţii:

2) Calcularea minimului funcției $g^{(k)}$ pe baza teoremei de mai sus. Se alege un indice i_1, se determină $\alpha_{i_1}^{(k)}$ pe baza teoremei precedente, obținîndu-se o funcție $\alpha_{i_1}^{(k)} = \chi(\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_{i_1-1}^{(k)}, \alpha_{i_1+1}^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}, u_i^{(k)})$ și se înlocuiește în expresia lui $g^{(k)}$. Repetîndu-se operația, se obțin toate minimele relative și se caută dintre ele minimul absolut. Dacă $\min g^{(k)} = \sum a_i$, problema este rezolvată. Dacă $\min g^{(k)} < \sum a_i$ trecem la :

3) Calcularea matricei

$$((c_{ij}^{k+1})) = ((c_{ij}^{k} + m^{(k)}[\alpha_i^{(k)} + \beta_j^{(k)} - 1])),$$

unde $m^{(k)} = \min_{\mathfrak{M}_k} c_{ij}^k$, iar $\mathfrak{M}_k = \{(i,j) \mid \bar{\alpha}_i^{(k)}\, \bar{\beta}_j^{(k)} = 1\}$.

4) Repetarea pașilor 2 și 3 pînă cînd

$$\min g^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Observație. Pare avantajos să se ia drept i_1 acel indice pentru care φ_{i_1} are cel mai mic număr de termeni. După calcularea lui $\alpha_{i_1}^{(k)}$ se alege i_2 în mod analog etc.

3. *Exemplu.* Pe baza rezultatelor din [1] și a teoremei de mai sus, determinarea planului optim al exemplului dat de Egerváry [2],

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 & 9 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 30 & 6 \\ 1 & 20 & 7 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

cu $a_1 = 9$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$; $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = 4$, $b_4 = 6$, $b_5 = 3$, se face în felul următor :

1) Elementele marcate în prima matrice $((c_{ij}^1))$ obținută ca la punctul 1 din **2** sînt : c_{12}^1, c_{13}^1, c_{21}^1, c_{22}^1, c_{31}^1, c_{35}^1. Deci

$$M_1 = \{2,3\},\ M_2 = \{2\},\ M_3 = \{1\},\ M_4 = \{1\},\ M_5 = \{3\}.$$

Deci

$$g^{(1)} = 9\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3 - 5\alpha_2 - 4\alpha_1 - 6\alpha_1 - 3\alpha_3 =$$

$$= -\alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_3.$$

Din $\varphi_1^{(1)} = -1$, rezultă că $\alpha_1^{(1)} = 1$.

Din $\varphi_2^{(1)} = -1 - 3\alpha_3 < 0$, rezultă că $\alpha_2^{(1)} = 1$.

Din $\varphi_3^{(1)} = 5 - 3\alpha_2 \geqslant 2 > 0$, rezultă că $\alpha_3^{(1)} = 0$.

Deci $\alpha_1^{(1)} = 1$, $\alpha_2^{(1)} = 1$, $\alpha_3^{(1)} = 0$. De aici formula (10) din [1] ne dă:

$$\beta_1^{(1)} = \overline{\alpha_2^{(1)}\,\alpha_3^{(1)}} = \bar{0} = 1,$$

$$\beta_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} = 0,$$

$$\beta_3^{(1)} = \alpha_1^{(1)} = 0,$$

$$\beta_4^{(1)} = \alpha_1^{(1)} = 0,$$

$$\beta_5^{(1)} = \bar{\alpha}_3^{(1)} = 1.$$

Pentru aceste valori $g^{(1)} = 19 < 21$, deci continuăm calculele.

Obținem

$$((c_{ij}^2)) = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 6 & 24 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aici $M_1 = \{3\}$, $M_2 = \{2\}$, $M_3 = \{1\}$, $M_4 = \{1,3\}$, $M_5 = \{3\}$.

Deci

$$g^{(2)} = 9\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_3 - 5\alpha_2 - 4\alpha_1 - 6\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_3 =$$

$$= 5\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - 6\alpha_1\alpha_3,$$

$$\varphi_1^{(2)} = 5 - 6\alpha_3.$$

Deci $\alpha_1^{(2)} = \alpha_3^{(2)}$, deci

$$g^{(2)}(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)}) = \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)},$$

de unde $\alpha_1^{(2)} = 0$, $\alpha_2^{(2)} = 1$ și $\alpha_3^{(2)} = \alpha_1^{(2)} = 0$.

Formulele (10) din [1] ne arată că

$$\beta_1^{(2)} = \bar{\alpha}_3^{(2)} = 1,$$

$$\beta_2^{(2)} = \bar{\alpha}_2^{(2)} = 0,$$

$$\beta_3^{(2)} = \bar{\alpha}_1^{(2)} = 1,$$

$$\beta_4^{(2)} = \overline{\alpha_1^{(2)}\,\alpha_1^{(3)}} = \bar{0} = 1,$$

$$\beta_5^{(2)} = \alpha_3^{(2)} = 1.$$

Pentru aceste valori $g^{(2)} = 20 < 21$, deci continuăm calculele.

Obținem

$$((c_{ij}^3)) = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 11 & 0 & 12 & 30 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aici $M_1 = \{3\}$, $M_2 = \{2, 3\}$, $M_3 = \{1\}$, $M_4 = \{1, 3\}$, $M_5 = \{3\}$. Deci

$$g^{(3)} = 9\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 - 3\alpha_3 - 5\alpha_2\alpha_3 - 4\alpha_1 - 6\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_3 =$$

$$= 5\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 - 5\alpha_2\alpha_3 - 6\alpha_1\alpha_3.$$

De aici avem

$$\varphi_1^{(3)} = 5 - 6\alpha_3 \text{ și deci } \alpha_1^{(3)} = \alpha_3^{(3)}.$$

Înlocuind, avem

$$g^{(3)}(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}) = 4\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} - 5\alpha_3^{(3)}$$

și deci

$$\varphi^{(3)}(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}) = 1 - 5\alpha_2^{(3)},$$

ceea ce arată că $\alpha_1^{(3)} = \alpha_2^{(3)} = \alpha_3^{(3)}$.

Cele două minime locale vor fi atinse în punctele (0,0,0) și (1,1,1). În ambele puncte $g^{(3)}(0,0,0) = g^{(3)}(1,1,1) = 21$, deci $((c_{ij}^3))$ ne va da soluția optimă a problemei.

Elementele marcate fiind c_{13}, c_{14}, c_{22}, c_{31}, c_{32}, c_{34}, c_{35}, găsim soluția optimă

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Concluzii. Ne propunem ca într-o lucrare ulterioară să studiem problema rezolvării inegalităților liniare cu necunoscutele în L_2. Această problemă este importantă pentru efectuarea sistematică a etapei 2 din algoritmul descris în **2**.

În multiplele exemple rezolvate manual cu metoda de mai sus, soluţiile optime au fost găsite mult mai repede decît prin alte metode. Este interesant de remarcat că în toate aceste exemple, minimele relative au coincis cu minimele absolute.

Primită la redacţie la 10 septembrie 1962

О РЕШЕНИИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ЭГЕРВАРИ. II

РЕЗЮМЕ

В предыдущей работе [1] мы показали, что вопрос об определении минимального числа линий и столбцов, покрывающих все отмеченные элементы матрицы (эта операция необходима в методе Эгервари [2] решения транспортной задачи, но Эгервари ее не решил) сводится к определению неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из L_2, для которых функция (1) достигает минимума.

В настоящей работе определяются все системы значений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, для которых g имеет относительные минимумы, и выбираются затем, следуя одной идее Р. Форте [3], абсолютные минимумы.

Показывается, что относительные минимумы $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*)$ характеризуются системой (2). Решения этой системы неравенств строятся при помощи теоремы из § 1.

В приведенных примерах время, необходимое для вычислений, оказалось существенно сокращенным по сравнению с другими методами решения транспортной задачи.

SUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DES TRANSPORTS PAR LA MÉTHODE D'EGERVÁRY. II

RÉSUMÉ

Les auteurs ont démontré, dans un travail antérieur [1], que le problème de la détermination du système minimal de lignes et de colonnes permettant de couvrir tous les éléments marqués appartenant à une matrice (opération nécessaire, dans la méthode d'Egerváry [2], destinée à la résolution des problèmes de transports, mais non pas résolue par l'auteur) revient à déterminer les inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de L_2 pour lesquelles la fonction (1) atteint le minimum.

Dans ce travail ils déterminent tous les systèmes de valeurs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ où la fonction g a des minima relatifs, et ils choisissent ensuite les minima absolus, conformément à une idée de R. Fortet [3].

On démontre que les minima relatifs $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*)$ sont caractérisés par le système (2). Les solutions de ce système d'inéquations sont construites par le théorème du paragr. 1.

Pour les exemples étudiés, la durée du calcul a été considérablement réduite par rapport à celle exigée par d'autres méthodes de résolution des problèmes de transports (transportation problems).

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. HAMMER (P. IVĂNESCU), S. RUDEANU, *Asupra rezolvării problemei transporturilor prin metoda lui Egerváry*. Com. Acad. R.P.R., **XI**, 7, 773—778 (1961).
2. J. EGERVÁRY, *Kombinatirukus módszer a szállitási probléma megoldására*. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, *4*, *1*, 15—28 (1959).
3. R. FORTET, *Applications de l'algèbre de Boole en recherche opérationnelle*. Revue Française de Recherche Opérationnelle, *4*, *14*, 17—26 (1960).

PROBLEME DE TIP BOUSSINESQ PENTRU UN SEMISPAȚIU ELASTIC CU IZOTROPIE TRANSVERSĂ

DE

EMERIC DEUTSCH

1. INTRODUCERE

În această lucrare vom studia starea de deformație și starea de tensiune într-un semispațiu elastic, presupunînd că : 1) mediul elastic posedă o izotropie transversă, axa de monotropie [1], [2] fiind normală la planul frontieră al mediului, 2) solicitarea mediului este axial-simetrică în raport cu o axă de asemenea perpendiculară pe planul frontieră al mediului.

2. ECUAȚII GENERALE

Să considerăm că semispațiul $z \geqslant 0$ este ocupat de un corp elastic cu izotropie transversă axa Oz fiind axa de monotropie.

În coordonate cilindrice (r, θ, z), relațiile dintre tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke), se scriu :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a\varepsilon_r + (a - 2\mu')\,\varepsilon_\theta + b\varepsilon_z, \\ \sigma_\theta &= (a - 2\mu')\varepsilon_r + a\,\varepsilon_\theta + b\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= b\varepsilon_r + b\varepsilon_\theta + a'\varepsilon_z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz} = \mu\gamma_{rz}, \qquad \tau_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z}, \qquad \tau_{r\theta} = \mu'\gamma_{r\theta}, \tag{2.2}$$

unde a, a', b, μ, μ' sînt constantele elastice ale mediului. Se arată [3] că avem

$$\begin{gathered} a > 0, \quad a' > 0, \quad \mu > 0, \quad \mu' > 0, \\ aa' - b^2 - a'\mu' > 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

În cazul unei solicitări axial-simetrice, Oz fiind axa de simetrie, ecuațiile de echilibru se reduc la

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \tag{2.4}$$

iar relațiile dintre deformații specifice și deplasări sînt :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0. \tag{2.5}$$

Înlocuind deformațiile specifice date de (2.5) în relațiile (2.1) și (2.2), obținem :

$$\sigma_r = a\frac{\partial u}{\partial r} + (a - 2\mu')\frac{u}{r} + b\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\sigma_\theta = (a - 2\mu')\frac{\partial u}{\partial r} + a\frac{u}{r} + b\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\sigma_z = b\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + a'\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2.6}$$
$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0,$$

astfel că ecuațiile de echilibru (2.4) devin :

$$a\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (b + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z} = 0, \tag{2.7}$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + a'\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (b + \mu)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Se poate verifica ușor că luînd

$$u = -\frac{b + \mu}{a\mu}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\,\partial z}, \tag{2.9}$$

$$w = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \tag{2.10}$$

φ fiind o funcție de r și z, ecuația (2.7) este identic satisfăcută iar ecuația (2.8) se reduce la

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\varphi+\frac{aa'-b^2-2b\mu}{a\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{a'}{a}\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}=0. \tag{2.11}$$

Din relațiile (2.6) obținem tensiunile corespunzătoare :

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{b}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),\\
\sigma_\theta &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(m\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{b}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(n\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{a'}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),\\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{b}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),\\
\tau_{r\theta} &= \tau_{z\theta}=0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

unde s-a notat

$$\begin{aligned}
m &= \frac{a\mu-2b\mu'-2\mu\,\mu'}{a\mu},\\
n &= \frac{aa'-b^2-b\mu}{a\mu}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

3. REZOLVAREA ECUAȚIEI CU DERIVATE PARȚIALE CU AJUTORUL UNEI TRANSFORMATE HANKEL

Să introducem transformata Hankel de ordinul zero a funcției $\varphi(r, z)$:

$$G(\xi, z)=\int_0^\infty r\varphi(r, z)\,J_0(\xi r)\,\mathrm{d}r. \tag{3.1}$$

Reamintim egalitatea [4]

$$\int_0^\infty r\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)J_0(\xi r)\,\mathrm{d}r=-\xi^2\int_0^\infty r\varphi(r, z)\,J_0(\xi r)\,\mathrm{d}r. \tag{3.2}$$

Înmulțind ambii membri ai ecuației (2.11) cu $rJ_0(\xi r)$, integrînd în raport cu r între limitele 0 și ∞ și făcînd uz de egalitatea (3.2) obținem

$$\frac{\mathrm{d}^4G}{\mathrm{d}z^4}-\frac{aa'-b^2-2b\mu}{a'\mu}\xi^2\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2}+\frac{a}{a'}\xi^4G=0. \tag{3.3}$$

Prin urmare, dacă $\varphi(r, z)$ este soluția ecuației (2.11), atunci transformata ei Hankel de ordinul zero, $G(\xi, z)$, este soluția ecuației diferențiale (3.3).

Ecuația caracteristică a ecuației (3.3) este

$$s^4 - \frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu}\,\xi^2 s^2 + \frac{a}{a'}\,\xi^4 = 0, \tag{3.4}$$

avînd rădăcinile

$$\pm\xi\sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu}\right)^2 - 4\,\frac{a}{a'}}\right]}.$$

Notăm

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu} + \sqrt{\left(\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu}\right)^2 - 4\,\frac{a}{a'}}\right]}, \\ s_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu} - \sqrt{\left(\frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a'\mu}\right)^2 - 4\,\frac{a}{a'}}\right]}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

astfel ca $\mathcal{R}e\ s_j > 0$, $(j = 1,2)$.

Constantele de integrare care intră în soluția generală a ecuației (3.3) sînt în general funcții de parametrul ξ și se determină din condițiile la limită. Funcția $G(\xi, z)$ o dată cunoscută, funcția $\varphi(r, z)$ se determină cu ajutorul formulei de inversiune [4]

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty \xi G(\xi, z)\, J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi. \tag{3.6}$$

Înlocuind (3.6) în (2.9), (2.10) și (2.12), obținem expresiile deplasărilor și tensiunilor cu ajutorul funcției $G(\xi, z)$ și a derivatelor sale în raport cu z:

$$u = \frac{b+\mu}{a\mu}\int_0^\infty \xi^2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\, J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.7}$$

$$w = \int_0^\infty \xi\left(\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2} - \frac{1}{\mu}\,\xi^2 G\right) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.8}$$

$$\sigma_r = \int_0^\infty \xi\left(\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}z^3} + \xi^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi + \frac{m-1}{r}\int_0^\infty \xi^2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z} J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.9}$$

$$\sigma_\theta = \int_0^\infty \xi\left(\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}z^3} + m\xi^2\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi - \frac{m-1}{r}\int_0^\infty \xi^2 \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z} J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.10}$$

$$\sigma_z = \int_0^\infty \xi\left(\frac{a'}{a}\frac{\mathrm{d}^3G}{\mathrm{d}z^3} - n\xi^2\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}\right) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{3.11}$$

$$\tau_{rz} = \int_0^\infty \xi^2\left(\frac{b}{a}\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}z^2} + \xi^2 G\right) J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi. \tag{3.12}$$

În problemele pe care le vom studia, vom presupune $s_1 \neq s_2$, astfel că soluția generală a ecuației (3.3) este

$$G(\xi, z) = A\,e^{-s_1\xi z} + B\,e^{-s_2\xi z} + C\,e^{s_1\xi z} + D\,e^{s_2\xi z}. \tag{3.13}$$

Deoarece deplasările și tensiunile tind spre zero cînd z tinde spre infinit, vom lua $C = D = 0$, astfel că (3.13) devine

$$G(\xi, z) = A(\xi)\,e^{-s_1\xi z} + B(\xi)\,e^{-s_2\xi z}. \tag{3.14}$$

Rezultatele corespunzătoare cazului $s_1 = s_2$ se pot obține prin efectuarea operației de trecere la limită $s_2 \to s_1$.

4. PRESIUNE AXIAL-SIMETRICĂ, NORMALĂ PE SUPRAFAȚA LIMITĂ A SEMISPAȚIULUI

Să presupunem că semispațiul $z \geqslant 0$ este acționat pe frontiera sa $z = 0$ de o presiune normală $p(r)$. În acest caz, condițiile la limită sînt

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -p(r) && \text{pentru} \quad z = 0, \\ \tau_{rz} &= 0 && \text{pentru} \quad z = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Luăm soluția ecuației (3.3) sub forma

$$G(\xi, z) = A(\xi)\,e^{-s_1\xi z} + B(\xi)\,e^{-s_2\xi z}. \tag{4.2}$$

Ținînd seamă de (3.11) și (3.12), precum și de teorema de inversiune, condițiile (4.1) se mai pot scrie :

$$\begin{aligned} \frac{a'}{a}\left(\frac{d^3G}{dz^3}\right)_{z=0} - n\xi^2\left(\frac{dG}{dz}\right)_{z=0} &= -\bar{p}(\xi), \\ \frac{b}{a}\left(\frac{d^2G}{dz^2}\right)_{z=0} + \xi^2 (G)_{z=0} &= 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

unde $\bar{p}(\xi)$ este transformata Hankel de ordinul zero a funcției $p(r)$, adică

$$\bar{p}(\xi) = \int_0^\infty rp(r)\,J_0(\xi r)\,dr. \tag{4.4}$$

Înlocuind (4.2) în relațiile (4.3), obținem sistemul de ecuații :

$$\left(\frac{a'}{a}\,s_1^3 - ns_1\right)A + \left(\frac{a'}{a}\,s_2^3 - ns_2\right)B = \frac{\bar{p}(\xi)}{\xi^3},$$

$$\left(1 + \frac{b}{a}\,s_1^2\right)A + \left(1 + \frac{b}{a}\,s_2^2\right)B = 0,$$

de unde, după unele calcule:

$$A = \frac{a^2k\,\mu\alpha_2\,\overline{p}\,(\xi)}{(aa'-b^2)\,(b+\mu)\,(s_1-s_2)\,\xi^3}, \qquad B = -\frac{a^2k\,\mu\alpha_1\,\overline{p}\,(\xi)}{(aa'-b^2)\,(b+\mu)\,(s_1-s_2)\,\xi^3},$$

cu

$$k = \sqrt{\frac{a'}{a}} \tag{4.5}$$

și

$$\alpha_j = 1 + \frac{b}{a}\,s_j^2, \qquad (j = 1,\ 2). \tag{4.6}$$

Astfel funcția $G(\xi,\ z)$, dată de (4.2), devine

$$G(\xi,\ z) = \frac{a^2k\,\mu\,\overline{p}\,(\xi)}{(aa'-b^2)\,(b+\mu)\,(s_1-s_2)\,\xi^3}\,(\alpha_2\,e^{-s_1\xi z} - \alpha_1\,e^{-s_2\xi z}). \tag{4.7}$$

Înlocuind (4.7) în (3.7) — (3.12), găsim deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului:

$$u\,(r,\ z) = -\frac{ak}{(aa'-b^2)\,(s_1-s_2)}\int_0^\infty \overline{p}\,(\xi)\,(\alpha_2 s_1\,e^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_1(\xi r)\,d\xi, \tag{4.8}$$

$$w\,(r,\ z) = -\frac{a^2k\mu}{(aa'-b^2)\,(b+\mu)\,(s_1-s_2)}\int_0^\infty \overline{p}\,(\xi)\,(\alpha_2\gamma_1\,e^{-s_1\xi z} - \alpha_1\gamma_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_0(\xi r)\,d\xi, \tag{4.9}$$

$$\sigma_r\,(r,\ z) = -\frac{1}{k\,(s_1-s_2)}\int_0^\infty \xi\,\overline{p}\,(\xi)\,(s_1\,e^{-s_1\xi z} - s_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_0(\xi r)\,d\xi +$$

$$+\frac{2ak\,\mu'}{(aa'-b^2)\,(s_1-s_2)\,r}\int_0^\infty \overline{p}\,(\xi)\,(\alpha_2 s_1\,e^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_1(\xi r)\,d\xi, \tag{4.10}$$

$$\sigma_\theta(r,\ z) = -\frac{a^2k\mu}{(aa'-b^2)\,(b+\mu)\,(s_1-s_2)}\int_0^\infty \xi\,\overline{p}\,(\xi)\,(\alpha_2\beta_1 s_1\,e^{-s_1\xi z} -$$

$$-\alpha_1\beta_2 s_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_0(\xi r)\,d\xi - \frac{2ak\,\mu'}{(aa'-b^2)\,(s_1-s_2)\,r}\int_0^\infty \overline{p}\,(\xi)\,(\alpha_2 s_1\,e^{-s_1\xi z} -$$

$$-\alpha_1 s_2\,e^{-s_2\xi z})\,J_1(\xi r)\,d\xi, \tag{4.11}$$

$$\sigma_z\,(r,\ z) = \frac{1}{s_1-s_2}\int_0^\infty \xi\,\overline{p}\,(\xi)\,(s_2\,e^{-s_1\xi z} - s_1\,e^{-s_2\xi z})\,J_0(\xi r)\,d\xi, \tag{4.12}$$

$$\tau_{rz}\,(r,\ z) = \frac{1}{k\,(s_1-s_2)}\int_0^\infty \xi\,\overline{p}\,(\xi)\,(e^{-s_1\xi z} - e^{-s_2\xi z})\,J_1(\xi r)\,d\xi, \tag{4.13}$$

unde

$$\beta_j = m + \frac{b}{a} s_j^2, \qquad (j = 1, 2), \tag{4.14}$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{a} s_j^2, \qquad (j = 1, 2). \tag{4.15}$$

Pentru deplasările și tensiunile corespunzătoare punctelor planului frontieră $z = 0$, obținem din (4.8) – (4.11):

$$u(r, 0) = -\frac{ak - b}{aa' - b^2} \int_0^\infty \overline{p}(\xi) J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.16}$$

$$w(r, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)}{aa' - b^2} \int_0^\infty \overline{p}(\xi) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.17}$$

$$\sigma_r(r, 0) = -\frac{1}{k} \int_0^\infty \xi \overline{p}(\xi) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi + \frac{2\mu'(ak - b)}{(aa' - b^2) r} \int_0^\infty \overline{p}(\xi) J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.18}$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = \left[-\frac{1}{k} + \frac{2\mu'(ak - b)}{aa' - b^2} \right] \int_0^\infty \xi \overline{p}(\xi) J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi - \frac{2\mu'(ak - b)}{(aa' - b^2) r} \int_0^\infty \overline{p}(\xi) J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.19}$$

unde am ținut seamă de egalitățile

$$\begin{gathered} \frac{\alpha_2 s_1 - \alpha_1 s_2}{s_1 - s_2} = \frac{ak - b}{ak}, \quad \frac{\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2}{s_1 - s_2} = -\frac{(b + \mu)(s_1 + s_2)}{a\mu}, \\ \frac{\alpha_2 \beta_1 s_1 - \alpha_1 \beta_2 s_2}{s_1 - s_2} = \frac{b + \mu}{aa'\mu} [aa' - b^2 - 2\mu'(a' - bk)]. \end{gathered} \tag{4.20}$$

Din (4.12) și (4.13) avem evident $\sigma_z(r, 0) = -p(r)$ și $\tau_{rz}(r, 0) = 0$.

Formulele (4.16) – (4.19) pot fi aduse la o formă mai simplă. Într-adevăr, ținînd seamă de (4.4) avem

$$\int_0^\infty \overline{p}(\xi) J_q(\xi r)\, \mathrm{d}\xi = \int_0^\infty J_q(\xi r)\, \mathrm{d}\xi \int_0^\infty t\, p(t) J_0(\xi t)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty t\, p(t)\, \mathrm{d}t \int_0^\infty J_q(\xi r) J_0(\xi t)\, \mathrm{d}\xi, \quad (q = 0, 1). \tag{4.21}$$

Dar [5]

$$\int_0^\infty J_1(\xi r) J_0(\xi t)\, \mathrm{d}\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{r}, & t < r, \\ 0, & t > r, \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\int_0^\infty J_0(\xi r)\, J_0(\xi t)\, \mathrm{d}\xi = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi r} K\left(\dfrac{t}{r}\right), & t < r, \\ \dfrac{2}{\pi t} K\left(\dfrac{r}{t}\right), & t > r, \end{cases} \tag{4.23}$$

unde $K(x)$ este integrala eliptică completă de speța întîi; astfel (4.21) devine :

$$\int_0^\infty \bar{p}(\xi)\, J_1(\xi r)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{r}\int_0^\infty t\, p(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4.24}$$

$$\int_0^\infty \bar{p}(\xi)\, J_0(\xi r)\, \mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{r}\int_0^r t\, p(t)\, K\left(\frac{t}{r}\right)\mathrm{d}t + \int_r^\infty p(t)\, K\left(\frac{r}{t}\right)\mathrm{d}t\right]. \tag{4.25}$$

Ținînd seamă de (4.24), (4.25) precum și de teorema de inversiune, relațiile (4.16)—(4.19) devin :

$$u(r,\, 0) = -\frac{ak - b}{(aa' - b^2)\, r}\int_0^r t\, p(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4.26}$$

$$w(r,\, 0) = \frac{2ak(s_1 + s_2)}{\pi(aa' - b^2)}\left[\frac{1}{r}\int_0^r t\, p(t)\, K\left(\frac{t}{r}\right)\mathrm{d}t + \int_r^\infty p(t)\, K\left(\frac{r}{t}\right)\mathrm{d}t\right], \tag{4.27}$$

$$\sigma_r(r,\, 0) = -\frac{1}{k}\, p(r) + \frac{2\mu'(ak - b)}{(aa' - b^2)\, r^2}\int_0^r t\, p(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4.28}$$

$$\sigma_0(r,\, 0) = \left[-\frac{1}{k} + \frac{2\mu'(ak - b)}{aa' - b^2}\right] p(r) - \frac{2\mu'(ak - b)}{(aa' - b^2)\, r^2}\int_0^r t\, p(t)\, \mathrm{d}t. \tag{4.29}$$

Dacă presiunea $p(r)$ este repartizată pe un cerc de rază R, atunci, notînd cu Q sarcina totală

$$Q = 2\pi\int_0^R t\, p(t)\, \mathrm{d}t, \tag{4.30}$$

din relațiile (4.26) — (4.29) găsim :

$$u(r,\, 0) = \begin{cases} -\dfrac{ak - b}{(aa' - b^2)\, r}\displaystyle\int_0^r t\, p(t)\, \mathrm{d}t, & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak - b)\, Q}{2\pi(aa' - b^2)\, r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{4.31}$$

$$w(r,\, 0) = \begin{cases} \dfrac{2ak(s_1 + s_2)}{\pi(aa' - b^2)}\left[\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r t\, p(t)\, K\left(\frac{t}{r}\right)\mathrm{d}t + \int_r^R p(t)\, K\left(\frac{r}{t}\right)\mathrm{d}t\right], & r \leqslant R, \\ \dfrac{2ak(s_1 + s_2)}{\pi(aa' - b^2)\, r}\displaystyle\int_0^R t\, p(t)\, K\left(\frac{t}{r}\right)\mathrm{d}t, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{4.32}$$

$$\sigma_r(r,0)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k}p(r)+\dfrac{2\mu'(ak-b)}{(aa'-b^2)r^2}\displaystyle\int_0^r t\,p(t)\,dt, & r<R,\\[2ex] \dfrac{\mu'(ak-b)Q}{\pi(aa'-b^2)r^2}, & r>R,\end{cases} \tag{4.33}$$

$$\sigma_\theta(r,0)=\begin{cases}\left[-\dfrac{1}{k}+\dfrac{2\mu'(ak-b)}{aa'-b^2}\right]p(r)-\dfrac{2\mu'(ak-b)}{(aa'-b^2)r^2}\displaystyle\int_0^r t\,p(t)\,dt, & r<R,\\[2ex] -\dfrac{\mu'(ak-b)Q}{\pi(aa'-b^2)r^2}, & r>R.\end{cases} \tag{4.34}$$

Observăm că în punctele $r>R$, $z=0$, deplasarea radială u și tensiunile normale σ_r și σ_θ nu depind de felul în care este repartizată presiunea $p(r)$, ci numai de sarcina totală Q.

Să mai observăm, că pentru $r>R$, $z=0$, avem

$$\frac{w(r,0)}{u(r,0)}=-\frac{4ak(s_1+s_2)}{(ak-b)Q}\int_0^R t\,p(t)\;K\left(\frac{t}{r}\right)dt,$$

de unde, ținînd seamă că $K(0)=\dfrac{\pi}{2}$,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{w(r,0)}{u(r,0)}=-\frac{ak(s_1+s_2)}{ak-b}. \tag{4.35}$$

Ținînd seamă de egalitățile

$$J_0(0)=1,\qquad J_1(0)=0,\qquad \lim_{r\to 0}\frac{J_1(\xi r)}{r}=\frac{1}{2}\xi, \tag{4.36}$$

din (4.8)—(4.13) obținem pentru punctele axei Oz:

$$u(0,z)=\tau_{rz}(0,z)=0, \tag{4.37}$$

$$w(0,z)=-\frac{a^2k\mu}{(aa'-b^2)(b+\mu)(s_1-s_2)}\int_0^\infty \bar{p}(\xi)(\alpha_2\gamma_1 e^{-s_1\xi z}-\alpha_1\gamma_2 e^{-s_2\xi z})\,d\xi, \tag{4.38}$$

$$\sigma_r(0,z)=\sigma_\theta(0,z)=\frac{1}{s_1-s_2}\int_0^\infty \xi\bar{p}(\xi)(\delta_2 s_1 e^{-s_1\xi z}-\delta_1 s_2 e^{-s_2\xi z})\,d\xi, \tag{4.39}$$

$$\sigma_z(0,z)=\frac{1}{s_1-s_2}\int_0^\infty \xi\bar{p}(\xi)(s_2 e^{-s_1\xi z}-s_1 e^{-s_2\xi z})\,d\xi, \tag{4.40}$$

unde

$$\delta_j=-\frac{1}{k}+\frac{ak\mu'}{aa'-b^2}\alpha_j,\quad (j=1,2). \tag{4.41}$$

5. SARCINĂ NORMALĂ, UNIFORM DISTRIBUITĂ PE ARIA UNUI CERC

Această problemă este un caz particular al problemei precedente. În acest caz

$$p(r) = \begin{cases} p = \text{const.}, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \tag{5.1}$$

Funcția $\bar{p}(\xi)$ se obține din (4.4):

$$\bar{p}(\xi) = p \int_0^R r J_0(\xi r)\, \mathrm{d}r$$

sau

$$\bar{p}(\xi) = \frac{pR}{\xi} J_1(R\xi). \tag{5.2}$$

Expresiile (4.8) — (4.13) ale deplasărilor și tensiunilor corespunzătoare unui punct oarecare din interiorul semispațiului devin:

$$u(r,z) = -\frac{akpR}{(aa' - b^2)(s_1 - s_2)} \int_0^\infty (\alpha_2 s_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_1(r\xi) J_1(R\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}, \tag{5.3}$$

$$w(r,z) = -\frac{a^2 k\mu pR}{(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)} \int_0^\infty (\alpha_2\gamma_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - \alpha_1\gamma_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) \times \tag{5.4}$$

$$\times J_0(r\xi) J_1(R\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},$$

$$\sigma_r(r,z) = -\frac{pR}{k(s_1 - s_2)} \int_0^\infty (s_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - s_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_0(r\xi) J_1(R\xi)\, \mathrm{d}\xi + \tag{5.5}$$

$$+ \frac{2ak\mu' pR}{(aa' - b^2)(s_1 - s_2) r} \int_0^\infty (\alpha_2 s_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_1(r\xi) J_1(R\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi},$$

$$\sigma_\theta(r,z) = -\frac{a^2 k\mu pR}{(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)} \int_0^\infty (\alpha_2\beta_1 s_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - \alpha_1\beta_2 s_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) \times$$

$$\times J_0(r\xi) J_1(R\xi)\, \mathrm{d}\xi - \frac{2ak\mu' pR}{(aa' - b^2)(s_1 - s_2) r} \int_0^\infty (\alpha_2 s_1 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} -$$

$$- \alpha_1 s_2 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_1(r\xi) J_1(R\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}, \tag{5.6}$$

$$\sigma_z(r,z) = \frac{pR}{s_1 - s_2} \int_0^\infty (s_2 \mathrm{e}^{-s_1\xi z} - s_1 \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_0(r\xi) J_1(R\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{5.7}$$

$$\tau_{rz}(r,z) = \frac{pR}{k(s_1 - s_2)} \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-s_1\xi z} - \mathrm{e}^{-s_2\xi z}) J_1(r\xi) J_1(R\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{5.8}$$

Integralele de tipul

$$I(g, h; l) = \int_0^\infty J_g(r\xi)\, J_h(R\xi)\, e^{-s\xi z}\, \xi^l\, d\xi \tag{5.9}$$

— dintre care în (5.3) — (5.8) apar $I(1,1;-1)$, $I(0,1;-1)$, $I(0,1;0)$, $I(1,1;0)$ — au fost evaluate și tabelate în [6]. Astfel, calculul numeric al deplasărilor și tensiunilor se poate efectua cu ușurință.

În punctele planului frontieră $z = 0$, obținem din (4.31) — (4.34), punînd $p(r) = p = \text{const}$.

$$u(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{(ak - b)\, pr}{2(aa' - b^2)}, & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak - b)\, pR^2}{2(aa' - b^2)\, r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{5.10}$$

$$w(r, 0) = \begin{cases} \dfrac{2ak(s_1 + s_2)\, pR}{\pi(aa' - b^2)} E\left(\dfrac{r}{R}\right), & r \leqslant R, \\ \dfrac{2ak(s_1+s_2)\, pr}{\pi(aa' - b^2)}\left[E\left(\dfrac{R}{r}\right) - \left(1 - \dfrac{R^2}{r^2}\right) K\left(\dfrac{R}{r}\right)\right], & r \geqslant R, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\sigma_r(r, 0) = \sigma_\theta(r, 0) = \left[-\frac{1}{k} + \frac{\mu'(ak - b)}{aa' - b^2}\right] p, \qquad r < R, \tag{5.12}$$

$$\sigma_r(r, 0) = -\sigma_\theta(r, 0) = \frac{\mu'(ak - b)\, pR^2}{(aa' - b^2)\, r^2}, \qquad r > R, \tag{5.13}$$

unde $E(x)$ este integrala eliptică completă de speța a doua.

Deplasările și tensiunile corespunzătoare punctelor axei Oz se obțin din (5.3) — (5.8), punînd $r = 0$. Ținînd seamă de egalitățile (4.36) precum și de relațiile :

$$\int_0^\infty e^{-\xi z} J_1(R\xi)\, d\xi = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right), \qquad (\mathcal{R}e\, z > 0), \tag{5.14}$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi z}\, J_1(R\xi)\, \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{R}(\sqrt{R^2 + z^2} - z), \qquad (\mathcal{R}e\, z > 0), \tag{5.15}$$

obținem :

$$w(0, z) = -\frac{a^2 k \mu p}{(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)} \left[\alpha_2\gamma_1\left(\sqrt{R^2 + s_1^2 z^2} - s_1 z\right) - \right.$$

$$\left. - \alpha_1\gamma_2\left(\sqrt{R^2 + s_2^2 z^2} - s_2 z\right)\right], \tag{5.16}$$

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z) = \frac{p}{s_1 - s_2}\left[\delta_2 s_1\left(1 - \frac{s_1 z}{\sqrt{R^2 + s_1^2 z^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \delta_1 s_2\left(1 - \frac{s_2 z}{\sqrt{R^2 + s_2^2 z^2}}\right)\right], \tag{5.17}$$

$$\sigma_z(0, z) = \frac{p}{s_1 - s_2}\left[s_2\left(1 - \frac{s_1 z}{\sqrt{R^2 + s_1^2 z^2}}\right) - s_1\left(1 - \frac{s_2 z}{\sqrt{R^2 + s_2^2 z^2}}\right)\right], \tag{5.18}$$

$$u(0, z) = \tau_{rz}(0, z) = 0. \tag{5.19}$$

Atît din relația (5.11) cît și din (5.16) obținem deplasarea din centrul cercului de încărcare :

$$w(0,0) = \frac{ak(s_1 + s_2)pR}{aa' - b^2}. \tag{5.20}$$

6. SARCINĂ NORMALĂ CONCENTRATĂ

Să presupunem că asupra semispațiului elastic acționează forța concentrată P, aplicată în punctul O și îndreptată în sensul pozitiv al axei Oz.

În acest caz, expresia funcției $\bar{p}(\xi)$ se poate obține din (5.2) făcînd ca raza R a cercului de încărcare să tindă spre zero cu condiția

$$p\,\pi\,R^2 = P. \tag{6.1}$$

Făcînd uz de a treia egalitate din (4.36), obținem

$$\bar{p}(\xi) = \frac{P}{2\pi}. \tag{6.2}$$

Înlocuind (6.2) în relațiile (4.8)—(4.13) și ținînd seamă de (5.14) precum și de egalitățile :

$$\int_0^\infty e^{-\xi z} J_0(r\xi)\,d\xi = \frac{1}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (\mathcal{R}e\ z > 0), \tag{6.3}$$

$$\int_0^\infty \xi e^{-\xi z} J_0(r\xi)\,d\xi = \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (\mathcal{R}e\ z > 0), \tag{6.4}$$

$$\int_0^\infty \xi e^{-\xi z} J_1(r\xi)\,d\xi = \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (\mathcal{R}e\ z > 0), \tag{6.5}$$

obținem deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului :

$$u(r, z) = -\frac{akP}{2\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)r}\left[\alpha_2 s_1\left(1 - \frac{s_1 z}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \alpha_1 s_2\left(1 - \frac{s_2 z}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right)\right], \tag{6.6}$$

$$w(r, z) = -\frac{a^2 k \mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)}\left[\frac{\alpha_2\gamma_1}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{\alpha_1\gamma_2}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right], \tag{6.7}$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{Pz}{2\pi k(s_1 - s_2)}\left[\frac{s_1^2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{s_2^2}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] +$$

$$+ \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)r^2}\left[\alpha_2 s_1\left(1 - \frac{s_1 z}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}}\right) - \alpha_1 s_2\left(1 - \frac{s_2 z}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right)\right], \tag{6.8}$$

$$\sigma_\theta(r, z) = -\frac{a^2 k \mu P z}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)}\left[\frac{\alpha_2\beta_1 s_1^2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha_1\beta_2 s_2^2}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] -$$

$$- \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)r^2}\left[\alpha_2 s_1\left(1 - \frac{s_1 z}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}}\right) - \alpha_1 s_2\left(1 - \frac{s_2 z}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right)\right], \tag{6.9}$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{Pz}{2\pi k(s_1 - s_2)}\left[\frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{6.10}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{Pr}{2\pi k(s_1 - s_2)}\left[\frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{6.11}$$

Din relațiile (6.10) și (6.11) rezultă că

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{rz}} = \frac{z}{r},$$

adică în oricare punct al semispațiului efortul unitar total de pe o suprafață paralelă cu planul frontieră este dirijat spre punctul de aplicație al forței concentrate.

Pentru punctele planului $z = 0$ obținem din (6.6) — (6.11) :

$$u(r, 0) = -\frac{(ak - b)P}{2\pi(aa' - b^2)r}, \tag{6.12}$$

$$w(r, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)P}{2\pi(aa' - b^2)r}, \tag{6.13}$$

$$\sigma_r(r, 0) = -\sigma_\theta(r, 0) = \frac{\mu'(ak - b)P}{\pi(aa' - b^2)r^2}, \tag{6.14}$$

$$\sigma_z(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) = 0, \qquad r \neq 0, \tag{6.15}$$

formule care sînt în concordanță cu formulele (4.31)—(4.35).

Pentru punctele axei Oz obținem după unele calcule :

$$u(0, z) = 0, \qquad z \neq 0, \tag{6.16}$$

$$w(0, z) = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{ak - b}{aa' - b^2}\right)\frac{P}{2\pi z}, \tag{6.17}$$

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z) = \left[1 - \mu'\frac{(aa' - b^2)(b + \mu) + b\mu(ak - b)}{a\mu(aa' - b^2)}\right]\frac{P}{2\pi z^2}, \tag{6.18}$$

$$\sigma_z(0, z) = -\left(k + \frac{aa' - b^2 - 2b\mu}{a\mu}\right)\frac{P}{2\pi z^2}, \tag{6.19}$$

$$\tau_{rz}(0, z) = 0, \qquad z \neq 0. \tag{6.20}$$

7. SARCINĂ NORMALĂ, UNIFORM DISTRIBUITĂ PE CIRCUMFERINȚA UNUI CERC

Să considerăm că semispațiul elastic este acționat de o sarcină P, uniform distribuită pe circumferința cercului : $r = R$, $z = 0$. Pentru a obține expresia funcției $\bar{p}(\xi)$ corespunzătoare acestui caz, vom presupune întîi că sarcina este uniform distribuită pe coroana circulară $R < r < R'$, $z = 0$. Presiunea $p_0(r)$ este dată deci de

$$p_0(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{P}{\pi(R'^2 - R^2)}, & R < r < R', \\ 0, & r > R'. \end{cases}$$

Transformata Hankel a acestei funcții este

$$\bar{p}_0(\xi) = \frac{P}{\pi(R'^2 - R^2)}\int_R^{R'} rJ_0(\xi r)\,dr.$$

Efectuînd operația de trecere la limită $R' \to R$, obținem

$$\bar{p}(\xi) = \frac{P}{2\pi}J_0(R\xi). \tag{7.1}$$

Înlocuind (7.1) în relațiile (4.8) — (4.13), obținem deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului :

$$u(r, z) = -\frac{akP}{2\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)}\int_0^\infty (\alpha_2 s_1 e^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_1(r\xi)\, d\xi, \tag{7.2}$$

$$w(r, z) = -\frac{a^2 k\mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)}\int_0^\infty (\alpha_2\gamma_1 e^{-s_1\xi z} - \alpha_1\gamma_2 e^{-s_1\xi z}) J_0(R\xi) J_0(r\xi)\, d\xi, \tag{7.3}$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{P}{2\pi k(s_1 - s_2)}\int_0^\infty \xi(s_1 e^{-s_1\xi z} - s_2 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_0(r\xi)\, d\xi + \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2) r}\int_0^\infty (\alpha_2 s_1 e^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_1(r\xi)\, d\xi, \tag{7.4}$$

$$\sigma_\theta(r, z) = -\frac{a^2 k\mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)}\int_0^\infty \xi(\alpha_2\beta_1 s_1 e^{-s_1\xi z} - \alpha_1\beta_2 s_2 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_0(r\xi)\, d\xi - \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2) r}\int_0^\infty (\alpha_2 s_1 e^{-s_1\xi z} - \alpha_1 s_2 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_1(r\xi)\, d\xi, \tag{7.5}$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{P}{2\pi(s_1 - s_2)}\int_0^\infty \xi(s_2 e^{-s_1\xi z} - s_1 e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_0(r\xi)\, d\xi, \tag{7.6}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{P}{2\pi k(s_1 - s_2)}\int_0^\infty \xi(e^{-s_1\xi z} - e^{-s_2\xi z}) J_0(R\xi) J_1(r\xi)\, d\xi. \tag{7.7}$$

În aceste expresii apar integrale de tipul (5.9) — anume $I(0,1\,;\,0)$, $I(0,0\,;\,0)$, $I(0,0\,;\,1)$, $I(0,1\,;\,1)$ — evaluate și tabelate în [6]. Avem, de exemplu,

$$I(0,0\,;\,0) = \int_0^\infty J_0(r\xi) J_0(R\xi) e^{-s_j\xi z}\, d\xi = \frac{\rho_j K(\rho_j)}{\pi(Rr)^{\frac{1}{2}}}, \quad (j = 1, 2),$$

$$I(0,0\,;\,1) = \int_0^\infty J_0(r\xi) J_0(R\xi) e^{-s_j\xi z}\xi\, d\xi = \frac{s_j z\rho_j^3 E(\rho_j)}{4\pi(1 - \rho_j^2)(Rr)^{\frac{3}{2}}}, \quad (j=1,2),$$

unde

$$\rho_j^2 = \frac{4Rr}{(R + r)^2 + s_j^2 z^2}, \tag{7.8}$$

iar $K(x)$ și $E(x)$ reprezintă — ca și înainte — integralele eliptice complete de prima, respectiv a doua speță. Astfel, expresiile deplasării w și a tensiunii σ_z devin :

$$w(r,\ z) = \frac{a^2 k \mu P \left[\alpha_1 \gamma_2 \rho_2\, K(\rho_2) - \alpha_2 \gamma_1 \rho_1\, K(\rho_1)\right]}{2\pi^2 (aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)(Rr)^{\frac{1}{2}}}, \tag{7.9}$$

$$\sigma_z(r,\ z) = \frac{Pz}{8\pi^2 k (s_1 - s_2)(Rr)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{\rho_1^3 E(\rho_1)}{1 - \rho_1^2} - \frac{\rho_2^3 E(\rho_2)}{1 - \rho_2^2}\right]. \tag{7.10}$$

Ținînd seamă de relația

$$\int_0^\infty \xi J_0(R\xi) J_0(r\xi)\, \mathrm{d}\xi = 0, \qquad (r \neq R), \tag{7.11}$$

precum și de relațiile (4.22) și (4.23), obținem pentru deplasările și tensiunile corespunzătoare punctelor planului $z = 0$:

$$u(r,\ 0) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ -\dfrac{(ak - b)P}{2\pi (aa' - b^2) r}, & r > R, \end{cases} \tag{7.12}$$

$$w(r,\ 0) = \begin{cases} \dfrac{ak(s_1 + s_2)P}{\pi^2 (aa' - b^2) R} K\left(\dfrac{r}{R}\right), & r < R, \\ \dfrac{ak(s_1 + s_2)P}{\pi^2 (aa' - b^2) r} K\left(\dfrac{R}{r}\right), & r > R, \end{cases} \tag{7.13}$$

$$\sigma_r(r,\ 0) = -\sigma_\theta(r,\ 0) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{\mu'(ak - b)P}{\pi (aa' - b^2) r^2}, & r > R, \end{cases} \tag{7.14}$$

$$\sigma_z(r,\ 0) = \tau_{rz}(r,\ 0) = 0, \qquad r \neq R. \tag{7.15}$$

Pentru punctele axei Oz obținem, ținînd seamă de (4.36), (6.3) și (6.4) :

$$u(0,\ z) = \tau_{rz}(0,\ z) = 0, \tag{7.16}$$

$$w(0,\ z) = -\frac{a^2 k \mu P}{2\pi (aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)} \left(\frac{\alpha_2 \gamma_1}{\sqrt{R^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\sqrt{R^2 + s_2^2 z^2}}\right), \tag{7.17}$$

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z) = \frac{Pz}{2\pi (s_1 - s_2)} \left[\frac{\delta_2 s_1^2}{(R^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta_1 s_2^2}{(R^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right], \tag{7.18}$$

$$\sigma_z(0,\ z) = \frac{Pz}{2\pi k (s_1 - s_2)} \left[\frac{1}{(R^2 + s_1^2 z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + s_2^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \tag{7.19}$$

Atît din (7.13) cît și din (7.17), obținem deplasarea în punctul O:

$$w(0, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)P}{2\pi(aa' - b^2)R}. \tag{7.20}$$

Notînd cu $w^*(r, 0)$ deplasarea în direcția axei Oz a punctului $(r, 0)$ în cazul unei sarcini totale P, uniform distribuite pe cercul $r < R$, avem, ținînd seamă de (5.11) și (7.13),

$$\frac{w^*(r, 0)}{w(r, 0)} = \begin{cases} 2\dfrac{E\left(\dfrac{r}{R}\right)}{K\left(\dfrac{r}{R}\right)}, & r < R, \\ 2 - 2\dfrac{r^2}{R^2}\dfrac{K\left(\dfrac{R}{r}\right) - E\left(\dfrac{R}{r}\right)}{K\left(\dfrac{R}{r}\right)}, & r > R. \end{cases} \tag{7.21}$$

În particular

$$\frac{w^*(0, 0)}{w(0, 0)} = 2,$$

adică deplasarea punctului O în cazul în care o sarcină P este uniform distribuită pe aria unui cerc cu centrul în O și de rază R, este de două ori mai mare decît deplasarea aceluiași punct în cazul în care aceeași sarcină P este uniform distribuită pe circumferința aceluiași cerc.

De asemenea, din (7.21) deducem

$$\lim_{r \to \infty} \frac{w^*(r, 0)}{w(r, 0)} = 1.$$

8. SEMISPAȚIU ACȚIONAT DE O ȘTANȚĂ AXIAL-SIMETRICĂ

Să presupunem că semispațiul elastic $z \geqslant 0$ este acționat de o ștanță axial-simetrică, absolut rigidă, axa ștanței coincizînd cu axa Oz. Fie P forța care acționează asupra ștanței de-a lungul axei Oz, iar

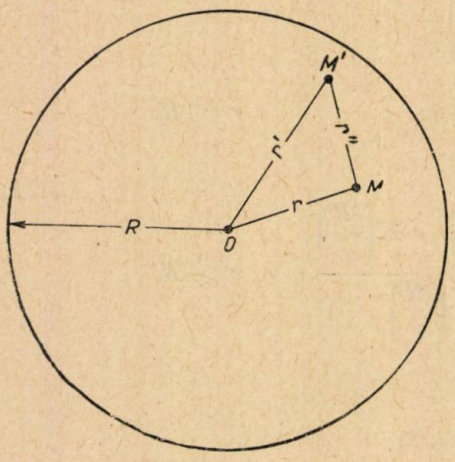
$$z = -\psi(r), \qquad [\psi(0) = 0], \tag{8.1}$$

ecuația bazei ștanței. Să notăm raza cercului de contact cu R iar penetrația ștanței (deplasarea punctului O) cu w_0, ambele mărimi fiind deocamdată necunoscute.

Presiunea $p(r)$ a ştanţei asupra semispaţiului se obţine — ţinînd seamă de (6.13) — din ecuaţia

$$\frac{ak(s_1+s_2)}{2\pi(aa'-b^2)}\iint_S \frac{p(r')\,dS}{r''} = w_0 - \psi(r), \qquad (0<r<R), \tag{8.2}$$

unde S este domeniul cercului $r<R$, $z=0$, dS este elementul de arie în punctul M' iar r'' este distanţa dintre punctele M şi M' (figura).



Se ştie [7] că ecuaţia (8.2) are soluţia

$$p(r) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{F(R)}{\sqrt{R^2-r^2}} - \int_r^R \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right], \quad r<R, \tag{8.3}$$

unde

$$F(r) = \frac{4(aa'-b^2)}{ak(s_1+s_2)}\left[w_0 - r\int_0^r \frac{\psi'(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right], \quad r<R. \tag{8.4}$$

În cazul în care curba meridiană (8.1) nu are puncte anguloase, presiunea $p(r)$ trebuie să fie mărginită şi deci este necesar să avem

$$F(R) = 0, \tag{8.5}$$

adică

$$w_0 = R\int_0^R \frac{\psi'(t)\,dt}{\sqrt{R^2-t^2}}. \tag{8.6}$$

În acest caz, expresia presiunii $p(r)$ devine

$$p(r) = -\frac{1}{2\pi}\int_r^R \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \quad r<R. \tag{8.7}$$

Exprimînd faptul că rezultanta forţelor $p(r)dS$ este P, obţinem

$$\iint_S p(r)\,dS = P,$$

sau

$$2\pi\int_0^R rp(r)\,dr = P. \tag{8.8}$$

Înlocuind (8.3) în (8.8), obținem după unele transformări simple

$$\int_0^R F(t)\,\mathrm{d}t = P. \tag{8.9}$$

Înlocuind (8.4) în (8.9) obținem

$$Rw_0 - \int_0^R \sqrt{R^2 - t^2}\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{ak(s_1 + s_2)\,P}{4\,(aa' - b^2)},$$

sau, ținînd seamă de (8.6),

$$\int_0^R \frac{t^2\,\psi'(t)}{\sqrt{R^2 - t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{ak(s_1 + s_2)\,P}{4\,(aa' - b^2)}. \tag{8.10}$$

Ecuația (8.10) determină raza R a cercului de contact iar (8.6) determină penetrația w_0.

În cazul unei ștanțe cilindrice (cu bază plană), relația (8.5) nu are loc, presiunea fiind infinită pentru $r = R$. În acest caz, raza cercului de contact este egală cu raza dată a ștanței iar penetrația w_0 se obține din (8.9).

Îndată ce presiunea $p(r)$ este cunoscută, deplasările și tensiunile dintr-un punct oarecare al semispațiului se pot calcula cu ajutorul formulelor (4.8)—(4.13). Reamintim că în aceste formule $\overline{p}(\xi)$ este transformata Hankel de ordinul zero al funcției $p(r)$. Să arătăm că $\overline{p}(\xi)$ poate fi exprimat foarte simplu cu ajutorul funcției $F(r)$.

Ținînd seamă de (4.3), (8.3) și de faptul că $p(r) = 0$ pentru $r > R$, avem

$$\overline{p}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^R rJ_0(\xi r)\left[\frac{F(R)}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \int_r^R \frac{F'(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - r^2}}\right]\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{F(R)}{2\pi}\int_0^R \frac{rJ_0(\xi r)}{\sqrt{R^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r - \frac{1}{2\pi}\int_0^R F'(t)\,\mathrm{d}t\int_0^t \frac{rJ_0(\xi r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r. \tag{8.11}$$

Dar [5]

$$\int_0^t \frac{rJ_0(r\xi)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\,\mathrm{d}r = \int_0^t J_0(\xi\sqrt{t^2 - \lambda^2})\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\sin \xi t}{\xi},$$

astfel că relația (8.11) devine

$$\overline{p}(\xi) = \frac{F(R)\sin R\xi}{2\pi\xi} - \frac{1}{2\pi\xi}\int_0^R F'(t)\sin \xi t\,\mathrm{d}t,$$

sau integrînd prin părți

$$\overline{p}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^R F(t)\cos \xi t\,\mathrm{d}t. \tag{8.12}$$

Astfel, deplasările și tensiunile pot fi calculate din (4.8)—(4.13) unde $\overline{p}(\xi)$ este dat de (8.12) și (8.4).

Pentru punctele planului $z = 0$, obținem din (4.6) și (4.17)

$$u(r, 0) = -\frac{ak - b}{2\pi (aa' - b^2)} \int_0^R F(t)\, dt \int_0^\infty J_1(\xi r) \cos \xi t\, d\xi, \tag{8.13}$$

$$w(r, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)}{2\pi (aa' - b^2)} \int_0^R F(t)\, dt \int_0^\infty J_0(\xi r) \cos \xi t\, d\xi. \tag{8.14}$$

Dar [5]

$$\int_0^\infty J_1(\xi r) \cos \xi t\, d\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{r}, & t < r, \\ -\dfrac{t - \sqrt{t^2 - r^2}}{r\sqrt{t^2 - r^2}}, & t > r, \end{cases} \tag{8.15}$$

$$\int_0^\infty J_0(\xi r) \cos \xi t\, d\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & t < r, \\ 0, & t > r, \end{cases} \tag{8.16}$$

astfel că — ținînd seamă și de (8.9) — relațiile (8.13) și (8.14) devin:

$$u(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{ak - b}{2\pi (aa' - b^2) r} \left[P - \displaystyle\int_r^R \frac{tF(t)\, dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right], & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak - b) P}{2\pi (aa' - b^2) r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{8.17}$$

$$w(r, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)}{2\pi (aa' - b^2)} \int_0^R \frac{F(t)\, dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}, \qquad r \geqslant R, \tag{8.18}$$

Pentru $r < R$, obținem din (8.14)

$$w(r, 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)}{2\pi (aa' - b^2)} \int_0^r \frac{F(t)\, dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}, \qquad r \leqslant R,$$

care după unele calcule se reduce la

$$w(r, 0) = w_0 - \psi(r), \qquad r \leqslant R,$$

așa cum era de așteptat.

Pentru tensiunile normale $\sigma_r(r, 0)$ și $\sigma_\theta(r, 0)$ obținem din (4.18) și (4.19):

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) &= -\frac{1}{k} p(r) - \frac{2\mu'}{r} u(r, 0), \\ \sigma_\theta(r, 0) &= \left[-\frac{1}{k} + \frac{2\mu'(ak - b)}{aa' - b^2} \right] p(r) + \frac{2\mu'}{r} u(r, 0), \end{aligned} \tag{8.19}$$

unde $p(r)$ și $u(r, 0)$ sînt dați de (8.3) respectiv (8.17).

9. ȘTANȚĂ CILINDRICĂ

În cazul unei ștanțe cilindrice de rază R, avem

$$\psi(r) \equiv 0, \qquad r < R, \tag{9.1}$$

astfel că pentru funcția $F(r)$ obținem din (8.4):

$$F(r) = \frac{4(aa' - b^2)}{ak(s_1 + s_2)} w_0, \qquad r < R. \tag{9.2}$$

Ecuația (8.9) devine

$$\frac{4(aa' - b^2)}{ak(s_1 + s_2)} R w_0 = P, \tag{9.3}$$

relație care determină penetrația w_0 a ștanței. Relația (9.2) se poate deci scrie

$$F(r) = \frac{P}{R}. \tag{9.4}$$

Din (8.12) obținem expresia funcției $\bar{p}(\xi)$:

$$\bar{p}(\xi) = \frac{P \sin R\xi}{2\pi R\xi}. \tag{9.5}$$

Înlocuind (9.5) în relațiile (4.8)—(4.13) obținem pentru deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului

$$u(r, z) = -\frac{akP}{2\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)R}[\alpha_2 s_1 H_{10}(r, s_1 z) - \alpha_1 s_2 H_{10}(r, s_2 z)], \tag{9.6}$$

$$w(r, z) = -\frac{a^2 k \mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)R}[\alpha_2 \gamma_1 H_{00}(r, s_1 z) - \alpha_1 \gamma_2 H_{00}(r, s_2 z)], \tag{9.7}$$

$$\sigma_r(r, z) = -\frac{P}{2\pi k(s_1 - s_2)R}[s_1 H_{01}(r, s_1 z) - s_2 H_{01}(r, s_2 z)] + \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)Rr}[\alpha_2 s_1 H_{10}(r, s_1 z) - \alpha_1 s_2 H_{10}(r, s_2 z)], \tag{9.8}$$

$$\sigma_0(r, z) = -\frac{a^2 k \mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)R}[\alpha_2 \beta_1 s_1 H_{01}(r, s_1 z) - \alpha_1 \beta_2 s_2 H_{01}(r, s_2 z)] - \frac{ak\mu' P}{\pi(aa' - b^2)(s_1 - s_2)Rr}[\alpha_2 s_1 H_{10}(r, s_1 z) - \alpha_1 s_2 H_{10}(r, s_2 z)], \tag{9.9}$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{P}{2\pi(s_1 - s_2)R}[s_2 H_{01}(r, s_1 z) - s_1 H_{01}(r, s_2 z)], \tag{9.10}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{P}{2\pi k(s_1 - s_2)R}[H_{11}(r, s_1 z) - H_{11}(r, s_2 z)], \tag{9.11}$$

unde

$$H_{gl}(r, z) = \int_0^\infty e^{-\xi z} J_g(r\xi)\, \xi^{l-1} \sin R\xi \, d\xi, \quad (g, l = 0,1). \tag{9.12}$$

Avem însă [5]:

$$H_{00}(r, z) = \int_0^\infty e^{-\xi z} J_0(r\xi) \sin R\xi \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \arcsin \frac{2R}{\sqrt{z^2 + (r + R)^2} + \sqrt{z^2 + (r - R)^2}}, \tag{9.13}$$

$$H_{10}(r, z) = \frac{r}{2}[H_{01}(r, z) + H_{21}(r, z)], \tag{9.14}$$

iar [8]

$$H_{g1}(r, z) = -\mathcal{I}m \int_0^\infty e^{-\xi(z+iR)} J_g(r\xi)\, d\xi =$$

$$= -\mathcal{I}m\left\{\frac{1}{\sqrt{(z + iR)^2 + r^2}}\left(\frac{\sqrt{(z + iR)^2 + r^2} - z - iR}{r}\right)^g\right\}, \quad (g = 0, 1, 2) \tag{9.15}$$

luîndu-se acea valoare a radicalului care tinde către $z + iR$ cînd r tinde către zero. Astfel, deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului pot fi determinate cu ușurință.

Deplasările și tensiunile corespunzătoare punctelor planului $z = 0$ se pot obține din (9.6) — (9.11), observînd că în acest caz din (9.13) și (9.15) rezultă:

$$H_{00}(r, 0) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & r \leqslant R, \\ \arcsin \dfrac{R}{r}, & r \geqslant R, \end{cases}$$

$$H_{01}(r, 0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

$$H_{11}(r, 0) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \dfrac{R}{r\sqrt{r^2 - R^2}} & r > R, \end{cases}$$

$$H_{21}(r,\ 0) = \begin{cases} -\dfrac{(\sqrt{R^2 - r^2} - R)^2}{r^2\sqrt{R^2 - r^2}}, & r < R, \\ \dfrac{2R}{r^2}, & r > R, \end{cases}$$

iar acum din (9.14)

$$H_{10}(r,\ 0) = \begin{cases} \dfrac{R - \sqrt{R^2 - r^2}}{r}, & r < R, \\ \dfrac{2R}{r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Putem însă proceda și altfel, folosind rezultatele paragrafului precedent. Din (8.17), ținînd seamă de (9.4), obținem

$$u(r,\ 0) = \begin{cases} -\dfrac{(ak - b)P}{2\pi(aa' - b^2)r}\left(1 - \dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}\right), & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak - b)P}{2\pi(aa' - b^2)r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{9.16}$$

iar din (8.18)

$$w(r,\ 0) = \frac{ak(s_1 + s_2)P}{2\pi(aa' - b^2)R} \operatorname{arc\,sin}\frac{R}{r}, \qquad r \geqslant R,$$

sau, ținînd seamă de (9.3),

$$w(r,\ 0) = \frac{2}{\pi} w_0 \operatorname{arc\,sin}\frac{R}{r}, \qquad r \geqslant R. \tag{9.17}$$

Tensiunile normale $\sigma_r(r,\ 0)$ și $\sigma_\theta(r,\ 0)$ se obțin din (8.19) ținînd seamă că — după cum rezultă din (8.3) sau din (9.10) — avem

$$p(r) = \frac{P}{2\pi R\sqrt{R^2 - r^2}}, \qquad r < R, \tag{9.18}$$

și evident $p(r) = 0$ pentru $r > R$. Formulele (9.17) și (9.18) coincid cu cele găsite de Elliott [9].

Deplasările și tensiunile corespunzătoare punctelor axei Oz, se pot obține din relațiile (9.6)—(9.11) sau din (4.37)—(4.40), observînd că din (9.13) — (9.15) rezultă :

$$H_{00}(0,\ z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi z} \sin R\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{z},$$

$$H_{01}(0,\ z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi z} \sin R\xi\, \mathrm{d}\xi = \frac{R}{R^2 + z^2},$$

$$H_{10}(0,\ z) = H_{11}(0,\ z) = 0,\quad \left(\frac{H_{10}(r,\ z)}{r}\right)_{r=0} = \frac{R}{2\,(R^2 + z^2)}.$$

Se obține

$$u(0,\ z) = \tau_{rz}(0,\ z) = 0, \tag{9.19}$$

$$w(0,\ z) = -\frac{a^2 k \mu P}{2\pi(aa' - b^2)(b + \mu)(s_1 - s_2)R}\left(\alpha_2\gamma_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{s_1 z} - \right.$$

$$\left. - \alpha_1\gamma_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{R}{s_2 z}\right), \tag{9.20}$$

$$\sigma_r(0,\ z) = \sigma_\theta(0,\ z) = \frac{P}{2\pi(s_1 - s_2)}\left(\frac{\delta_2 s_1}{R^2 + s_1^2 z^2} - \frac{\delta_1 s_2}{R^2 + s_2^2 z^2}\right), \tag{9.21}$$

$$\sigma_z(0,\ z) = \frac{P}{2\pi(s_1 - s_2)}\left(\frac{s_2}{R^2 + s_1^2 z^2} - \frac{s_1}{R^2 + s_2^2 z^2}\right). \tag{9.22}$$

10. ȘTANȚĂ AVÎND CA BAZĂ UN PARABOLOID DE ROTAȚIE

Să considerăm cazul unei ștanțe avînd ca bază un paraboloid de rotație

$$-z = \psi(r) = Ar^2, \qquad A = \text{const.} \tag{10.1}$$

Din (8.10) obținem pentru raza R a cercului de contact :

$$R^3 = \frac{3ak(s_1 + s_2)P}{16(aa' - b^2)A}, \tag{10.2}$$

iar din (8.6) obținem penetrația w_0 a ștanței :

$$w_0 = 2AR^2. \tag{10.3}$$

Din (8.4) găsim pentru funcția $F(r)$, ținînd seamă de (10.2) și (10.3),

$$F(r) = \frac{3P}{2R^3}(R^2 - r^2), \qquad r < R. \tag{10.4}$$

Funcția $\bar{p}(\xi)$ este dată de (8.12). Obținem :

$$\bar{p}(\xi) = \frac{3P(\sin R\xi - R\xi\cos R\xi)}{2\pi R^3 \xi^3}. \tag{10.5}$$

Deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului se obțin acum din (4.8)—(4.13).

Pentru deplasările punctelor planului $z = 0$, obținem din (8.17) și (8.18)

$$u(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{(ak - b)\,P}{2\pi(aa' - b^2)\,r}\left[1 - \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right], & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak - b)\,P}{2\pi(aa' - b^2)\,r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{10.6}$$

$$w(r, 0) = \frac{2w_0}{\pi}\left[\left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right)\arcsin\frac{R}{r} + \frac{r}{2R}\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}}\right], \quad r \geqslant R. \tag{10.7}$$

Pentru $r \leqslant R$, avem evident $w(r, 0) = w_0 - Ar^2$.

Tensiunile normale $\sigma_r(r, 0)$ și $\sigma_\theta(r, 0)$ se obțin din (8.19), ținînd seamă că, după cum rezultă din (8.7), avem

$$p(r) = \frac{3P}{2\pi R^3}\sqrt{R^2 - r^2}, \qquad r < R, \tag{10.8}$$

și evident $p(r) = 0$ pentru $r > R$.

11. ȘTANȚĂ CONICĂ

În cazul unei ștanțe conice, avem

$$\psi(r) = Ar, \qquad A = \text{const.} \tag{11.1}$$

Din (8.6) și (8.10') obținem raza cercului de contact R și penetrația w_0 a ștanței :

$$R^2 = \frac{ak(s_1 + s_2)\,P}{\pi(aa' - b^2)\,A}, \tag{11.2}$$

$$w_0 = \frac{1}{2}\pi AR. \tag{11.3}$$

Din (8.4), ținînd seamă de (11.2) și (11.3), găsim

$$F(r) = \frac{2P}{R^2}(R - r), \qquad r < R. \tag{11.4}$$

Funcția $\overline{p}(\xi)$ este dată de (8.12). Obținem :

$$\overline{p}(\xi) = \frac{P(1 - \cos R\xi)}{\pi R^2 \xi^2}. \tag{11.5}$$

Deplasările și tensiunile corespunzătoare unui punct oarecare al semispațiului se obțin acum din relațiile (4.8)—(4.13).

Pentru deplasările punctelor planului $z = 0$, obținem din (8.17) și (8.18):

$$u(r, 0) = \begin{cases} -\dfrac{(ak-b)P}{2\pi(aa'-b^2)r}\left[1 - \sqrt{1-\dfrac{r^2}{R^2}} + \dfrac{r^2}{R^2}\ln\dfrac{R+\sqrt{R^2-r^2}}{r}\right], & r \leqslant R, \\ -\dfrac{(ak-b)P}{2\pi(aa'-b^2)r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{11.6}$$

$$w(r, 0) = \frac{2w_0}{\pi}\left[\arcsin\frac{R}{r} + \sqrt{\frac{r^2}{R^2}-1} - \frac{r}{R}\right], \quad r \geqslant R. \tag{11.7}$$

Pentru $r \leqslant R$, avem evident $w(r, 0) = w_0 - Ar$.

Tensiunile normale $\sigma_r(r, 0)$ și $\sigma_\theta(r, 0)$ se obțin din (8.19), ținînd seamă că, după cum rezultă din (8.7), avem

$$p(r) = \frac{P}{\pi R^2}\ln\frac{R+\sqrt{R^2-r^2}}{r}, \qquad r < R, \tag{11.8}$$

și evident $p(r) = 0$ pentru $r > R$. Formulele (11.6) și (11.8) corespund cu rezultatele lui Elliott [9].

Pentru aflarea deplasărilor și tensiunilor în punctele axei Oz, să observăm că [5]

$$\int_0^\infty e^{-\xi z}\frac{1-\cos R\xi}{\xi}\,d\xi = \ln\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z}, \qquad (z > 0),$$

$$\int_0^\infty e^{-\xi z}\frac{1-\cos R\xi}{\xi^2}\,d\xi = \frac{z}{2}\ln\frac{z^2}{R^2+z^2} + R\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{z}, \quad (z > 0),$$

astfel că din (4.37) — (4.40) obținem:

$$u(0, z) = \tau_{rz}(0, z) = 0, \tag{11.9}$$

$$w(0, z) = -\frac{a^2k\mu P}{\pi(aa'-b^2)(b+\mu)(s_1-s_2)R^2}\left[\alpha_2\gamma_1\left(\frac{s_1z}{2}\ln\frac{s_1^2z^2}{R^2+s_1^2z^2} + R\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{s_1z}\right) - \alpha_1\gamma_2\left(\frac{s_2z}{2}\ln\frac{s_2^2z^2}{R^2+s_2^2z^2} + R\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{s_2z}\right)\right], \quad (z\neq 0), \tag{11.10}$$

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\theta(0, z) = \frac{P}{\pi(s_1-s_2)R^2}\left(\delta_2s_1\ln\frac{\sqrt{R^2+s_1^2z^2}}{s_1z} - \delta_1s_2\ln\frac{\sqrt{R^2+s_2^2z^2}}{s_2z}\right), \qquad (z\neq 0), \tag{11.11}$$

$$\sigma(0, z) = \frac{P}{\pi(s_1-s_2)R^2}\left(s_2\ln\frac{\sqrt{R^2+s_1^2z^2}}{s_1z} - s_1\ln\frac{\sqrt{R^2+s_2^2z^2}}{s_2z}\right), \quad (z\neq 0). \tag{11.12}$$

Primită la redacție la 10 septembrie 1962

ЗАДАЧИ ТИПА БУССИНЕСКА ДЛЯ УПРУГОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

РЕЗЮМЕ

В работе изучается состояние деформации и состояние напряжения в упругом полупространстве в предположениях: 1) упругая среда трансверсально изотропная, причем ось монотропии нормальна к граничной плоскости среды; 2) действие на среду осесимметрично относительно оси, которая также нормальна к граничной плоскости среды.

Упругая среда занимает полупространство $z \geqslant 0$, а ось Oz является одновременно осью монотропии и осью симметрии действия. В цилиндрических координатах (r, θ, z) закон Гука выражается уравнениями (2.1) и (2.2), где a, a', b, μ, μ' — упругие постоянные среды. Отличные от нуля компоненты перемещения и состояния напряжения даются соотношениями (2.9), (2.10) и (2.12), где функция $\varphi(r, z)$ удовлетворяет уравнению (2.11). Обозначено через u радиальная компонента перемещения, а через w — компонента перемещения в направлении оси Oz. Уравнение (2.11) решается при помощи преобразования Ганкеля. Если обозначить через $G(\xi, z)$ преобразование Ганкеля нулевого порядка функции $\varphi(r, z)$, то уравнение (2.11) заменяется дифференциальным уравнением (3.3). Перемещения и напряжения выражаются при помощи функции $G(\xi, z)$ формулами (3.7)—(3.12).

Изучаются следующие случаи нагрузки:

1) Осесимметричное давление $p(r)$, нормальное к граничной поверхности полупространства (§ 4).

Получаются формулы (4.8)— (4.13). Для точек граничной плоскости имеем соотношения (4.16) — (4.19) или (4.26) — (4.29). Если давление $p(r)$ распределено на окружности радиуса R, то перемещение и напряжение в точках граничной плоскости $z = 0$ даются формулами (4.31) — (4.34), где Q — полная нагрузка. Из формул (4.31), (4.33) и (4.34) следует, что в точках граничной плоскости, расположенных вне окружности нагрузки, радиальное перемещение u и нормальные напряжения σ_r и σ_θ не зависят от способа распределения давления $p(r)$, а только от полной нагрузки Q. Для точек оси Oz получаются формулы (4.37)—(4.40).

2) Нормальная нагрузка, равномерно распределенная на площади круга (§ 5).

Получаются формулы (5.3)—(5.8), причем те определенные интегралы, которые здесь появляются, были сведены в таблицу в [6]. Для точек плоскости $z = 0$ и оси Oz получаются формулы (5.10)—(5.13), соответственно (5.16)—(5.19).

3) Сосредоточенная нормальная нагрузка (§ 6).

Получаются формулы (6.6) —(6.11), а для точек плоскости $z = 0$ и оси Oz формулы (6.12)—(6.15), соответственно (6.16)—(6.20).

4) Нормальная нагрузка, равномерно распределенная на окружности (§ 7).

Получаются формулы (7.2)—(7.7), а определенные интегралы также сведены в таблицу в [6]. Для $w(r, z)$ и $\sigma_z(r, z)$ получаем, например, формулы (7.9), соответственно (7.10). Для точек плоскости $z = 0$ и оси Oz получаются формулы (7.12)—(7.15), соответственно (7.16)—(7.19). В этом параграфе обозначено через $w^*(r, 0)$ перемещение в направлении оси Oz точки $(r, 0)$ в случае полной нагрузки P, равномерно распределенной на окружности $r < R$.

5) Осесимметрический штамп (§ 8).

Если $z = -\psi(r)$ есть уравнение штампа, то давление под штампом дается формулой (8.3), где функция $F(r)$ дается формулой (8.4). Через R обозначается радиус основания штампа, а через w_0 перемещение штампа. Для преобразования Ганкеля нулевого порядка $\overline{p}(\xi)$ функции $p(r)$ ($p(r) = 0$ при $r > R$) получается выражение (8.12). Перемещения и напряжения могут , следовательно, быть вычислены из (4.8)—(4.13). Для точек плоскости $z = 0$ получаются формулы (8.17)—(8.19).

6) Цилиндрический штамп радиуса R (§ 9).

В этом случае функция $F(r)$ дается формулой (9.4), а $\overline{p}(\xi)$ формулой (9.5). Для перемещений и напряжений получаем формулы (9.6)—(9.11), где функции $H_{gl}(r, z)$ ($g, l = 0,1$) даются формулами (9.13)—(9.15). Для точек плоскости $z = 0$ и оси Oz получаются формулы (9.16) — (9.18), (8.19), соответственно (9.19)—(9.22).

7) Штамп, имеющий основанием параболоид вращения (§ 10). Если уравнение основания штампа $z = -Ar^2$, то радиус R основания штампа и перемещение штампа w_0 даются формулой (10.2) и (10.3). Функции $F(r)$ и $\overline{p}(\xi)$ даются формулами (10.4), соответственно (10.5). В точках плоскости $z = 0$ имеем соотношения (10.6) —(10.8) и (8.19).

8) Конический штамп (§ 11).

Если уравнение конуса $z = -Ar$, величины R и w_0 даются формулами (11.2) и (11.3), а функции $F(r)$ и $\overline{p}(\xi)$ формулами (11.4), соответственно (11.5). В точках $z = 0$ и оси Oz имеем соотношения (11.6)— (11.8), (8.19), соответственно (11.10) — (11.12).

BOUSSINESQ PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-SPACE WITH TRANSVERSE ISOTROPY

ABSTRACT

In this paper, the displacements and stresses in a semi-infinite elastic medium are studied, assuming that : 1) the medium is transversely isotropic, the axis of monotropy being normal to the plane boundary of the medium and that 2) the external load is axially symmetric with respect to an axis parallel to the monotropy-axis.

The elastic medium is bounded by the plane $z = 0$. The Oz-axis — normal to this plane and pointing into the medium — is chosen as the axis of monotropy and as axis of geometric symmetry. In cylindrical co-

ordinates (r, θ, z), Hooke's law is expressed by equations (2.1) and (2.2), where a, a', b, μ, μ' are the elastic constants of the material. The non-vanishing displacements and stresses are given by equations (2.9), (2.10) and (2.12) where the function $\varphi(r, z)$ is a solution of the partial differential equation (2.11). The radial component and the z-component of the displacement-vector were denoted by u and w, respectively.

Equation (2.11) is solved by means of a Hankel transform. Denoting by $G(\xi, z)$ the zero-order Hankel transform of the function $\varphi(r, z)$, equation (2.11) is found to be equivalent to the fourth order ordinary differential equation (3.3). Formulae (3.7) — (3.12) give the expressions of displacements and stresses in term of the function $G(\xi, z)$.

The following particular loadings are studied :

i) Axially-symmetric normal pressure prescribed on the entire plane boundary (§ 4).

Formulae (4.8) — (4.13) are obtained. For the points of the plane boundary we have the relations (4.16) — (4.19) or (4.26) — (4.29). If the pressure $p(r)$ is distributed over a circle of radius R, then the displacements and stresses on the boundary $z = 0$ are given by (4.31) — (4.34), Q being the total pressure. From formulae (4.31), (4.33) and (4.34) there results that on the plane boundary, at an exterior point of the loading circle, the radial displacement u and the normal stresses σ_r and σ_θ, do not depend on the distribution of the pressure but only on the total load Q. For the points of the z-axis, formulae (4.37) — (4.40) are obtained.

ii) Uniform normal pressure distributed over a circle (§ 5).

Formulae (5.3) — (5.8) are obtained. The definite integrals which appear in these relations are evaluted and tabulated in [6]. For the points of the plane $z = 0$ and for that of the z-axis, formulae (5.10) — (5.13) respectively (5.16) — (5.19) are obtained.

iii) Normal point load (§ 6).

Formulae (6.6) — (6.11) are obtained for the interior points of the elastic medium. For the points of the plane $z = 0$ and for that of the z-axis, formulae (6.12) — (6.15) respectively (6.16) — (6.20) are obtained.

iv) Normal line load, uniformly distributed along a circle (§ 7).

In this case, formulae (7.2) — (7.7) are obtained. The definite integrals which appear in these relations are evaluated and tabulated in [6]. For instance, $w(r, z)$ and $\sigma_z(r, z)$ are given by (7.9) and (7.10), respectively. For the points of the plane $z = 0$ and for that of the z-axis, formulae (7.12) — (7.15), respectively (7.16) — (7.19) are obtained. In this section, $w^*(r, 0)$ denotes the z-component of the displacement of the point $(r, 0)$, corresponding to a total load P, uniformly distributed over the circle $r < R$.

v) Axially-symmetric punch (§ 8).

If the profile of the punch is given by the equation $z = -\psi(r)$, then the pressure exerted by the punch is given by the equation (8.3) where the function $F(r)$ is given by (8.4). Here R denotes the radius of the contact circle, while w_0 denotes the penetration of the punch. The zero-order Hankel transform $\bar{p}(\xi)$ of the function $p(r)$ [if $r > R$, $p(r) = 0$] is given by (8.12). Thus, the displacements and stresses may be evaluated

by means of formulae (4.8)—(4.13). For the points of the plane $z = 0$, formulae (8.17) — (8.19) are obtained.

vi) Cylindrical punch of radius R (§ 9).

In this case, the function $F(r)$ is given by (9.4) while $\overline{p}(\xi)$ is given by (9.5). For the displacements and stresses, formulae (9.6) — (9.11) are obtained where the functions $H_{gl}(r, z)$ $(g, l = 0,1)$ are given by (9.13) — (9.15). For the points of the plane $z = 0$ and for that of the z-axis, formulae (9.16) — (9.18), (8.19), respectively (9.19) — (9.22) are obtained.

vii) Paraboloidal punch (§ 10).

If the profile of the punch is given by the equation $z = -Ar^2$, then the radius R of the contact circle and the penetration w_0 of the punch are given by (10.2) and (10.3). The function $\overline{F}(r)$ and $\overline{p}(\xi)$ are given by (10.4) and (10.5), respectively. For the points of the plane $z = 0$, formulae (10.6) — (10.8) and (8.19) are obtained.

viii) Conical punch (§ 11).

If the profile of the punch is given by the equation $z = -Ar$, then the quantities R and w_0 are given by (11.2) and (11.3) while the functions $F(r)$ and $\overline{p}(\xi)$ are given by (11.4) and (11.5) respectively. For the points of the plane $z = 0$ and for that of the z-axis, formulae (11.6) — (11.8), (8.19) respectively (11.10) — (11.12) are obtained.

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticității*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1961, I.
2. A. MOISIL, *Asupra unui vector analog vectorului lui Galerkin pentru echilibrul corpurilor elastice cu izotropie transversă*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., ser. mat.-fiz., **2**, 207—210 (1950).
3. R. A. EUBANKS, E. STERNBERG, *On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy*. J. Rational Mech. and Analysis, **3**, 89—101 (1954).
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1951.
5. I. M. RIJIC, I. S. GRADSTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
6. G. EASON, B. NOBLE, I. N. SNEDDON, *On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions*. Phil. Trans. Royal Soc. London, Series A, **247**, *935*, 529—551 (1955).
7. И. Я. ШТАЕРМАН, *Контактная задача теории упругости*. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1949.
8. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. Macmillan and Co., London, 1952.
9. H. A. ELLIOTT, *Axial symmetric stress distributions in aelotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems*. Proc. Cambridge Phil. Soc., **45**, 621—630 (1949).

CONSIDERAȚII, DIN PUNCT DE VEDERE AL MECANICII NEWTONIENE, ASUPRA SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE [1]

DE

VICTORIA CRISTEA

În lucrarea de față se studiază unele din principalele noțiuni și legi mecanice ce intervin în legătură cu mișcarea relativă newtoniană a unui sistem de puncte materiale raportat la două triedre de referință (T_1) și (T_2) mobile unul în raport cu celălalt.

La baza lucrării noastre a stat analiza rezultatelor expuse de T. Levi-Civita și U. Amaldi în [2], precum și a celor obținute de V. Vâlcovici [3], [4], [5], [6] în legătură cu generalizarea teoremelor de tip König și a teoremelor generale.

În cele ce urmează vom indica un procedeu unitar prin care se regăsesc aceste rezultate.

Un rol deosebit îl ocupă în lucrare formularea teoremelor generale ale sistemelor de puncte materiale față de triedrele (T_1) și (T_2) și completarea acestor teoreme generale cu altele noi.

Ideea esențială a lucrării constă în considerarea pe lîngă triedrele de referință (T_1) și (T_2) a unui al treilea triedru (T), numit *triedru central*. Din punct de vedere al considerării mișcării de transport a triedrelor (T_1) și (T_2) față de triedrul (T), aceste triedre (T_1) și (T_2) se bucură de aceleași proprietăți.

Rezultatele noastre se obțin pe baza formulelor de trecere de la triedrul (T) la triedrele (T_1) și (T_2).

---

[1]) Prezenta lucrare este o reluare a comunicării *Considerații asupra teoremelor generale referitoare la sistemele de puncte materiale în mecanica newtoniană*, ținută de autoare la cea de-a doua „Sesiune a cercurilor științifice studențești" din 16—18 martie 1962 la Universitatea din București.

Definirea triedrului (T) așa cum se face în lucrare este specifică mecanicii newtoniene. Cum se definește triedrul (T) în cazul cînd se renunță la ipotezele mecanicii newtoniene se va vedea într-o lucrare viitoare.

I. NOTAȚII ȘI DEFINIȚII

1. Fie (S) un sistem de puncte materiale A respectiv de mase m, ale căror poziții și mișcări se raportează la două triedre trirectangulare (T_1) și (T_2) de vîrfuri O_1 și O_2.

Vom considera că cele două triedre (T_1) și (T_2) sînt în general în mișcare unul în raport cu celălalt.

Poziția unui punct A al sistemului (S) va fi caracterizată față de cele două triedre (T_1) și (T_2) prin vectorii de poziție $\bar{r}_1 = \overline{O_1A}$ și $\bar{r}_2 = \overline{O_2A}$. Mișcarea punctului A față de cele două triedre va fi caracterizată de vitezele $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$.

Pentru studiul nostru este necesar a se cunoaște poziția și mișcarea celor două triedre (T_1) și (T_2) unul în raport cu celălalt. Vom pune astfel $\bar{r}_{12} = \overline{O_1O_2}$ și $\bar{r}_{21} = \overline{O_2O_1}$, avînd evident

$$\bar{r}_{12} + \bar{r}_{21} = 0. \tag{1}$$

Vom nota apoi cu $\bar{v}_{12}$ viteza lui O_2 în raport cu (T_1) și cu $\bar{\omega}_{12}$ vectorul ce definește rotația lui (T_2) în raport cu (T_1). Analog, vectorii $\bar{v}_{21}$ și $\bar{\omega}_{21}$ definesc mișcarea lui (T_1) în raport cu (T_2).

Simbolul derivare se va nota astfel ca să se marcheze clar triedrul în raport cu care se face derivarea. Astfel, vom nota cu D_1 derivata în raport cu timpul față de triedrul (T_1) și cu D_2 derivata în raport cu timpul față de triedrul (T_2). Legătura între aceste două derivate este dată de formula cunoscută

$$D_1\bar{a} = D_2\bar{a} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{a}, \tag{2}$$

unde $\bar{a}$ este un vector variabil oarecare. Cum această formulă (2) trebuie să rămînă valabilă atît la trecerea de la triedrul (T_1) la triedrul (T_2) cît și la trecerea de la (T_2) la (T_1), urmează că

$$\bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{21} = 0. \tag{3}$$

Vizibil

$$\bar{v}_1 = D_1\bar{r}_1 \quad , \quad \bar{v}_2 = D_2\bar{r}_2 \, ,$$

$$\bar{v}_{12} = D_1\bar{r}_{12} \quad , \quad \bar{v}_{21} = D_2\bar{r}_{21} \, ,$$

astfel că, în baza lui (2), între vitezele $\bar{v}_{12}$ și $\bar{v}_{21}$ avem relația

$$\bar{v}_{21} + \bar{v}_{12} = \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_{21} = \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_{12}.$$

Apoi

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{12} + \bar{r}_2 \ , \quad \bar{r}_2 = \bar{r}_{21} + \bar{r}_1 \ , \tag{4}$$

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_{12} + \bar{v}_2 \ , \quad \bar{v}_2 = \bar{u}_{21} + \bar{v}_1 , \tag{5}$$

unde s-a pus

$$\bar{u}_{12} = \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2 \ , \quad \bar{u}_{21} = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1$$

obținîndu-se

$$\bar{u}_{12} + \bar{u}_{21} = 0. \tag{6}$$

Vectorul $\bar{u}_{12}$ este viteza de transport a unui punct solidar legat de triedrul (T_2) în raport cu triedrul (T_1). Analog se interpretează vectorul $\bar{u}_{21}$.

2. În baza relațiilor (1), (3) și (6), relațiile (2), (4) și (5) se pun sub forma

$$\mathrm{D}_1 \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{21} \times \bar{a} = \mathrm{D}_2 \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{12} \times \bar{a}, \tag{2'}$$

$$\bar{r}_1 + \frac{1}{2} \bar{r}_{21} = \bar{r}_2 + \frac{1}{2} \bar{r}_{12}, \tag{4'}$$

$$\bar{v}_1 + \frac{1}{2} \bar{u}_{21} = \bar{v}_2 + \frac{1}{2} \bar{u}_{12}, \tag{5'}$$

obținînd astfel formule simetrice în raport cu cele două triedre (T_1) și (T_2). Din acest motiv, formulele (2'), (4'), (5') se pot numi *formule de echilibru.*

Să notăm cu $\mathrm{D}\bar{a}$, $\bar{r}$ și $\bar{v}$ valoarea comună a celor doi membri respectiv în fiecare din formulele de echilibru (2'), (4') și (5'):

$$\mathrm{D}\bar{a} = \mathrm{D}_1 \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{21} \times \bar{a} = \mathrm{D}_2 \bar{a} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{12} \times \bar{a}, \tag{2''}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \frac{1}{2} \bar{r}_{21} = \bar{r}_2 + \frac{1}{2} \bar{r}_{12}, \tag{4''}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \frac{1}{2} \bar{u}_{21} = \bar{v}_2 + \frac{1}{2} \bar{u}_{12}. \tag{5''}$$

Vectorii $\bar{r}$ și $\bar{v}$ astfel introduși caracterizează poziția punctului A al sistemului (S) față de ansamblul celor două triedre (T_1) și (T_2). Acești vectori $\bar{r}$ și $\bar{v}$ reprezintă de fapt poziția și mișcarea punctului A față de un al treilea triedru (T) avînd vîrful O în mijlocul segmentului O_1O_2 ce unește vîrfurile celor două triedre (T_1) și (T_2). Rotația triedrului (T) față de triedrele (T_1) și (T_2) este dată de vectorii $\frac{1}{2} \bar{\omega}_{12}$, respectiv $\frac{1}{2} \bar{\omega}_{21}$. Vom numi acest triedru (T) — *triedru central.*

În sfîrșit, operatorul D definit cu ajutorul formulei de echilibru (2'') va marca derivarea în raport cu timpul față de triedrul (T) astfel introdus.

3. Fie C centrul maselor sistemului (S). Să caracterizăm centrul C al maselor sistemului (S) față de triedrele (T_1), (T_2) și (T). Vom nota astfel cu $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}, \bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}, \bar{U}_{12}, \bar{U}_{21}$ ce devin vectorii $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}, v_1, \bar{v}_2, \bar{v}, \bar{u}_{12}, \bar{u}_{21}$ cînd în locul unui punct A al sistemului (S) considerăm punctul C în care este situat centrul maselor sistemului (S).

Avem evident

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= D_1\bar{\rho}_1, \quad \bar{V}_2 = D_2\bar{\rho}_2, \\ \bar{\rho} &= \bar{\rho}_1 + \frac{1}{2}\bar{r}_{21} = \bar{\rho}_2 + \frac{1}{2}\bar{r}_{12}, \\ \bar{V} &= \bar{V}_1 + \frac{1}{2}\bar{U}_{21} = \bar{V}_2 + \frac{1}{2}\bar{U}_{12}, \\ \bar{U}_{12} &= \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{\rho}_2, \quad \bar{U}_{21} = \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \times \bar{\rho}_1. \end{aligned} \tag{7}$$

II. MĂRIMI CINEMATICE ÎN RAPORT CU DOUĂ TRIEDRE DE REFERINȚĂ

4. În raport cu triedrele (T_1) și (T_2) se impun următoarele forme pentru impulsul total al sistemului (S), pentru momentul cinetic total al sistemului și pentru energia totală a sistemului :

$$\begin{aligned} \bar{H}_i &= \sum m\bar{v}_i \quad , \quad (i = 1, 2), \\ \bar{K}_{ij} &= \sum \bar{r}_i \times m\bar{v}_j \quad , \quad (i, j = 1, 2), \\ T_{ij} &= \frac{1}{2}\sum m\bar{v}_i . \bar{v}_j \quad , \quad (i, j = 1, 2); \end{aligned} \tag{8}$$

în toate aceste formule ca și în cele ce vor urma semnul $\sum$ ce desemnează sumarea fiind extins asupra tuturor punctelor sistemului (S), indicii i și j rămînînd aceiași.

Vectorii $\bar{H}_i\,(i = 1, 2)$ reprezintă impulsul total al sistemului (S) respectiv în raport cu triedrele (T_i), iar vectorii $\bar{K}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ reprezintă momentul față de O_i al cantității de mișcare raportată la (T_j). Scalarii T_{11} și T_{22} se interpretează ca energia cinetică a sistemului (S) în raport cu triedrul (T_1) respectiv (T_2). Scalarul $T_{12} = T_{21}$ trebuie de asemenea interpretat ca o energie cinetică, dar în raport cu ambele triedre (T_1) și (T_2). Această energie cinetică mixtă T_{12} nu cunoaștem să fi fost considerată pînă acum de vreun autor. Introducerea lui T_{12} este naturală și asigură lucrării noastre un caracter unitar complet.

Cum am considerat triedrul central (T) se impun a fi considerate și impulsul total $\bar{H}$, momentul cinetic total $\bar{K}$ și energia cinetică totală a sistemului (S) în raport cu triedrul (T) :

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \sum m\bar{v}, \\ \bar{K} &= \sum \bar{r} \times m\bar{v}, \\ T &= \frac{1}{2}\sum mv^2. \end{aligned} \tag{8'}$$

5. Să vedem ce relații de transformare există între mărimile mecanice considerate în (8) și (8′).

În cazul impulsului, în baza definiției vectorului $\bar{v}$, avem

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \frac{1}{2}\sum m\bar{u}_{12} = \bar{H}_2 + \frac{1}{2}\sum m\bar{u}_{21}. \tag{9}$$

În cazul momentului cinetic $\bar{K}$, cum $\bar{r}$ și $\bar{v}$ se pot exprima atît cu ajutorul lui $\bar{r}_1$ și $\bar{v}_1$ cît și al lui $\bar{r}_2$ și $\bar{v}_2$, vom avea expresiile echivalente :

$$\begin{aligned}
\bar{K} = \sum \bar{r} \times m\bar{v} &= \sum \left(\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{21}\right) \times m\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right) = \\
&= \sum \left(\bar{r}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{21}\right) \times m\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right) = \\
&= \sum \left(\bar{r}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{12}\right) \times m\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right) = \\
&= \sum \left(\bar{r}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{12}\right) \times m\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right)
\end{aligned}$$

care conform cu (8) iau următoarele forme dezvoltate :

$$\begin{aligned}
\bar{K} &= \bar{K}_{11} + \frac{1}{2}\bar{r}_{21} \times \sum m\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\sum \bar{r}_1 \times m\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{21} \times \frac{1}{2}\sum m\bar{u}_{21} = \\
&= \bar{K}_{12} + \frac{1}{2}\bar{r}_{21} \times \sum m\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\sum \bar{r}_1 \times m\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{21} \times \frac{1}{2}\sum m\bar{u}_{12} = \\
&= \bar{K}_{21} + \frac{1}{2}\bar{r}_{12} \times \sum m\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\sum \bar{r}_2 \times m\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{12} \times \frac{1}{2}\sum m\bar{u}_{21} = \\
&= \bar{K}_{22} + \frac{1}{2}\bar{r}_{12} \times \sum m\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\sum \bar{r}_2 \times m\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}\,\bar{r}_{12} \times \frac{1}{2}\,m\bar{u}_{12}.
\end{aligned} \tag{10}$$

În cazul energiei cinetice T, vom avea analog expresiile :

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}\sum mv^2 &= \frac{1}{2}\sum m\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right)\cdot\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum m\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right)\cdot\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum m\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right)\cdot\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{21}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum m\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right)\cdot\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\,\bar{u}_{12}\right)
\end{aligned}$$

care dezvoltat se transcriu :

$$T = T_{11} + \frac{1}{2}\sum m\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_{21} + \frac{1}{8}\sum m\bar{u}_{21} \cdot \bar{u}_{21} =$$

$$= T_{12} + \frac{1}{8}\sum m\bar{u}_{12} \cdot \bar{u}_{12} = \tag{11}$$

$$= T_{22} + \frac{1}{2}\sum m\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_{12} + \frac{1}{8}\sum m\bar{u}_{12} \cdot \bar{u}_{12},$$

căci am ținut seamă de (6) și de faptul că $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{u}_{12}$.

Așadar, considerînd triedrul auxiliar (T) mărimilor mecanice $\overline{H}$, $\overline{K}$, T față de triedrul (T) conduc într-un mod unitar la o serie de relații ce au loc între mărimile mecanice $\overline{H}_i$, $\overline{K}_{ij}$, T_{ij} puse în evidență cu prilejul considerării triedrelor (T_1) și (T_2).

6. Să simplificăm relațiile (9), (10), (11) introducînd în considerațiile noastre poziția și mișcarea centrului de masă C al sistemului (S).

Se știe că

$$M\bar{\rho}_i = \sum m\bar{r}_i \quad \text{și} \quad M\bar{V}_i = \sum m\bar{v}_i = \overline{H}_i,$$

unde $M = \sum m$ reprezintă masa totală a sistemului (S). În felul acesta se arată ușor că

$$\sum m\bar{u}_{12} = M\,\bar{U}_{12} \quad \text{și} \quad \sum m\bar{u}_{21} = M\,\bar{U}_{21}$$

și prin urmare formulele (9) se transcriu

$$\overline{H} = \overline{H}_1 + \frac{1}{2}\,M\,\bar{U}_{21} = \overline{H}_2 + \frac{1}{2}\,M\,\bar{U}_{12}. \tag{9'}$$

Apoi,

$$\sum \bar{r}_1 \times m\bar{u}_{21} = \bar{\rho}_1 \times M\bar{v}_{21} + \sum \bar{r}_1 \times m\,(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1),$$

$$\sum \bar{r}_1 \times m\bar{u}_{12} = \bar{\rho}_1 \times M\bar{v}_{12} + \sum \bar{r}_1 \times m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2),$$

$$\sum \bar{r}_2 \times m\bar{u}_{21} = \bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{21} + \sum \bar{r}_2 \times m\,(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1),$$

$$\sum \bar{r}_2 \times m\bar{u}_{12} = \bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{12} + \sum \bar{r}_2 \times m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2),$$

astfel încît formulele (10) devin :

$$\overline{K} = \overline{K}_{11} + \frac{1}{2}\bar{r}_{21} \times M\bar{V}_1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}_1 \times M\bar{v}_{21} + \frac{1}{2}\sum \bar{r}_1 \times m\,(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1) +$$

$$+ \frac{1}{4}\bar{r}_{21} \times M\,\bar{U}_{21}$$

$$\overline{K} = \overline{K}_{12} + \frac{1}{2}\bar{r}_{21} \times M\overline{V}_2 + \frac{1}{2}\bar{\rho}_1 \times M\bar{v}_{12} + \frac{1}{2}\sum\bar{r}_1 \times m(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2) + \\ + \frac{1}{4}\bar{r}_{21} \times M\overline{U}_{12} = \\ = \overline{K}_{21} + \frac{1}{2}\bar{r}_{12} \times M\overline{V}_1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{21} + \frac{1}{2}\sum\bar{r}_2 \times m(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1) + \\ + \frac{1}{4}\bar{r}_{12} \times M\overline{U}_{21} = \\ = \overline{K}_{22} + \frac{1}{2}\bar{r}_{12} \times M\overline{V}_2 + \frac{1}{2}\bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{12} + \frac{1}{2}\sum\bar{r}_2 \times m(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2) + \\ + \frac{1}{4}\bar{r}_{12} \times M\overline{U}_{12}. \tag{10'}$$

În sfîrșit, cum

$$\sum m\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_{21} = M\overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K}_{11},$$
$$\sum m\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_{12} = M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22},$$
$$\sum m\bar{u}_{21} \cdot \bar{u}_{21} = -\sum m\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_{21} - \sum m\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_{12},$$

expresiile (11) ce dau energia cinetică totală T devin :

$$T = T_{11} + \frac{3}{8}(M\overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K}_{11}) - \frac{1}{8}(M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22}) = \\ = T_{12} - \frac{1}{8}(M\overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K}_{11}) - \frac{1}{8}(M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22}) = \\ = T_{22} - \frac{1}{8}(M\overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K}_{11}) + \frac{3}{8}(M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22}). \tag{11'}$$

7. Eliminînd pe $\overline{H}$ între relațiile (9′) obținem relația de dependență între mărimile $\overline{H}_i$ $(i = 1, 2)$. Eliminînd pe $\overline{K}$ între relațiile (10′) se obțin relațiile de legătură între vectorii $\overline{K}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$. Analog, pentru obținerea relațiilor între T_{ij} $(i, j = 1, 2)$ se elimină T între relațiile (11′). Majoritatea relațiilor ce se obțin prin aceste eliminări sînt relațiile găsite de V. Vâlcovici în [6].

Astfel, din (9′) avem

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_2 + M\overline{U}_{12}. \tag{9''}$$

Deci, *impulsul total al unui sistem de puncte materiale* (S) *în raport cu triedrul* (T_1) *este egal cu impulsul total al sistemului în raport cu triedrul* (T_2) *la care se adaugă impulsul centrului de masă* C *al sistemului* (S) *considerat solidar legat de triedrul* (T_2) *și în care s-ar presupune concentrată toată masa* M *a sistemului* (S).

De asemenea, din (10′) avem :

$$\begin{aligned}
&\overline{K}_{12} = \overline{K}_{11} + \bar{\rho}_1 \times M\bar{v}_{21} + \sum \bar{r}_1 \times m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_1),\\
&\overline{K}_{11} = \overline{K}_{21} + \bar{r}_{12} \times M\overline{V}_1,\\
&\overline{K}_{22} = \overline{K}_{12} + \bar{r}_{21} \times M\overline{V}_2,\\
&\overline{K}_{21} = \overline{K}_{22} + \bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{12} + \sum \bar{r}_2 \times m\,(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_2),\\
&\overline{K}_{11} = \overline{K}_{22} + \rho_2 \times M\bar{v}_{12} + \bar{r}_{12} \times M\overline{V}_1 + \sum \bar{r}_2 \times m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2),\\
&\overline{K}_{21} = \overline{K}_{12} + \bar{\rho}_2 \times M\bar{v}_{12} + \bar{r}_{21} \times M\overline{V}_2 + \sum \bar{r}_2 \times m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2).
\end{aligned} \tag{10''}$$

Din (11′) rezultă :

$$\begin{aligned}
T_{12} &= T_{11} + \frac{1}{2}(M\overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21} + \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K}_{11}),\\
T_{12} &= T_{22} + \frac{1}{2}(M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22}),\\
T_{11} &= T_{22} + \frac{1}{2} M(\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} - \overline{V}_1 \cdot \bar{v}_{21}) + \frac{1}{2}\bar{\omega}_{12} \cdot (\overline{K}_{11} + \overline{K}_{22}),
\end{aligned} \tag{11''}$$

ultima relație fiind o altă exprimare a relației

$$T_{11} = T_{22} + M\overline{V}_2 \cdot \bar{v}_{12} + \bar{\omega}_{12} \cdot \overline{K}_{22} + \frac{1}{2} M v_{12}^2 + \bar{v}_{12} \cdot M\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{\rho}_2) + \frac{1}{2}\sum m\,(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_{12})^2,$$

obținută de V. Vâlcovici în [6].

8. Relațiile generale obținute în paragrafele precedente se pot particulariza regăsindu-se astfel o serie de relații cunoscute.

Astfel, dacă cele două triedre (T_1) și (T_2) au același vîrf $(O_1 = O_2)$ avînd $\bar{r}_{12} = \bar{r}_{21} = 0$ și $\bar{v}_{12} = \bar{v}_{21} = 0$, rezultă relațiile :

$$\begin{aligned}
\overline{K}_{11} = \overline{K}_{21} \quad , \quad \overline{K}_{22} = \overline{K}_{12},\\
\overline{K}_{22} - \overline{K}_{11} = \sum \bar{r} \times m\,(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}),\\
\overline{K}_{22} + \overline{K}_{11} = 2\overline{K},\\
T_{22} - T_{11} = \bar{\omega}_{21} \cdot \overline{K} \quad , \quad T_{11} + T_{22} + 2T_{12} = 4T.
\end{aligned}$$

Dacă cele două triedre (T_1) și (T_2) se confundă, adică pe lîngă faptul că $\bar{r}_{12} = \bar{r}_{21} = 0$ avem și $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{21} = 0$, avem evident

$$\overline{H} = \overline{H}_1 = \overline{H}_2, \overline{K} = \overline{K}_{11} = \overline{K}_{12} = \overline{K}_{21} = \overline{K}_{22}, T = T_{11} = T_{12} = T_{21} = T_{22},$$

observîndu-se cît de naturale apar mărimile mecanice $\overline{H}_i$, $\overline{K}_{ij}$, T_{ij}.

Un caz deosebit de interesant este cazul cînd, de exemplu, vîrful O_2 al triedrului (T_2) se află în centrul maselor C al sistemului (S), cele două

triedre (T_1) și (T_2) avînd axele paralele. Impunînd deci $\bar{\rho}_2 = 0$ și $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{21} = 0$, din relațiile (10′) rezultă

$$\bar{K}_{12} = \bar{K}_{21} = \bar{K}_{22} = \bar{K}_{11} - \bar{\rho}_1 \times M\bar{V}_1$$

căci $\bar{\rho}_1 = \bar{r}_{12}$ iar $\bar{V}_1 = \bar{v}_{12}$. În relația

$$\bar{K}_{11} = \bar{K}_{22} + \rho_1 \times M\bar{V}_1$$

recunoaștem una din relațiile de tip König.

Impunînd apoi $\bar{\rho}_2 = 0$ și $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{21} = 0$, în formulele (11′) obținem și

$$T_{12} = T_{21} = T_{22} = T_{11} - \frac{1}{2} MV_1^2,$$

în relația

$$T_{11} = T_{22} + \frac{1}{2} MV_1^2$$

recunoscînd cunoscuta teoremă a lui König.

Cazul mai general $\bar{\rho}_2 \neq 0$ și $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{21} = 0$ a fost tratat de V. Vâlcovici în [3], [4].

III. EXTINDEREA NOȚIUNII DE FORȚĂ

9. Să notăm cu $(\bar{F})$ sistemul de forțe sub acțiunea căruia se află sistemul de puncte materiale (S), dacă mișcarea acestuia se raportează la triedrul (T).

Ecuația de mișcare pentru un punct oarecare A al sistemului (S) cînd ne raportăm la triedrul (T) va fi

$$m\,\mathrm{D}\bar{v} = \bar{F}. \tag{12}$$

Cum se transformă sistemul de forțe $(\bar{F})$ cînd mișcarea se va raporta la triedrele (T_1) sau (T_2)?

Să considerăm în acest sens expresia $m\,\mathrm{D}\bar{v}$ și să prelucrăm această expresie pe baza faptului că D se poate exprima cu ajutorul lui D_1 sau D_2, iar $\bar{v}$ cu ajutorul lui $\bar{v}_1$ sau $\bar{v}_2$. Evident

$$m\,\mathrm{D}\bar{v} = m\,\mathrm{D}\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_{21}\right) = m\,\mathrm{D}_1\left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_{21}\right) + m\frac{1}{2}\bar{\omega}_{21} \times \left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_{21}\right) =$$

$$= m\,\mathrm{D}_2\left(v_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_{21}\right) + m\frac{1}{2}\bar{\omega}_{12} \times \left(\bar{v}_1 + \frac{1}{2}\bar{u}_{21}\right) =$$

$$= m\,\mathrm{D}\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\bar{u}_{12}\right) = m\,\mathrm{D}_1\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\bar{u}_{12}\right) + m\frac{1}{2}\bar{\omega}_{21} \times \left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\bar{v}_{12}\right) =$$

$$= m\,\mathrm{D}_2\left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\bar{u}_{12}\right) + m\frac{1}{2}\bar{\omega}_{12} \times \left(\bar{v}_2 + \frac{1}{2}\bar{u}_{12}\right),$$

adică

$$m\,\mathrm{D}\bar{v} = m\,\mathrm{D}_1\bar{v}_1 + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_1\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{v}_1 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{u}_{21} =$$

$$= m\,\mathrm{D}_2\bar{v}_1 + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_2\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{v}_1 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{u}_{21} =$$

$$= m\,\mathrm{D}_1\bar{v}_2 + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_1\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{v}_2 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{u}_{12} =$$

$$= m\,\mathrm{D}_2\bar{v}_2 + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_2\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{v}_2 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{u}_{12}.$$

Cum se știe că $m\,\mathrm{D}_1\bar{v}_1$ și $m\,\mathrm{D}_2\bar{v}_2$ reprezintă tocmai forțele sub acțiunea cărora se mișcă punctul A cînd mișcarea acestuia este raportată la triedrul (T_1), respectiv (T_2), se impun notațiile

$$m\,\mathrm{D}_i\bar{v}_j = \bar{F}_{ij} \qquad (i, j = 1, 2), \tag{12'}$$

unde vectorii $\bar{F}_{ij}$ vor generaliza noțiunea de forță în cazul cînd mișcarea sistemului (S) se raportează la două triedre (T_1) și (T_2). Forțele $\bar{F}_{11}$, $\bar{F}_{12}$, $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{22}$ astfel introduse nu sînt independente între ele, ci verifică relațiile :

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \bar{F}_{11} + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_1\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{v}_1 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{u}_{21} = \\
&= \bar{F}_{21} + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_2\bar{u}_{21} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{v}_1 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{u}_{21} = \\
&= \bar{F}_{12} + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_1\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{v}_2 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{21}\times\bar{u}_{12} = \\
&= \bar{F}_{22} + \frac{1}{2}m\,\mathrm{D}_2\bar{u}_{12} + \frac{1}{2}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{v}_2 + \frac{1}{4}m\,\bar{\omega}_{12}\times\bar{u}_{12}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Dacă notăm

$$\bar{a}_{12} = \mathrm{D}_1\bar{v}_{12}, \quad \bar{a}_{21} = \mathrm{D}_2\bar{v}_{21},$$

vectorii $\bar{a}_{12}$ și $\bar{a}_{21}$ vor reprezenta accelerațiile pe care punctele O_1 și O_2 le au față de triedrele (T_2), respectiv (T_1).

Se observă că

$$\mathrm{D}\bar{\omega}_{12} = \mathrm{D}_1\bar{\omega}_{12} = \mathrm{D}_2\bar{\omega}_{12},$$

$$\bar{a}_{12} + \bar{a}_{21} = \mathrm{D}\bar{\omega}_{12}\times\bar{r}_{12} + \bar{\omega}_{12}\times(\bar{v}_{12} - \bar{v}_{21}).$$

Relațiile (13) se transcriu :

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \bar{F}_{11} - \frac{1}{2} m\bar{a}_{12} - \frac{1}{2} m\mathrm{D}_1(\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2) + \frac{1}{2} m\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_1 + \frac{1}{4} m\bar{\omega}_{21} \times \bar{u}_{21} = \\ &= \bar{F}_{21} + \frac{1}{2} m\bar{a}_{21} + \frac{1}{2} m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_1 + \frac{1}{4} m\bar{\omega}_{12} \times \bar{u}_{21} = \\ &= \bar{F}_{12} + \frac{1}{2} m\bar{a}_{12} + \frac{1}{2} m\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_2 + \frac{1}{4} m\bar{\omega}_{21} \times \bar{u}_{12} = \\ &= \bar{F}_{22} - \frac{1}{2} m\bar{a}_{21} - \frac{1}{2} m\mathrm{D}_2(\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1) + \frac{1}{2} m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_2 + \frac{1}{4} m\bar{\omega}_{12} \times \bar{u}_{12}.\end{aligned} \tag{13'}$$

Între forțele $\bar{F}_{11}$, $\bar{F}_{12}$, $\bar{F}_{21}$, $\bar{F}_{22}$ vor rezulta atunci relațiile :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{12} &= \bar{F}_{11} + m\bar{a}_{21} + m\mathrm{D}\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1 - m\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{21} + m\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_1, \\ \bar{F}_{11} &= \bar{F}_{21} + m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_1, \\ \bar{F}_{22} &= \bar{F}_{12} + m\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_2, \\ \bar{F}_{21} &= \bar{F}_{22} + m\bar{a}_{12} + m\mathrm{D}\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2 - m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{12} + m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_2, \\ \bar{F}_{11} &= \bar{F}_{22} + m\bar{a}_{12} + m\mathrm{D}\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2 + m\bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2) + 2m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_2 \\ \bar{F}_{21} &= \bar{F}_{12} + m\bar{a}_{12} + m\mathrm{D}\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2 - m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{12}.\end{aligned} \tag{13''}$$

în a cincea din aceste relații recunoaștem formula care dă forța cînd raportăm mișcarea punctului A la un triedru mobil (T_2) în funcție de forța cînd raportăm mișcarea la un triedru absolut (T_1) :

$$\bar{F}_{11} = \bar{F}_{22} - \bar{F}^t_{12} - \bar{F}^c_{12},$$

unde cu $\bar{F}^t_{12}$ și $\bar{F}^c_{12}$ am notat forța de transport și forța lui Coriolis :

$$\begin{aligned}\bar{F}^t_{12} &= -m\bar{a}_{12} - m\mathrm{D}\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2 - m\bar{\omega}_{12} \times (\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2), \\ \bar{F}^c_{12} &= -2m\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_2.\end{aligned}$$

10. Considerînd acum toate punctele sistemului (S) să facem reducerea sistemului de forțe $\bar{F}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ față de vîrfurile O_1 și O_2 ale triedrelor (T_1) și (T_2). Vom avea de considerat pentru componentele torsorului sistemului de forțe (exterioare și interioare) ce acționează asupra sistemului de puncte (S) în raport cu cele două triedre (T_1) și (T_2) următoarele expresii :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{R}}_{ij} &= \sum \bar{F}_{ij} \qquad (i, j = 1, 2), \\ \bar{\mathcal{M}}_{ijk} &= \sum \bar{r}_i \times \bar{F}_{jk} \qquad (i, j, k = 1, 2).\end{aligned} \tag{14}$$

De asemenea, făcînd reducerea sistemului de forțe $(\bar{F})$ față de punctul O, în raport cu triedrul (T), vom pune

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &= \sum \bar{F}, \\ \bar{\mathcal{M}} &= \sum \bar{r} \times \bar{F}, \end{aligned} \tag{14'}$$

caracterizînd astfel torsorul aceluiași sistem de forțe $(\bar{F})$ și în raport cu triedrul (T).

Pe baza relațiilor (13) între rezultantele $\bar{\mathcal{R}}$ și $\bar{\mathcal{R}}_{11}, \bar{\mathcal{R}}_{12}, \bar{\mathcal{R}}_{21}, \bar{\mathcal{R}}_{22}$ avem relațiile :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &= \bar{\mathcal{R}}_{11} + \frac{1}{2} M\mathrm{D}_1 \bar{U}_{21} + \frac{1}{2} M\bar{\omega}_{21} \times \bar{V}_1 + \frac{1}{4} M\bar{\omega}_{21} \times \bar{U}_{21} = \\ &= \bar{\mathcal{R}}_{21} + \frac{1}{2} M\mathrm{D}_2 \bar{U}_{21} + \frac{1}{2} M\bar{\omega}_{12} \times \bar{V}_1 + \frac{1}{4} M\bar{\omega}_{12} \times \bar{U}_{21} = \\ &= \bar{\mathcal{R}}_{12} + \frac{1}{2} M\mathrm{D}_1 \bar{U}_{12} + \frac{1}{2} M\bar{\omega}_{21} \times \bar{V}_2 + \frac{1}{4} M\bar{\omega}_{21} \times \bar{U}_{12} = \\ &= \bar{\mathcal{R}}_{22} + \frac{1}{2} M\mathrm{D}_2 \bar{U}_{12} + \frac{1}{2} M\bar{\omega}_{12} \times \bar{V}_2 + \frac{1}{4} M\bar{\omega}_{12} \times \bar{U}_{12}. \end{aligned} \tag{15}$$

Analog se stabilesc relațiile de legătură între formele $\bar{\mathcal{M}}$ și $\bar{\mathcal{M}}_{ijk}$ $(i, j, k = 1, 2)$ ale momentului rezultant.

IV. EXTINDEREA TEOREMELOR GENERALE

11. Vom arăta acum că introducerea forțelor $\bar{F}$ și $\bar{F}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ atrage generalizarea teoremelor generale pentru sistemele de puncte materiale.

Pentru fiecare punct A al sistemului (S) avînd ecuațiile de mișcare sub formele (12) și (12')

$$\begin{aligned} m\mathrm{D}\bar{v} &= \bar{F}, \\ m\mathrm{D}_i \bar{v}_j &= \bar{F}_{ij} \qquad (i, j = 1, 2), \end{aligned} \tag{12''}$$

pentru *teorema impulsului* va rezulta

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\,(\sum m\bar{v}) &= \sum \bar{F}, \\ \mathrm{D}_i\,(\sum m\bar{v}_j) &= \sum \bar{F}_{ij}, \end{aligned}$$

ecuații care se transcriu sub forma

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\bar{H} &= \bar{\mathcal{R}}, \\ \mathrm{D}_i \bar{H}_j &= \bar{\mathcal{R}}_{ij}. \end{aligned} \tag{16}$$

12. În cazul *teoremei momentului cinetic*, înmulțind ecuațiile (12) și (12′) vectorial la stînga respectiv cu $\bar{r}$ și $\bar{r}_h$ pentru fiecare punct A al sistemului (S), vom obține :

$$\bar{r} \times m\mathrm{D}\bar{v} = \bar{r} \times \bar{F},$$

$$\bar{r}_h \times m\mathrm{D}_i\,\bar{v}_j = \bar{r}_h \times \bar{F}_{ij} \qquad (i, j, h = 1, 2),$$

astfel că pentru sistemul (S)

$$\mathrm{D}\,(\sum \bar{r} \times m\bar{v}) = \sum \bar{r} \times \bar{F},$$

$$\mathrm{D}_i\,(\sum \bar{r}_h \times m\bar{v}_j) - \sum \mathrm{D}_i\,\bar{r}_h \times m\bar{v}_j = \sum \bar{r}_h \times \bar{F}_{ij}.$$

Aceste ecuații se transcriu

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\bar{K} &= \bar{\mathcal{M}}, \\ \mathrm{D}_i\,\bar{K}_{hj} - \sum \mathrm{D}_i\,\bar{r}_h \times m\bar{v}_j &= \bar{\mathcal{M}}_{hij}, \end{aligned} \tag{17}$$

în prima din aceste ecuațiii avînd teorema momentului cinetic în raport cu triedrul (T). În celelalte ecuații (17) dînd indicilor i, j, h valorile 1 sau 2 se obțin ecuațiile :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1\,\bar{K}_{11} &= \bar{\mathcal{M}}_{111}, \\ \mathrm{D}_1\,\bar{K}_{12} &= \bar{\mathcal{M}}_{112} + \sum \bar{v}_1 \times m\bar{v}_2, \\ \mathrm{D}_1\,\bar{K}_{21} &= \bar{\mathcal{M}}_{211} + \sum \bar{v}_1 \times m\bar{v}_{12}, \\ \mathrm{D}_1\,\bar{K}_{22} &= \bar{\mathcal{M}}_{212} + \sum (\bar{\omega}_{12} \times \bar{r}_2) \times m\bar{v}_2, \\ \mathrm{D}_2\,\bar{K}_{11} &= \bar{\mathcal{M}}_{121} + \sum (\bar{\omega}_{21} \times \bar{r}_1) \times m\bar{v}_1, \\ \mathrm{D}_2\,\bar{K}_{12} &= \bar{\mathcal{M}}_{122} + \sum \bar{v}_2 \times m\bar{v}_{21}, \\ \mathrm{D}_2\,\bar{K}_{21} &= \bar{\mathcal{M}}_{221} + \sum \bar{v}_2 \times m\bar{v}_1, \\ \mathrm{D}_2\,\bar{K}_{22} &= \bar{\mathcal{M}}_{222}, \end{aligned} \tag{17′}$$

în prima și ultima din aceste ecuații obținînd teorema momentului cinetic sub o formă analogă cu forma întîlnită de obicei. Altfel spus, în prima și ultima din ecuațiile (17′) avem teorema momentului cinetic în raport cu triedrele (T_1), respectiv (T_2).

Se vede deci că generalizarea conceptului de forță dată în capitolul precedent permite a păstra teorema momentului cinetic invariantă atît față de triedrul (T_1) cît și față de triedrul (T_2).

În celelalte ecuații (17′) teorema momentului cinetic folosește mărimi mecanice care se referă atît la triedrul (T_1) cît și la triedrul (T_2). Aceste ecuații constituie deci extensii ale teoremei momentului cinetic.

13. Să ne ocupăm acum de *teorema energiei cinetice*. Înmulțind scalar ecuațiile de mișcare (12)—(12′) respectiv cu $\bar{v}$ și $\bar{v}_k$ pentru fiecare punct al sistemului (S), vom avea :

$$m\mathrm{D}\bar{v} \cdot \bar{v} = \bar{F} \cdot \bar{v},$$

$$m\mathrm{D}_i\bar{v}_j \cdot \bar{v}_k = \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_k \qquad (i, j, k = 1, 2),$$

astfel că pentru întreg sistemul (S)

$$\begin{aligned} \sum m \mathrm{D}\bar{v} \cdot \bar{v} &= \sum \bar{F} \cdot \bar{v}, \\ \sum m \mathrm{D}_i \bar{v}_j \cdot \bar{v}_k &= \sum \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_k . \end{aligned} \tag{18}$$

Prima din aceste ecuații scriindu-se sub forma

$$\mathrm{D}\left(\sum \frac{1}{2} m v^2\right) = \sum \bar{F} \cdot \bar{v},$$

obținem astfel exprimarea teoremei energiei cinetice a sistemului (S) față de triedrul (T). Prescurtat această teoremă se transcrie

$$\mathrm{D}T = P, \tag{18'}$$

unde prin P am notat lucrul mecanic efectuat de sistemul (S) în unitatea de timp, adică *puterea* de care este capabil sistemul cînd mișcarea este raportată la triedrul (T).

Considerînd al doilea grup de ecuații (18), schimbînd indicii j cu k și adunînd ecuațiile obținute respectiv la fiecare din ecuațiile avute înainte de schimbarea indicilor j și k, obținem ecuațiile

$$\sum m \mathrm{D}_i (\bar{v}_j \cdot \bar{v}_k) = \sum \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_k + \sum \bar{F}_{ik} \cdot \bar{v}_j ,$$

sau altfel scriind

$$\mathrm{D}_i \left(\sum \frac{1}{2} m \bar{v}_j \cdot \bar{v}_k\right) = \frac{1}{2} \left(\sum \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_k + \sum \bar{F}_{ik} \cdot \bar{v}_j\right).$$

În notațiile noastre și punînd

$$P_{ijk} = \sum \bar{F}_{ij} \cdot \bar{v}_k ,$$

aceste ecuații se transcriu

$$\mathrm{D}_i T_{jk} = \frac{1}{2} \left(P_{ijk} + P_{ikj}\right), \tag{18''}$$

sau dînd indicilor i, j, k valorile 1 sau 2 :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 T_{11} &= P_{111}, \\ \mathrm{D}_1 T_{12} &= \frac{1}{2} \left(P_{112} + P_{121}\right), \\ \mathrm{D}_1 T_{22} &= P_{122}, \\ \mathrm{D}_2 T_{11} &= P_{211}, \\ \mathrm{D}_2 T_{12} &= \frac{1}{2} \left(P_{212} + P_{221}\right), \\ \mathrm{D}_2 T_{22} &= P_{222} . \end{aligned} \tag{18'''}$$

Vizibil în prima, a treia, a patra și a șasea din aceste ecuații recunoaștem forma teoremei energiei cinetice, prima și ultima dînd teorema energiei cinetice cînd mișcarea este raportată numai la unul din triedrele (T_1) sau (T_2). Celelalte două ecuații, ca și a doua și a cincea din ecuațiile (18'''), extind teorema energiei cinetice cînd mișcarea este raportată atît la triedrul (T_1) cît și la (T_2).

Primită la redacție la 26 august 1962

РАССМОТРЕНИЕ ВОПРОСА О СИСТЕМАХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ НЬЮТОНОВОЙ МЕХАНИКИ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются некоторые из главных механических понятий и законов, связанных с относительным ньютоновым движением системы материальных точек, отнесенной к двум триэдрам (T_1) и (T_2) находящимся в движении относительно друг друга.

Дается единый способ изучения таких задач, при помощи которого можно получить ряд результатов В. Вылковича.

Существенная идея работы состоит в том, что кроме триэдров (T_1) и (T_2) рассматривается еще и третий триэдр — так называемый центральный триэдр T.

CONSIDÉRATIONS, AU POINT DE VUE DE LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE, SUR LES SYSTÈMES DE POINTS MATÉRIELS

RÉSUMÉ

L'auteur approfondit quelques notions et lois mécaniques importantes ayant trait au mouvement relatif newtonien d'un système de points matériels rapporté à deux trièdres de référence (T_1) et (T_2), mobiles l'un par rapport à l'autre.

On présente un procédé unitaire permettant de retrouver une série de résultats de V. Valcovici.

L'auteur considère — c'est l'idée fondamentale de son travail —, outre les trièdres de référence (T_1) et (T_2), un troisième trièdre de référence, dénommé trièdre central (T).

BIBLIOGRAFIE

1. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle* (ed. a IV-a), Paris, 1931, **II.**
2. T. LEVI-CIVITA, U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale.* Bologna, **II**, part. I.
3. V. VÂLCOVICI, *Sur le théorème de moments des quantités de mouvement.* C.R. Acad. Sci. Paris, **160**, 334 (1915).
4. — *Généralisation du théorème de Koenig.* C.R. Acad. Sci. Paris, **188**, 769 (1929).
5. — *Généralisation du théorème de l'énergie.* C.R. Acad. Sci. Paris, **189**, 679 (1929).
6. — *Sur les théorèmes généraux du mouvement des systèmes.* Bull. Math. Soc. Roum. Sci., **40**, *1—2* (1938).

CONSIDERAȚII ASUPRA OMOLOGIEI SINGULARE PE CW-COMPLEXE

DE

DAN BURGHELEA și NICOLAE POPESCU

INTRODUCERE

În articolul de față se dă o demonstrație completă a teoremei de calcul a grupurilor de omologie a unui CW - complex. Autorii reiau această teoremă datorită lui Wheathead și o demonstrează într-o manieră deosebită de cea clasică. Demonstrația clasică urmează ideia demonstrației unei teoreme analoge pentru poliedre din [10].

Teorema demonstrată se aplică efectiv la calculul grupurilor de omologie a spațiilor proiective, varietăți Grassman și varietăți Auslender, al căror calcul prin metode clasice este complicat.

Articolul conține 3 părți. În prima parte se dau o serie de teoreme rezultate din definiția CW - complexelor, teoreme necesare ulterior, și se verifică că spațiile mai sus amintite sînt CW - complexe.

În partea a doua se demonstrează teorema de calcul a grupurilor de omologie a unui CW - complex și se calculează efectiv aceste grupuri pentru spațiile amintite.

În sfîrșit, în partea a treia se definește noțiunea de CW - complex relativ, datorită lui G. Wheathead și se indică generalizarea la aceste spații a teoremei de calcul.

I. CW - COMPLEXE

Fie X un spațiu topologic Hausdorff; vom spune că X este un complex celular dacă el este o reuniune de celule euclidiene (deschise) disjuncte, care vor fi notate e, e^n, e_i^n, ..., indicele superior indicînd dimensiunea celulei, astfel că închiderea $\bar{e}^n$ a unei celule oarecare este imaginea printr-o funcție continuă f, numită caracteristică a unui cub I^n [1]) cu condițiile :

1. $f/\mathrm{Int}\ I^n$ este un omeomorfism pe e^n;

[1]) În loc de I^n putem considera orice submulțime a lui R^n omeomorfă cu I^n, de exemplu un simplex de dimensiune n, discul E^n etc.

2. $\partial e^n \subset X^{n-1}$, unde $\partial e^n = f \cdot \partial I^n = f(\dot{I}^n)$, iar X^{n-1} este scheletul de dimensiune $n-1$ al lui X, adică reuniunea tuturor celulelor de dimensiune $\leqslant n-1$; celulele de dimensiune zero sînt puncte, un punct coincizînd cu închiderea sa.

Exemple de complexe celulare. *a*) Orice complex simplicial K este un complex celular, deoarece pentru două simplexe A, B ale sale, cu $A \neq B$, avem $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B = \emptyset$, orice punct se află în interiorul unui simplex iar condiţiile 1 şi 2 sînt evident satisfăcute.

b) Considerăm torul T^n; el se obţine din I^n prin identificarea feţelor opuse.

Este evident că T^n este o reuniune de celule disjuncte, iar condiţiile 1 şi 2 sînt vizibil verificate.

Prin subcomplex X_1 al complexului celular X se înţelege un subspaţiu al lui X, care este o reuniune de celule din X, cu proprietatea :

$$(\alpha) \qquad e^n \subset X_1 \Rightarrow \bar{e}^n \subset X_1 .$$

Exemplu de subcomplex. Pentru orice complex celular scheletul n-dimensional, unde n este un număr întreg oarecare, constituit din mulţimea celulelor de dimensiune $r \leqslant n$ este un subcomplex, pentru că dacă $e^r \subset X^n$, atunci $\bar{e}^r = e^r \cup \partial e^r \subset X^r \cup X^{r-1} \subset X^n$.

Se verifică uşor că orice reuniune sau intersecţie de subcomplexe este încă un subcomplex.

Pentru o mulţime $A \subset X$, notăm cu $X(A)$ intersecţia tuturor subcomplexelor lui X care conţin pe A. Dacă $x \in X$ şi $x \in e^n \subset X$, atunci $X(x) = X(e^n) = X(\bar{e}^n)$, deoarece dacă X_1 este un subcomplex care conţine pe x, atunci $e^n \subset X_1$ şi deci şi $\bar{e}^n \subset X_1$, în virtutea proprietăţii (α). Un subcomplex X_1 al lui X se zice finit dacă conţine doar un număr finit de celule; el este o mulţime compactă şi deci închisă, ca reuniune finită de mulţimi compacte.

Produsul topologic a două complexe celulare X, Y este un complex celular, ale cărui celule sînt produse de celule din X şi Y respectiv $e^{n_1+n_2} = e^{n_1} \times e^{n_2}$, $e^{n_1} \subset X$, $e^{n_2} \subset Y$.

Într-adevăr, fie $f_i : I^{n_i} \to \bar{e}^{n_i}$ $(i = 1, 2)$. Considerăm aplicaţia $g : I^{n_1+n_2} \to \bar{e}^{n_1+n_2}$ definită astfel $g(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ cu $x_1 \in I^{n_1}$, $x_2 \in I^{n_2}$. Se verifică uşor condiţiile 1 şi 2 din definiţia complexului celular.

CW - complexe. Definiţie. *Prin CW - complex înţelegem un complex celular X, cu proprietăţile* :

3. *$X(e^n)$ este un subcomplex finit pentru orice celulă e^n a lui X*;

4. *O mulţime F a lui X este închisă dacă şi numai dacă $F \cap \bar{e}^n$ este închisă pentru orice celulă e^n a lui X.*

Observaţie. Pentru verificarea proprietăţii 4 este suficient să vedem dacă din $F \cap e$ este închisă pentru orice e, rezultă că F este închisă.

Într-un complex celular, $\bar{e}^n$ este pentru orice celulă e^n susceptibilă la două topologii : una care este imaginea prin aplicaţiile $f_n : I^n \to \bar{e}^n$, a topologiei reuniunii disjuncte de cuburi I^n_k $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k \in A$, iar

alta cea indusă de topologia din X pe $\bar{e}^n$ ca subspațiu; proprietatea 4 pe care trebuie s-o satisfacă orice CW - complex, afirmă că cele două topologii coincid pe $\bar{e}^n$ pentru orice celulă e^n [1]).

Un complex celular care satisface proprietatea 4 se zice că are *topologia slabă*, iar dacă satisface proprietatea 3 se zice *închidere finită*. Așadar CW - complexul este un complex celular care are topologia slabă și este închidere finită.

Un complex celular X, finit, este evident o închidere finită și în plus dacă $F \cap \bar{e}_i$ este mulțime închisă pentru orice i, atunci $F = \bigcup_{i=1}^{n} F \cap \bar{e}_i$ (n fiind numărul de celule ale lui X care este finit) este și ea închisă, deci X are și topologia slabă. Așadar:

Orice complex celular finit este un CW - complex.

Această proprietate ne permite să demonstrăm un rezultat și mai general și anume:

Un complex celular X local finit este un CW - complex.

Prin *local finit* se înțelege că orice punct este conținut în interiorul unui subcomplex finit.

Fie acum X local finit, atunci $X(x)$ este finit pentru orice punct $x \in X$, adică $X(e^n)$ este finit pentru orice celulă e^n, deci X este o *închidere finită*. Fie acum $F \subset X$ astfel că $F \cap \bar{e}^n$ este închisă pentru orice celulă e^n a lui X. Atunci $F \cap Y$ este închisă pentru orice subcomplex finit Y al lui X; vom arăta că F este închisă în X, adică $X \setminus F$ este deschisă.

Fie pentru aceasta $x \in X \setminus F$; x este un punct interior pentru un subcomplex finit $X(x)$, iar $F \cap X(x)$ este închisă și $X(x) \setminus F = (X(x) \setminus F) \cap X(x)$ este o mulțime deschisă din $X \setminus F$ care conține pe x. Înseamnă că $\operatorname{Int} X \setminus F = X \setminus F$, deci $X \setminus F$ este deschisă, așa că F este închisă.

X are topologia slabă, așa că este un CW - complex.

Din cele demonstrate putem trage următoarele consecințe:

a) Un complex simplicial finit este un CW - complex și mai mult un complex simplicial infinit, local finit este un CW - complex, adică topologia slabă și topologia metrică coincid pe astfel de complexe simpliciale.

b) Trebuie remarcat faptul că nu orice complex celular este un CW - complex. Spre exemplu, putem considera sfera S^n, în care celulele sînt punctele (un spațiu separat poate fi considerat ca complex celular, avînd drept celule punctele). Evident că S^n este o închidere finită, dar nu are topologia slabă.

Observație. Pe un spațiu topologic se pot da mai multe descompuneri celulare (triangulări celulare). În unele din acestea, spațiul este CW - complex, în altele nu. Un CW - complex presupune un spațiu dat și o triangulare dată.

Prin abuz de limbaj noi spunem că X este un CW - complex, dacă există cel puțin o triangulare în care acesta este CW - complex.

Spațiul proiectiv real P^n este un CW - complex.

---

[1]) Este suficient să verificăm că orice mulțime din $\bar{e}^n$ a cărei imagine reciprocă în I^n este închisă, este închisă. Într-adevăr, orice mulțime închisă din I^n fiind și mărginită este compactă, așa că imaginea ei printr-o funcție continuă este compactă în X, deci închisă în X.

Scheletul de dimensiune $n-1$ al lui P^n este deci P^{n-1}, adică $P^n = e^n \cup P^{n-1}$.

În mod analog, $P^{n-1} = P^{n-2} \cup e^{n-1}$ și prin recurență

$$P^n = e^n \cup e^{n-1} \cup e^{n-2} \cup \ldots \cup e^1 \cup e^0.$$

Așadar, P^n este un complex celular cu un număr finit de celule, deci un CW - complex.

Spațiul proiectiv complex și spațiul cuaternionic sînt de asemenea CW - complexe. Descompunerea lor în celule (triangularea celulară) se face asemănător.

Obținem însă celule complexe sau cuaternionice de dimensiune de două ori sau de patru ori mai mari, adică pentru

$$PC^n = e^{2n} \cup e^{2n-2} \cup \ldots e^2 \cup e^0,$$

$$PK^n = e^{4n} \cup e^{4n-4} \cup \ldots \cup e^4 \cup e^0.$$

Varietatea Auslender A_3. Pentru definirea ei se consideră R^3 și grupul G acționînd în R^3 definit de ecuațiile :

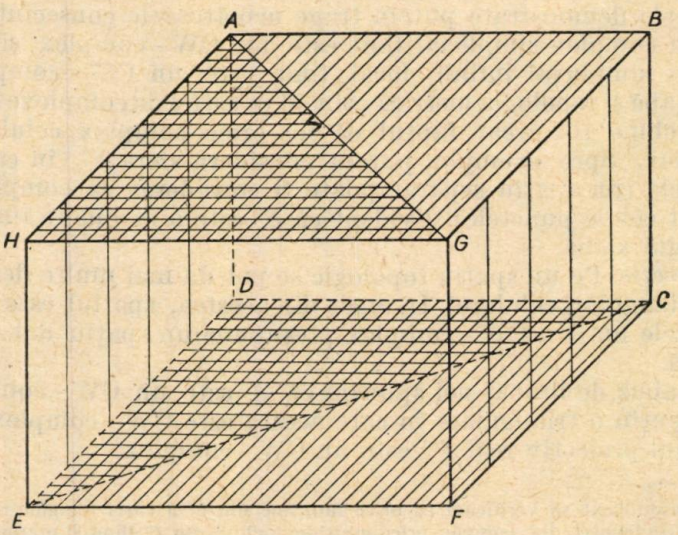
$$\overline{X}^1 = x^1 + tx^2 + r,$$

$$\overline{X}^2 = x^2 + s, \qquad r,\ s,\ t \in Z.$$

$$\overline{X}^3 = x^3 + t,$$

Spațiul cît R^3/G este o varietate (spațiul local afin) care admite cubul I^3 ca domeniu fundamental (adică orice punct din R^3 este echivalent relativ la G cu un punct din I^3 și două puncte din interiorul lui I^3 nu sînt echivalente).

Intuitiv pentru a obține varietatea Auslender trebuie ca pe frontiera lui I^3 să fie identificate părțile haşurate în acelaşi fel (sau albe) (figura).



Identificările sînt :

$$ABG \text{ cu } ECF \quad \left\{\begin{matrix} AG \text{ cu } EF \\ AB \text{ cu } EC \\ GB \text{ cu } FC \end{matrix}\right\} \bar{e}_1^2$$

$$AHG \text{ cu } ECD \quad \left\{\begin{matrix} AG \text{ cu } EF \\ HA \text{ cu } ED \\ HG \text{ cu } DC \end{matrix}\right\} \bar{e}_2^2$$

$$HGFE \text{ cu } ABCD \left\{\begin{matrix} EF \text{ cu } DC \\ HE \text{ cu } AD \\ FG \text{ cu } CB \end{matrix}\right\} \bar{e}_3^2$$

$$AHED \text{ cu } BGFC \left\{\begin{matrix} GF \text{ cu } HE \\ FC \text{ cu } ED \\ BC \text{ cu } AD \\ GB \text{ cu } HA \end{matrix}\right\} \bar{e}_4^2$$

Orientarea muchiilor care se suprapun este dată de ordinea indicată de extremități ; spre exemplu EF se suprapun peste DC și anume E peste D și F peste C. Putem triangula varietatea A_3 ca complex celular în felul următor :

— O celulă de dimensiune trei e^3 ; $\bar{e}^3$ este însăși A_3 aplicația caracteristică fiind cea care asociază oricărui punct clasa de echivalență din I^3/G. Evident această aplicație este un omeomorfism relativ la interiorul lui I^3.

— Patru celule de dimensiune doi e_1^2, e_2^2, e_3^2, e_4^2 și anume interioarele fețelor care se identifică, după modul arătat mai sus.

— Patru celule de dimensiune unu $\bar{e}_1^1$ (HE, GF, BC, AD) unde laturile scrise în paranteză sînt laturi care se identifică :

$$\bar{e}_2^1 \ (AB,\ EC,\ HG),$$

$$\bar{e}_3^1 \ (GB,\ FC,\ HA,\ ED),$$

$$\bar{e}_4^1 \ (EF,\ AG,\ DC).$$

— O celulă de dimensiune zero e° (A, B, C, D, E, F, G, H).

În concluzie, A_3 este un complex celular cu un număr finit de celule, deci un CW - complex.

Varietățile Grassman. Varietățile Grassman peste corpul $\mathcal{K}$ (care este corpul real R, corpul complex C sau corpul cuaternionic K), $\mathcal{G}\mathcal{K}(k, n)$ pot fi considerate ca mulțime a varietăților liniare k — dimensionale din spațiul proiectiv $P\mathcal{K}^n$, cu topologia cît. Se folosesc notațiile lui Schubert prin care un element al varietății $\mathcal{G}\mathcal{K}(k, n)$ se notează $\{k\}$, iar cu $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, unde $0 \leqslant a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_k \leqslant n$, $a_i \in Z$, $i = 0, \ldots, k$ și

$[a_0] \subset [a_1] \ldots \subset [a_k] \subset [n]$ ($[p]$ desemnînd varietatea liniară de dimensiune p din $P\mathcal{X}^n$), varietatea formată din elemente $\{k\}$ conținute în $[a_k]$ și care au comun cu $[a_i]$ o varietate cu cel puțin i dimensiuni.

Se demonstrează teorema:

Varietatea $[a_0, a_1, \ldots a_k] - \sum_{i=1}^{i=k} [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$, *unde se consideră numai acele varietăți* $[a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$ *pentru care simbolurile* $[a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$ *au sens, adică îndeplinesc condițiile* $0 \leqslant a_0 < a_1 < \ldots < a_{i-1} < a_i - 1 < a_{i+1} \ldots \leqslant n$, *este omeomorfă cu o celulă* [4].

Dimensiunea acestei celule este evident $a_0 + a_1 + \ldots a_k - \frac{k(k+1)}{2}$.

Să considerăm spre exemplu varietatea $\mathcal{G}K$ [1, 3] peste corpul K, real, complex sau cuaternionic. Numărul celulelor este C_4^2. Ele sînt date de varietățile care sînt definite de următoarele simboluri Schubert: [0,1], [0,2], [0,3], [1,2], [1,3], [2,3].

Din acestea

[0,1] — o celulă (k) de dimensiune $1 - \frac{1.2}{2} = 0$;

[0,2] — o celulă (k) de dimensiune $2 - \frac{1.2}{2} = 1$;

[0,3] [1,2] — două celule (k) de dimensiune $3 - \frac{1.2}{2} = 2$;

[1,3] — o celulă (k) de dimensiune $4 - \frac{1.2}{2} = 3$;

[2,3] — o celulă (k) de dimensiune $5 - \frac{1.2}{2} = 4$.

Dacă varietatea Grassman considerată este reală, atunci triangulaiea este formată din celule reale, exact cele indicate.

Dacă varietatea este complexă, atunci unei celule complexe îi corespunde o celulă reală de dimensiune de două ori mai mare, adică celulele varietății $\mathcal{G}K$ [1, 3] considerată peste corpul complex sînt $e^0, e^2, e_1^4, e_2^4, e^6, e^8$. Dacă $\mathcal{G}K$ [1,3] este considerată peste corpul cuaternionic, cum unei celule cuaternionice îi corespunde o celulă reală de dimensiune de patru ori mai mare, celulele varietății sînt $e^0, e^4, e_1^8, e_2^8, e^{12}, e^{16}$.

Frontiera celulei varietății $[a_0, \ldots, a_k]$ este evident conținută în scheletul de dimensiune $a_0 + \ldots + a_k - \frac{k(k+1)}{2} - 1$, căci este formată din varietăți de forma $[a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$. În concluzie, varietățile Grassman sînt complexe celulare finite, deci CW-complexe.

Vom demonstra acum cîteva teoreme importante în legătură cu CW-complexele.

TEOREMA 1.1. *Aplicația* $f: \bar{A} \to Y$ *a unei mulțimi închise* $\bar{A}$ *dintr-un CW-complex* X, *într-un spațiu* Y, *este continuă dacă* $f_{\bar{A} \cap \bar{e}^n}$ *este continuă pentru orice* $e^n \subset X$.

Demonstrație. Fie $f_{\overline{A}\cap\bar{e}^n}$ continuă pentru orice $e^n \subset X$ și B o mulțime închisă din Y, atunci $\bar{e}^n \cap f^{-1}(B)$ este închisă pentru orice $e^n \in X$, deci $f^{-1}(B)$ este închisă în X, deci și în A, adică f este continuă pe $\overline{A}$.

TEOREMA 1.2. *Dacă $Y \subset X$, este un subcomplex al CW-complexului X, atunci Y este un subspațiu închis al lui X a cărui topologie indusă de X este cea slabă.*

Fie $F \subset Y$ astfel încît $F \cap Y_0$ este închis și de aceea compact pentru orice $Y_0 \subset Y$, unde Y_0 este un subcomplex finit care este evident compact.

Cum $F \cap Y_0$ este compact, ea este submulțime închisă a lui X.

Fie X_0 un subcomplex finit al lui X. Atunci $Y_0 = Y \cap X_0$ este un subcomplex finit al lui Y și $F \cap Y_0 = F \cap Y \cap X_0 = F \cap X_0$.

De aceea $F \cap X_0$ este închis, de unde F este închis în X, și deci și în Y, deci F are topologia slabă. În particular, dacă $F = Y$, rezultă că Y este subspațiu închis.

TEOREMA 1.3. *Dacă C este o submulțime compactă a CW-complexului X, atunci $X(C)$ este finit.*

Demonstrație. Dacă C este acoperită de un număr finit $e_1^{n_1}, \ldots, e_k^{n_k}$ de celule din X, atunci $C \subset \bigcup_{i=1}^{k} X(e_i^{n_i})$, care este un subcomplex finit. Admitem că C compactă în X intersectează o familie oarecare $\{e_\alpha^{n_\alpha}\}_{\alpha\in I}$ de celule din X și să presupunem că aceasta nu este finită. Considerăm mulțimea $A = \{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ cu $x_\alpha \in e_\alpha^{n_\alpha} \cap C$. Fie A' o submulțime a lui A. Orice $\bar{e}^n$ cu e^n o celulă a lui X are comun cu A' doar un număr finit de puncte, deoarece $X(\bar{e}^n)$ este finit și în orice celulă a lui $X(\bar{e}^n)$ se poate afla cel mult un punct din A'. Deci intersecția lui A' cu orice $\bar{e}^n$ este închisă, și deci A' este o mulțime închisă. Din arbitrariitatea lui A' în A, deducem că orice submulțime a lui A este închisă, adică A este o mulțime discretă și infinită în C, ceea ce contrazice compactitatea lui C. Așadar mulțimea celulelor care intersectează pe C este finită.

Milnor în [8] a demonstrat că produsul a două CW-complexe numărabile este încă un CW-complex, iar I. H. Wheathead că produsul a două CW-complexe, din care măcar unul este local finit, este un CW-complex [1], [2].

Se deduce simplu că cilindrul cît și conul peste un CW-complex sînt încă CW-complexe și la fel suspensia.

Tot I. H. Wheathead a demonstrat că un CW-complex este un spațiu normal și, mai mult, chiar metrizabil, separabil și local contractibil [1], [2], [3].

II. GRUPURILE DE OMOLOGIE SINGULARĂ ALE CW-COMPLEXELOR

Admitem definită teoria omologiei singulare pe spații topologice oarecare, deci și pe CW-complexe. Vom demonstra mai întîi cîteva leme generale asupra grupurilor de omologie, ca apoi considerînd grupurile de omologie ale CW-complexelor, să arătăm că ele sînt conținute într-un anume complex de lanțuri.

Vom demonstra mai întîi trei leme.

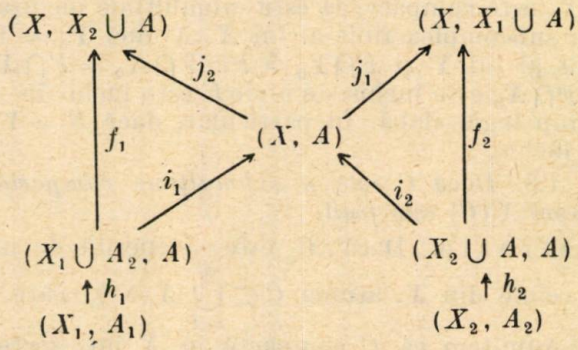
LEMA 2.1 [1]). *Fie perechea* (X,A), *unde* X *este un spațiu topologic și* A *un subspațiu al său. Fie* $X = X_1 \cup X_2$, $X_i = \overline{X_i}$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ *și* $A_i \subset X_i$, $i = 1,2$, $A = A_1 \cup A_2$.

În aceste condiții, pentru orice q, *avem*

$$H_q(X, A) = H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2),$$

unde H_q *sînt grupurile de omologie singulară.*

Demonstrație. Considerăm schema de mai jos.

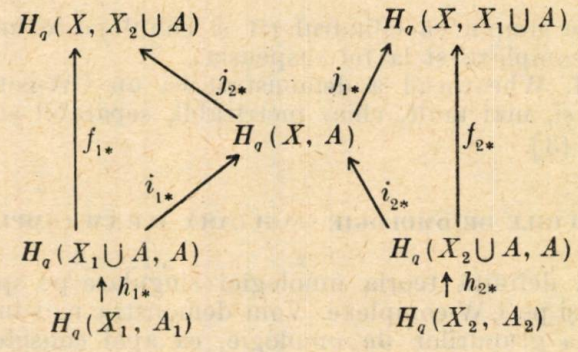


i_1, i_2, j_1, j_2 sînt scufundări, iar f_1, f_2, h_1 și h_2 sînt excizii. Într-adevăr, verificăm că f_1 este excizie.

Considerăm perechea $(X, X_2 \cup A)$ și mulțimea $X_2 \setminus A$. Mulțimea $X_2 = \overline{X}_2$ este închisă și de asemenea și deschisă, căci $X_1 = \overline{X_1}$ este închisă, iar $X_2 = C_{X_1}$ care este deschisă. Deoarece X_2 este deschisă, $\overline{X_2 - A} \subset X_2 = \overline{X}_2$ și deci $X_2 - A$ are proprietatea că este conținută în interiorul lui X_2 deci și în interiorul lui $X_2 \cup A$.

Analog se verifică că și celelalte aplicații sînt excizii.

Verificarea că diagramele care apar în schema de mai sus sînt comutative este trivială. Așadar schema de mai sus induce schema cu diagrame comutative:



[1]) Demonstrația este reprodusă după Eilenberg și Steenrod.

Din șirul exact al triadelor (a se vedea sfîrșitul cap. III) $(X, X_2 \cup A, A)$ și $(X, X_1 \cup A, A)$, avem $\operatorname{Im} i_{1*} = \ker j_{1*}$, $\operatorname{Im} i_{2*} = \ker j_{2*}$.

f_{1*}, f_{2*}, h_{1*}, h_{2*} sînt izomorfisme de excizie.

i_{1*} și i_{2*} sînt monomorfisme, deoarece (spre exemplu) $f_{2*} = j_{1*} \circ i_{2*}$ și din $i_{2*}(x) = 0$, deducem $j_{1*} \circ i_2(x) = f_{2*}(x) = 0$ adică $x = 0$.

Arătăm acum că $H_q(X, A) \approx \operatorname{Im} i_{1*} \oplus \operatorname{Im} i_{2*}$.

Dacă $x \in H_q(X, A)$ atunci $j_{1*}(x) = f_{2*}(y)$ cu $y \in H_q(X_2 \cup A, A)$ și $j_{1*} - j_{2*}(y) = f_{2*}(y)$, adică $i_{2*}(y) - x \in \ker j_{1*}$ deci $i_{2*}(y) - x = i_{1*}(z)$ cu $z \in H_q(X_1 \cup A, A)$ deci $x = i_{2*}(y) - i_{1*}(z) \in \operatorname{Im} i_{1*} + \operatorname{Im} i_{2*}$, și cum $\operatorname{Im} i_{1*} \cap \operatorname{Im} i_{2*} = 0$ deducem din cele de mai sus că :

$$H_q(X, A) = \operatorname{Im} i_{1*} \oplus \operatorname{Im} i_{2*} \approx H_q(X_1 \cup A_1, A) \oplus H_q(X_2 \cup A, A)$$

iar datorită izomorfismelor h_{1*} și h_{2*} (izomorfisme de excizie) $H_q(X, A) \approx$ $\approx H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2)$.

LEMA 2.2. *Fie (X, A) o pereche de spații topologice, A subspațiu al lui X și $X = X_1 \cup X_2$ cu $X_i = \overline{X_i}$. Fie acum $A = A_1 \cup A_2$, $A_i \subset X_i$ $(i = 1,2)$ și A_i deschise în X.*

Dacă $(X_1 \setminus A_1) \cap (X_2 \setminus A_2) = \emptyset$, atunci $H_q(X, A) \approx H_q(X_1, A_1) \oplus$ $\oplus H_q(X_2, A_2)$.

Demonstrație. Teorema excziei ne asigură că $H_q(X, A) \approx$ $\approx H_q(X \setminus (X_1 \cap X_2), A \setminus (X_1 \cap X_2))$, deoarece $X_1 \cap X_2 \subset A$, și $X_1 \cap X_2 = \overline{X_1 \cap X_2}$. Perechii $(X \setminus (X_1 \cap X_2), A \setminus (X_1 \cap X_2))$ îi aplicăm lema 2.1 și obținem

$$H_q(X \setminus (X_1 \cap X_2), A \setminus (X_1 \cap X_2)) = H_q(X_1 \setminus (X_1 \cap X_2), A_1 \setminus (X_1 \cap X_2)) \oplus$$
$$\oplus H_q(X_2 \setminus (X_1 \cap X_2), A_2 \setminus (X_1 \cap X_2)).$$

Dar teorema exciziei aplicată perechii (X_i, A_i), $i = 1,2$, dă

$$H_q(X_i \setminus (X_1 \cap X_2), A_i \setminus (X_1 \cap X_2)) \approx H_q(X_i, A_i), \qquad i = 1,2.$$

Combinînd aceste rezultate obținem

$$H_q(X, A) \approx H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2).$$

LEMA 2.3. *Fie în spațiul topologic X, p mulțimi închise X_i, astfel ca $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$, și p mulțimi deschise $A_i \subset X_i$, astfel ca $(X_i - A_i) \cap (X_j - A_j) = \emptyset$ $(i \neq j)$.*

Atunci :

$$H_q(X, \bigcup_{i=1}^{p} A_i) = \sum_{i=1}^{p} H_q(X_i, A_i)^{1)} \qquad (i = 1, \ldots, p).$$

---

1) Suma este directă.

Într-adevăr, să punem $X_2' = \bigcup_{i=2}^{p} X_i$, $A_2' = \bigcup_{i=2}^{p} A_i$ deschisă în X şi

$$(X_1 - A_1) \cap (X_2' - A_2') = (X_1 - A_1) - (\bigcup_{i=2}^{p} (X_i - A_i)) = \varnothing.$$

Aplicînd lema 2.2 rezultă că $H_q(X, A) = H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2', A_2')$. Cum rezultatul este adevărat pentru $p = 2$ (lema 2.2) şi presupunîndu-l adevărat pentru $p - 1$, am arătat că este adevărat pentru p. Prin inducţie completă lema este demonstrată.

LEMA 2.4. *Pentru orice celulă* e^n *a CW-complexului* X, *există o mulţime* $D \subset \bar{e}^n$, *deschisă, care admite ca retractă de deformare pe* $\partial \bar{e}^n$

Demonstraţie. Fie f^n aplicaţia caracteristică a lui $\bar{e}^n$

$$f^n : I^n \to \bar{e}^n.$$

Fie cubul I_0^n inclus în interiorul lui I^n şi avînd acelaşi centru cu el. Mulţimea

$$L^n = I^n - I_0^n$$

este deschisă în I^n şi admite ca retractă de deformare pe $\dot{I}^n$. Retracţia lui L^n la $\dot{I}^n$ se poate face pe razele ce unesc centrul cubului I^n cu punctele frontierei.

Fie $\Phi : L^n \times I \to L^n$ aplicaţia de retractare a lui L^n la $\dot{I}^n$; atunci :

$$\Phi(x, 0) = x, \qquad x \in L^n,$$

$$\Phi(x, t) = x, \qquad x \in \dot{I}^n,$$

$$\Phi(x, 1) \in \dot{I}^n, \qquad x \in L^n.$$

Fie $D = f_n(L)$; deoarece $f^{-1}(D) = L^n$ şi din faptul că $\bar{e}^n$ are topologia de identificare indusă de f_n, atunci D este deschisă în $\bar{e}^n$.

Fie acum aplicaţia

$$\Psi : D \times I \to D$$

definită astfel ca diagrama

$$\begin{array}{ccc} L^n \times I & \xrightarrow{\bar{f}_n} & D \times I \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ L & \xrightarrow{f_n} & D \end{array}$$

să fie comutativă, adică $\Psi_n(y, t) = f_n \circ \Phi(x, t)$, cu $f_n(x) = y$. Se verifică imediat că :

$$\Psi(y, 0) = y, \qquad y \in D,$$

$$\Psi(y, t) = y, \qquad y \in \dot{e}^n,$$

$$\Psi(y, 1) = \dot{e}^n \qquad y \in D.$$

Lema este complet demonstrată.

Observații. *a*) X^{n-1} (scheletul de dimensiune $n-1$ al lui X) este retractă de deformare pentru mulțimea $X^{n-1} \cup D$, retracția fiind ca mai sus, punctele lui $X^{n-1} \setminus \dot{e}^n$ rămînînd fixe de-a lungul retracției; *b*) $\bar{e}^n \setminus D$ este închisă în $X^{n-1} \cup \bar{e}^n$ și deci $\bar{e}^n \cup X^{n-1} \setminus D \cup X^{n-1}$ este închisă în $\bar{e}^n \cup X^{n-1}$, deci $D \cup X^{n-1}$ este deschisă în $X^{n-1} \cup \bar{e}^n$.

Din lema 2.4 se deduce

LEMA 2.5. *Omomorfismul* f_{n*} *indus de aplicația caracteristică* $f_n : (I^n, \dot{I}^n) \to (\bar{e}^n, \dot{e}^n)$, *este izomorfism.*

Demonstrație. Folosim schema:

$$\begin{array}{ccccc} (I^n, \dot{I}^n) & \xrightarrow{i_1} & (I^n, L) & \xleftarrow{i_2} & (\mathrm{Int}\, I^n, L \setminus \dot{I}^n) \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_n^1 & & \downarrow f_n^2 \\ (\bar{e}^n, \dot{e}^n) & \xrightarrow{j_1} & (\bar{e}^n, D) & \xleftarrow{j_2} & (e^n, D \setminus \dot{e}^n) \end{array}$$

Deoarece i_1, i_2, j_1, j_2 sînt scufundări și f_n^1, f_n^2 sînt induse de f_n, diagramele sînt comutative.

Schema de mai sus induce schema cu diagrame comutative pentru orice q întreg:

$$\begin{array}{ccccc} H_q(I^n, \dot{I}^n) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_q(I^n, L) & \xleftarrow{i_{2*}} & H_q(\mathrm{Int}\, I^n, L \setminus \dot{I}^n) \\ \downarrow f_{n*} & & \downarrow f_{n*}^1 & & \downarrow f_{n*}^2 \\ H_q(\bar{e}^n, \dot{e}^n) & \xrightarrow{j_{1*}} & H_q(\bar{e}^n, D) & \xleftarrow{j_{2*}} & H_q(e^n, D \setminus \dot{e}^n) \end{array}$$

Din lema 2.4 deducem că i_{1*} este izomorfism, și la fel j_{1*}, i_{2*} și j_{2*} sînt izomorfisme de excizie, iar din faptul că f_n^2 este omeomorfism deducem că f_{n*}^2 este izomorfism. Rezultă

$$f_{n*}^1 = j_{2*} \circ f_{n*}^2 \circ i_{2*}^{-1},$$

deci f_{n*}^1 este izomorfism. Analog, f_{n*} este izomorfism. Lema 2.5 este demonstrată.

Observații. a) Avem

$$H_q(\bar{e}^n, \dot{e}^n) \approx H_q(I^n, \dot{I}^n) \approx \begin{cases} 0 \text{ dacă } q \neq n, \\ Z \text{ dacă } q = n. \end{cases} \tag{1}$$

b) Din observațiile *a* și *b* de la lema 2.4, deducem

$$H_q(\bar{e}^n \cup X^{n-1}, D \cup X^{n-1}) \approx H_q(e^n, D \setminus \dot{e}^n) \approx H_q(\bar{e}^n, D) \approx H_q(\bar{e}^n, \dot{e}^n). \tag{2}$$

TEOREMA 2.1. *Pentru orice CW-complex* X *și orice* n, *grupul de omologie singulară* $H_q(X^n, X^{n-1})$ *este izomorf cu un grup liber avînd ca bază celulele de dimensiune* n *ale lui* X *dacă* $q = n$ *și este trivial dacă* $q \neq n$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema întîi în cazul particular cînd numărul celulelor de dimensiune n este finit. Fie deci $e_1^n \ldots e_k^n$ toate celulele de dimensiune n.

$$X^n = X^{n-1} \cup \bar{e}_1^n \cup \bar{e}_2^n \cup \ldots \cup \bar{e}_k^n ; \; e_i^n \cap e_j^n = \varnothing, \qquad i \neq j.$$

Fie $D_i \subset \bar{e}_i^n$, cu $\dot{e}_i^n$ retractă de deformarea pentru D_i $(i = 1,2, \ldots, k)$. Considerăm perechile

$$(\bar{e}_i^n \cup X^{n-1}, \; D_i \cup X^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

$D_i \cup X^{n-1}$ este deschisă în $\bar{e}_i^n \cup X^{n-1}$ $(i = 1, \ldots, k)$ iar $D_i \cup X^{n-1}$ este deschisă în X^n.

Sîntem aşadar în condiţiile lemei 2.3, deci

$$H_q(X^n, \; X^{n-1}) = \sum_{i=1}^{k} H_q(\bar{e}_i^n \cup X^{n-1}, \; D_i \cup X^{n-1}).$$

Din (1) şi (2) rezultă teorema 2.1 pentru cazul cînd numărul celulelor lui X de dimensiune n este finit.

Fie numărul celulelor lui X de dimensiune n arbitrar. Fie C un ciclu singular al perechii $(X^n, \; X^{n-1})$. Avem atunci :

$$C = \sum_{i=1}^{r} m_i \, \varphi_i + C_q(X^{n-1}), \qquad m_i \in Z,$$

φ_i fiind cuburi singulare din X^n, astfel că

$$\partial C = \sum_{i=1}^{r} m_i \, \partial \varphi + C_{q-1}(X^{n-1}) \subset C_{q-1}(X^{n-1}).$$

Imaginile aplicaţiilor continue

$$\Phi_i : I^n \to X^n$$

sînt compacte, deci întîlnesc un număr finit de celule ce formează împreună cu închiderile lor un subcomplex finit X_0 al complexului X. Avem atunci

$$C \in Z_q(X_0^n, \; X_0^{n-1}). \tag{3}$$

Dacă avem $q \neq n$, din rezultatul stabilit mai sus, aplicat complexului finit X_0, rezultă $H_q(X_0^n, \; X_0^{n-1}) \approx 0$, deci C este frontiera unui lanţ din $C_{q+1}(X_0^n, \; X_0^{n-1})$ şi deci a unui lanţ din $C_{q+1}(X_0^n, \; X^{n-1})$ şi deci a unui lanţ din $C_{q+1}(X^n, \; X^{n+1})$. Avem deci

$$H_q(X^n, \; X^{n-1}) \approx 0, \qquad (q \neq n).$$

Să presupunem acum $q = n$. Atunci din formulele (1), (3) rezultă că ciclul relativ C este de forma

$$C = \sum_{i=1}^{r} m_i f_i + C_q(X^{n-1}), \tag{4}$$

f_i fiind aplicaţiile caracteristice ale celulelor din X_0.

Considerînd aplicațiile caracteristice ale celulelor din X drept elementele bazei grupului liber Γ generat de celulele lui X, formula (4) arată că putem defini un epimorfism al grupului Γ pe grupul $H_q(X^n, X^{n-1})$ prin formula $\sum_{i=1}^{r} m_i f_i \to \sum_{i=1}^{r} m_i f_i + C_q(X^{n+1})$. Acest epimorfism este un izomorfism, deoarece $\sum_{i=1}^{r} m_i f_i$ este un lanț de dimensiune n din $C_n(X^n)$, ce nu poate fi frontieră a unui lanț de dimensiune $n+1$ din $C_{n+1}(X^n)$, deoarece o relație de forma $\sum_{i=1}^{r} m_i f_i = \partial \sum_{i-1}^{r} n_i g_i$, $g_i \in C_{n+1}(X^n)$ citită în subcomplexul finit X_0 al complexului X, ce conține imaginile aplicațiilor g_i conduce, potrivit teoremei privind cazul particular considerat mai sus, la relațiile $m_i = 0$. Teorema este astfel demonstrată în cazul unui CW-complex arbitrar.

TEOREMA 2.2. *Dacă $p > q$, incluziunea $X^p \to X$ induce izomorfismul*

$$H_q(X^p) \approx H_q(X). \tag{5}$$

Demonstrație. Din șirul exact al perechii (X^{p+1}, X^p), deducem pentru $q < p$, utilizînd teorema 2.1, șirul exact

$$0 \to H_q(X^p) \xrightarrow{\alpha_p} H_q(X^{p+1}) \to 0 \tag{6}$$

din care rezultă că α_p este un izomorfism.

Fie C un ciclu din $C_q(X^p)$, $(q < p)$ și să presupunem că C este o frontieră în $C_q(X)$, $C = \partial a$ $(a \in C_{q+1}(X))$.

Fie X_0 un subcomplex finit al lui X, ce conține lanțul a. Fie r cea mai mare din dimensiunile celulelor lui X_0. Atunci avem

$$a \in C_{q+1}(X_0^n) \subset C_{q+1}(X^n).$$

Dacă $r \leqslant p$ rezultă că C este o frontieră în $C_q(X^p)$. Să presupunem $r > p$. Din izomorfismele α_i $(i = p, p+1, \ldots, r-1)$, date de șiruri exacte de forma (6) rezultă

$$\alpha_{r-1}\, \alpha_{r-2} \ldots \alpha_p (C + B_q(X^p)) = 0,$$

de unde $C + B_q(X^p) = 0$, deci C este frontieră și în $C_q(X^p)$. Am arătat deci că incluziunea $X^p \to X$ induce un monomorfism

$$X_q(X^p) \to X_q(X), \qquad (q < p). \tag{7}$$

Fie g un ciclu din $C_q(X)$, X_0 un subcomplex finit al lui X, conținînd lanțul g, și r numărul considerat mai sus. Dacă $r \leqslant p$ g este un ciclu din $C_q(X^p)$ și rezultă că imaginea omomorfismului conține clasa de omologie a ciclului g.

Dacă $r > p$, avem un izomorfism

$$H_q(X^p) \to H_q(X^r)$$

care arată că şi în acest caz clasa de omologie a ciclului g se găseşte în imaginea omomorfismului (7). Deci (7) este monomorfism şi epimorfism, iar teorema 2.2 este demonstrată.

TEOREMA 2.3. *Incluziunea* $X^p \to X$ *induce un epimorfism*

$$H_p(X^p) \to H_p(X). \tag{8}$$

Într-adevăr, din şirul exact al perechii (X^{p+1}, X^p) şi din relaţia $H_p(X^{p+1}, X^p) \approx 0$ rezultă şirul exact

$$H_p(X^p) \xrightarrow{\beta_p} H_p(X^{p+1}) \to 0$$

de unde deducem că β_p este un epimorfism.

Repetînd ultima parte din demonstraţia teoremei 2.1, obţinem teorema 2.2.

TEOREMA 2.4. *Omomorfismul de incluziune*

$$j : H_p(X^p) \to H_p(X^p, X^{p-1}) \tag{9}$$

este un monomorfism pentru fiecare dimensiune p.

Într-adevăr, din şirul exact al perechii (X^n, X^{p-1}) obţinem şirul exact

$$H_p(X^{p-1}) \to H_p(X^p) \to H_p(X^p, X^{p-1}). \tag{10}$$

Avem pe de altă parte şiruri exacte de forma

$$0 \to H_q(X^i) \to H_q(X^{i+1}) \to 0, \qquad (q > i+1),$$

din care rezultă izomorfismele

$$H_q(X^{q-1}) \approx H_q(X^{q-2}) \ldots \approx H_q(X^0) \approx 0 \tag{11}$$

şi din şirul exact (10) rezultă că j este un monomorfism.

TEOREMA 2.5. *Să notăm cu* δ' *omomorfismul* $\delta' = j'\partial$, *unde* j' *este monomorfismul* (9) *pentru* $p-1$ *iar* ∂' *omomorfismul de frontieră al perechii* (X^p, X^{p-1}). $\partial' H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1})$.

Atunci avem şirul exact

$$H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}). \tag{12}$$

Într-adevăr, avem şirul $H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1})$, $H_{p-1}(X^{p-1}) \xrightarrow{j'} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$, exact în al doilea termen, şi în care j este un monomorfism. Punînd $\delta' = j'\partial'$ rezultă că nucleul lui δ' coincide cu nucleul lui ∂', deci cu imaginea lui j şi deducem că şirul (12) este exact.

TEOREMA 2.6. *Să considerăm diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
H_{p-1}(X^{p-1}, X^p) & & \\
\downarrow \partial & \downarrow \delta & \\
H_p(X^p) & \xrightarrow{j} & H_p(X^p, X^{p-1}) \\
\downarrow & \searrow^{i'} & \\
H_p(X) & \xleftarrow{i''} & H_p(X^{p+1})
\end{array}$$

Imaginea omomorfismului δ *coincide cu imaginea prin* j *a nucleului lui* i.

Se vede atunci că $\delta_2 \bar{e}_1^2 = -\delta_2 \bar{e}_2^2$, deci Im δ_2 este generată de elementele

$$\alpha_1 = \bar{e}_4^1 + \bar{e}_3^1 - \bar{e}_2^1 \quad \text{și} \quad \beta = \bar{e}_2^1 - \bar{e}_4^1.$$

Din considerații algebrice simple, rezultă că

$$\ker \delta_2 \approx G \oplus G, \quad H_2(A_3) \approx G \oplus G/\text{Im } \delta_3 \approx G \oplus G/O \approx G \oplus G.$$

Se constată simplu, deoarece avem o singură celulă de dimensiune zero, că $\ker \delta_1 \approx G \oplus G \oplus G \oplus G$. De asemenea, este evident (din cele arătate mai sus) că Im $\delta_2 \approx G \oplus G$.

Observăm că un element din Im δ_2 este de forma $\eta e_2 + \xi e_3 + \eta e_4$, unde η și ξ sînt coeficienți din G.

Evident, grupul generat de elemente de forma $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 + \varepsilon e_4$, unde α, β, γ, $\varepsilon \in G$, factorizat prin grupul generat de elemente de forma $\eta e_2 + \xi e_3 + \eta e_4$ este izomorf cu $G \oplus G$.

Deci

$$H_1(A_3) \approx G \oplus G.$$

Varietatea este conexă, așa că $H_0(A_3) \approx G$.

C. CALCULUL GRUPURILOR DE OMOLOGIE, ALE VARIETĂȚII GRASSMAN, COMPLEXE ȘI CUATERNIONICE

Am considerat în capitolul 1 varietatea $\mathcal{G}\mathcal{K}(1,3)$ pentru care am găsit peste corpul complex triangularea $e_0 \cup e_2 \cup 2e_4 \cup e_6 \cup e_8$ și peste corpul cuaternionic triangularea $e_0 \cup e_4 \cup 2e_8 \cup e_{12} \cup e_{16}$. Avem atunci ca grupuri de omologie peste corpul complex :

$$H_1(\mathcal{G}C(1,3)) \approx H_3(\mathcal{G}C(1,3)) \approx H_5(\mathcal{G}C(1,3)) \approx H_7(\mathcal{G}C(1,3)) \approx 0,$$

$H_0(\mathcal{G}C) \approx G$ din cauza conexiunii,

$$H_2(\mathcal{G}C(1,3)) \approx H_6(\mathcal{G}C(1,3)) \approx H_8(\mathcal{G}C(1,3)) \approx G; \; H_4(\mathcal{G}C(1,3)) \approx G \oplus G$$

(în virtutea lemei 2.6 și teoremei 2.8).

Pentru varietatea considerată peste corpul cuaternionic

$$H_1(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_2(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_3(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_5(\mathcal{G}K(1,3)) \approx$$

$$\approx H_6(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_7(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_9(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{10}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx$$

$$\approx H_{11}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{13}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{14}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{15}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx 0.$$

$H_0(\mathcal{G}K(1,3)) \approx G$, deoarece varietatea este conexă prin arce.

$$H_4(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{12}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx H_{16}(\mathcal{G}K(1,3)) \approx G,$$

$H_8(\mathcal{G}K(1,3)) \approx G \oplus G$ după aceeași lemă și teoremă.

D. CALCULUL GRUPURILOR DE OMOLOGIE CU COEFICIENȚI Z_2 AI VARIETĂȚII GRASSMAN REALE

Considerăm varietatea Grassman $\mathcal{G}R$ (1,3).

Operatorul δ_n se arată că este

$\delta_n[a_0, a_1, \ldots, a_k] = \sum \lambda_i [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$, unde λ_i sînt : $\lambda_i = 0$ dacă $k + a_i$ este impar, $\lambda_i = \pm 2$ dacă $k + a_i$ este par [1]). Deoarece considerăm ca grup de coeficienți Z_2, cum λ_i sînt dați pentru cazul cînd se lucrează cu coeficienți întregi, $\lambda_i = 0$.

Deci $\partial_n [a_0, a_1, \ldots, a_k] = 0$.

Atunci pentru $\mathcal{G}R$ (1,3) avem următorul complex de lanțuri :

$$0 \xrightarrow{\delta_0} Z_2 \xrightarrow{\delta_1} Z_2 \xrightarrow{\delta_2} Z_2 \oplus Z_2 \xrightarrow{\delta_3} Z_2 \xrightarrow{\delta_4} Z_2 \xrightarrow{\delta_5} 0.$$

Cum $\operatorname{Im} \delta_i = 0$, rezultă $H_1 \approx Z_2$, $H_2 \approx Z_2 \oplus Z_2$, $H_3 \approx Z_2$, $H_4 \approx Z_2$ și $H_0 \approx Z_2$ deoarece varietatea este conexă.

III. CW-COMPLEXE RELATIVE

C. W. Whithead a generalizat CW-complexele, în scopul considerării unei clase mai largi de spații topologice decît poliedrele. Scopul acestei generalizări este studiul omologiei și omotopiei relative, în condiții asemănătoare cu cele ale studiului omologiei și omotopiei absolute. O pereche (X, Y) de spații topologice, unde X este un spațiu Hausdorff și Y un subspațiu închis al lui X, se numește CW-complex relativ dacă :

1. $X - Y$ este un subspațiu omeomorf cu reuniunea disjunctă a celulelor de diferite dimensiuni e_i^k, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

2. $\partial e^n \in X^{n-1} = Y \cup \bigcup_{i,p} e_i^p$, $p \leqslant n - 1$, unde prin X^{n-1} înțelegem scheletul n — 1-dimensional.

Notăm cu $X(A) = (X^0, Y^0)$ un subcomplex (adică o pereche (X^0, Y^0)), Y^0 subspațiu al lui X^0, cu $Y^0 \subset Y$, și închis relativ la Y și $X^0 \subset X$, ce îndeplinesc condițiile 1 și 2) astfel încît pentru orice subcomplex (X^i, Y^i), ce conține pe A, (X^0, Y^0) este un subcomplex și $A \subset X^0$.

3. $X(e)$ este un subcomplex finit pentru orice e.

4. O mulțime $A \subset X$ este închisă dacă și numai dacă $A \cap \bar{e}^n$ și $A \cap Y$ sînt închise pentru orice e și n.

În mod asemănător se stabilesc și pentru CW-complexe relative următoarele rezultate :

— O funcție este continuă dacă și numai dacă restricția ei la fiecare celulă și la Y este continuă.

— Dacă C este o mulțime $C \subset X$ compactă, există un CW-subcomplex relativ finit (X_0, Y_0) al lui (X, Y) care să conțină pe C [2]).

Demonstrația parafrazează identic pe cea pentru CW-complexe.

— CW-complexul este un CW-complex relativ la $\varnothing$.

---

[1]) Demonstrația completă a formulei de operare a operatorului se găsește în [4].

[2]) Subcomplexul (X_0, Y_0) este (X_0, Y).

Demonstrație. Știm că imaginea lui ∂ coincide cu nucleul lui i'; i'' fiind izomorfism (teorema 2.2), nucleul lui i' coincide cu nucleul lui i. Aplicînd acestor subgrupuri omomorfismul j și ținînd seama că $\delta = j \cdot \partial$, rezultă teorema 2.6.

TEOREMA 2.7. *Grupurile* $H_p(X^p, X^{p-1})$ *și omomorfismele* $\delta' : H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^p, X^{p-1})$ *formează un complex de lanțuri avînd grupurile de omologie izomorfe cu grupurile de omologie ale CW-complexului* X.

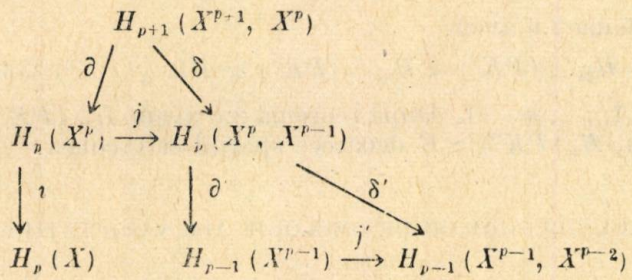
Demonstrație. Într-adevăr, avem șirul

$$H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \xrightarrow{\partial} H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial'} H_{p-1}(X^{p-1}) \to$$

$$\xrightarrow{j'} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

care este exact în al treilea termen, după cum rezultă din șirul exact al perechii (X^p, X^{p-1}). Avem atunci : $\partial' \cdot j = 0$, deci $\delta'\delta = j'\partial' j\partial = 0$, de unde rezultă că grupurile $C_p = H_p(X^p, X^{p-1})$ și omomorfismele δ formează un complex de lanțuri G.

Să considerăm diagrama :



Avem evident

$$H_p(X) \approx H_p(X^p)/\ker i, \tag{13}$$

din faptul că j este monomorfism și $H_p(X^p) \xrightarrow{j} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\delta'} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ este exact în $H_p(X^p, X^{p-1})$, atunci

$$H_p(X^p) \approx j(H_p(X^p)) \approx \ker \partial' \approx \ker \delta'$$

$$\ker i \approx j(\ker i) \approx \operatorname{Im} \delta,$$

și din formula (13) rezultă izomorfismul

$$H_p(X) \approx \ker \delta'/\operatorname{Im} \delta \approx H_p(G). \tag{14}$$

Teorema 2.7 este complet demonstrată.

Aplicații la calculul grupurilor de omologie

LEMA 2.6. *Grupurile de omologie de dimensiune* r *ale unui CW-complex a cărui triangulare nu conține celule de dimensiune* r *este izomorf cu* 0.

Într-adevăr, $H_r(X^r, X^{r-1}) \approx 0$.

TEOREMA 2.8. *Grupul de omologie de dimensiune r al unui CW-complex a cărui triangulare celulară nu conține celule r + 1 dimensionale și r − 1 dimensionale este izomorf cu* $H_r(X^r, X^{r-1})$ [1].

Convenție. În teorema 2.7 am notat cu

$$\delta' : H_p(X^p, X^{p-1}) \to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2});$$

în continuare vom conveni să notăm cu δ_p acest omomorfism.

A. CALCULUL GRUPURILOR DE OMOLOGIE ALE SPAȚIULUI PROIECTIV COMPLEX ȘI CUATERNIONIC [2]

1. *Spațiul proiectiv complex.* După cum am arătat în capitolul I el admite triangularea celulară $e^{2n} \cup e^{2n-2} \cup e^{2n-4} \cup \ldots \cup e^2 \cup e^0$. Din lema 2.6 rezultă că $H_{2k-1} \approx 0$, $k = 1, \ldots, n$. Din teorema 2.8 rezultă că $H_{2k} \approx G$, $k = 1, \ldots, n-1$, n, $H_0 \approx G$, deoarece PC^n este conex prin arce.

2. *Spațiul proiectiv cuaternionic* admite triangularea celulară

$$e^{4n} \cup e^{4n-4} \cup \ldots e^4 \cup e^0.$$

După lema 2.6 avem

$$H_{4k-1}(PK^n) \approx H_{4k-2}(PK^n) \approx H_{4k-3}(PK^n) \approx 0,$$

pentru $k = 1, \ldots, n-1$. După teorema 2.8 avem $H_{4k}(PK^n) \approx G$ pentru $k = 1, \ldots, n$, $H_0(PK^n) \approx G$ deoarece spațiul este conex.

B. CALCULUL GRUPURILOR DE OMOLOGIE ALE VARIETĂȚII AUSLENDER

Considerăm acum varietatea lui Auslender. Complexul de lanțuri atașat varietății Auslender este

$$0 \to G \xrightarrow{\delta_3} G \oplus G \oplus G \oplus G \xrightarrow{\delta_2} G \oplus G \oplus G \oplus G \xrightarrow{\delta_1} G \to 0.$$

Pentru calculul lui Im δ_3 este suficient să calculăm imaginea lui $\bar{e}^3$, prin δ_3, adică frontiera lui $\bar{e}^3$. Revăzînd triangularea celulară a varietății indicată în capitolul I, avem evident

$$\delta_3 \bar{e}^3 = \bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + \bar{e}_4^2 - \bar{e}_1^2 - \bar{e}_2^2 - \bar{e}_3^2 - \bar{e}_4^2 = 0.$$

Deci $H_3(A_3) \approx G$.

Pentru a calcula pe $H_2(A_3)$ va trebui să calculăm mai întîi ker δ_2. Avem :

$$\delta_2 \bar{e}_1^2 = \bar{e}_4^1 + \bar{e}_3^1 - \bar{e}_2^1,$$

$$\delta_2 \bar{e}_2^2 = \bar{e}_2^1 - \bar{e}_4^1 - \bar{e}_3^1,$$

$$\delta_2 \bar{e}_3^2 = \bar{e}_1^1 - \bar{e}_4^1 - \bar{e}_1^1 + \bar{e}_2^1 = \bar{e}_2^1 - \bar{e}_4^1,$$

$$\delta_2 \bar{e}_4^2 = -\bar{e}_3^1 + \bar{e}_1^1 + \bar{e}_3^1 - \bar{e}_1^1 = 0.$$

[1] Rezultă din complexul de lanțuri folosind lema 2.3.

[2] Considerăm un grup oarecare G de coeficienți.

* * * *Electronic Computers, fundamentals, systems and applications* (Mașini electronice de calcul, fundamente, sisteme și aplicații). Springer Verlag, Viena, 1961, 235 p.

Lucrarea se compune din patru articole semnate de autori diferiți.

Autorii tratează problemele de construcția mașinilor de calcul digitale și analoge precum și probleme de programare.

Cele patru articole tratează despre: „Calculatoare digitale", „Calculatoare analoge", „Analizatoare digitale diferențiale", „Sisteme de control de calcul".

Articolele conțin metode moderne de construcția mașinilor și anumite tipuri de mașini descrise detaliat, pentru care se dau caracteristicile și metodele de programare.

Se indică elementele de logică și de teoria ecuațiilor diferențiale care au stat la baza acestor construcții.

Lucrarea are o foarte mare importanță inginerească și este folositoare matematicienilor care se ocupă de probleme de programare.

Mariana Coroi-Nedelcu

PAUL LORENZ, *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik*. Bd. II/1 : *Der Fluß vom Teil aufs Ganze*; Bd. III : *Vom Menschen* (Metode curente de predare a statisticii matematice. Vol. II/1 : Concluzia printr-o parte asupra întregului; Vol. III : Despre oameni). S. Hirtzel Verlag, Leipzig, 1959, 1961, 214 p., 112 p.

Datorită aplicării pe scară tot mai largă a metodelor statistice în cele mai diverse ramuri ale științelor experimentale, cunoașterea unor noțiuni și metode fundamentale din domeniul statisticii matematice a devenit în ultimii ani o necesitate imperioasă pentru cercetătorii din aceste ramuri. Inițierea acestora în statistica matematică, cît și familiarizarea lor cu metodele curente de prelucrare a rezultatelor experimentale este sarcina pe care și-o asumă autorul prezentelor volume, sarcină de altfel foarte grea, însă pe care o duce la bun sfîrșit în cele mai bune condiții. În general, dificultatea constă în găsirea unei metode eficiente de prezentare a unui material destul de complex și pentru înțelegerea căruia este necesară o anumită maturitate și pregătire matematică.

Volumul II/1 care are subtitlul „Concluzia printr-o parte asupra întregului" se referă la teoria selecției și are ca idee principală familiarizarea cititorului cu metoda selectivă de cercetare, metodă foarte necesară în științele experimentale. În primul capitol se introduce noțiunea

de probabilitate plecînd de la premisa că această noțiune are o origine fizică și se stabilesc regulile de adunare și înmulțire a probabilităților. În capitolele II și III se tratează despre repartiția binomială, repartiția normală și diverse repartiții empirice, pe baza unor exemple foarte bine alese și expuse cu multă claritate. Începînd cu capitolul IV se intră propriu-zis în teoria selecției. Astfel, sînt prezentate în acest capitol repartițiile de selecție și caracteristicile lor, iar în următorul se studiază aproximările repartiției mediei, a dispersiei și cîtului $\tau = \frac{M - M_u}{\sigma}$ pentru selecțiile de volum mijlociu și mic.

Capitolul VI este consacrat determinării intervalelor de încredere pentru media și dispersia de selecție și a erorilor probabile. Cu toate că în întreaga expunere exemplele și aplicațiile alese din cele mai diverse domenii au fost prezentate și au întregit partea teoretică, capitolul VII cuprinde un număr însemnat de aplicații din domeniile medicină, genetică, psihologie, biometrie. Menționăm cîteva dintre ele : determinarea intervalelor de încredere pentru numărul limfocitelor raportat la numărul leucocitelor pe baza unei probe de sînge ; prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale obținute în teoria învățării (cercetări efectuate în cadrul unui institut de psihologie) ; compararea prin metode statistice a eficacității a două somnifere etc.

Pentru toate exemplele, s-au construit tabele statistice care cuprind 63 pagini și cînd este cazul, grafice și diagrame ceea ce face înțelegerea mai intuitivă. Lucrarea cuprinde de asemenea 27 figuri.

Volumul III, subintitulat „Despre oameni", are 4 capitole și are drept scop prelucrarea materialului statistic legat de oameni. Primul capitol este intitulat „Repartiții unidimensionale" și se deosebește de capitolele despre repartiții statistice din volumul II/1 prin aceea că se studiază repartițiile diferitelor fenomene statistice legate de oameni. Un loc important îl ocupă în acest capitol, funcțiile biometrice și tabelele de mortalitate. Capitolul II se referă la repartițiile bidimensionale ilustrate cu un exemplu din antropometrie. În capitolul III este prezentat un exemplu de analiză statistică a factorilor făcut pe baza fișelor de evidență a anumitor grupuri de populație ținute la Institutul de antropologie al Universității Humboldt din Berlin.

În încheiere se dau cîteva aplicații ale teoriei probabilităților în biologie. În acest scop se reiau și se studiază, ceva mai complet decît în volumul II/1, cîteva probleme în legătură cu repartițiile teoretice.

Acest volum, care cuprinde în afară de un număr de tabele statistice și 19 figuri, este de un real folos tuturor cercetătorilor din medicină, biologie, antropometrie și alte ramuri înrudite.

T. Postelnicu

Rezultatele obținute privitoare la grupurile de omologie $H_k(X)$, unde X este un CW-complex, se parafrazează, obținîndu-se aceleași rezultate pentru $H_k(X, Y)$. Acolo unde intervine $H_k(X^p, X^r)$, unde X^p și X^r sînt schelete p- și r-dimensionale ale lui X, se mențin încă aceleași grupuri $H_k(X^p, X^r)$, unde X^p și X^r sînt însă scheletele p- și r-dimensionale ale CW-complexului relativ.

Demonstrațiile urmează același fir logic, cu singura deosebire că în loc de șirul exact al perechii (A, B).

$$\ldots \to H_k(B) \to H_k(A) \to H_k(A, B) \to H_{k-1}(B) \to \ldots,$$

vom folosi șirul exact al unei triade (A, B, C), cu B subspațiu al lui A, C subspațiu al lui B:

$$\ldots \to H_k(B, C) \to H_k(A, C) \to H_k(A, B) \to H_{k-1}(B, C) \to \ldots$$

Toate observațiile și teoremele privitoare la grupurile de omologie se mențin schimbînd numai $H_q(X)$ cu $H_q(X, Y)$.

Autorii țin să mulțumească în mod deosebit tov. C. Teleman căruia îi datorează prețioase sugestii în expunerea acestui material.

Primită la redacție la 27 octombrie 1962

О СИНГУЛЯРНОЙ ГОМОЛОГИИ НА CW-КОМПЛЕКСАХ

РЕЗЮМЕ

Дается полное доказательство, отличное от известной теоремы Уайтхеда о вычислении групп гомологии CW-комплекса.

Доказанная теорема применяется к вычислению групп гомологии проективных пространств гроссмановых многообразий и многообразия Ауслендера; вычисление этих групп классическими методами громоздко.

В последней части работы указывается на обобщения теоремы о вычислении на случай относительных CW-комплексов.

DE L'HOMOLOGIE SINGULIÈRE SUR LES CW-COMPLEXES

RÉSUMÉ

On donne une démonstration complète, différente de la démonstration connue, du théorème de calcul des groupes d'homologie d'un CW-complexe.

Ce théorème est appliqué au calcul des groupes d'homologie des espaces projectifs, des variétés de Grassmann et de la variété d'Auslender, dont le calcul par les méthodes classiques est compliqué.

Dans la dernière partie du travail on indique la généralisation du théorème de calcul au cas de CW-complexes relatifs.

BIBLIOGRAFIE

1. I. H. WHITEHEAD, *Combinatorial homotopy. I.* Amer. Math. Soc., **55**, 213 (1949).
2. — *Combinatorial homotopy. II.* Amer. Math. Soc., **55**, 453 (1949).
3. — *Note.* Proc. London. Math. Soc., **45**, 243 (1939).
4. CHARLES EHRESMANN, *Sur la topologie de certains variétés algébriques réelles.* Journ. Math. Pure et Apl., **XVI**, 64 (1937).
5. — *Sur la topologie de certains espaces.* Ann. Math., **35**, 396 (1934).
6. P. J. HILTON, *Introduction to Homotopy Theory.* C.U.P., 1953.
7. C. W. WHITEHEAD, *Homotopy Theory.* Massachusetts, 1953 (curs litografiat).
8. J. MILNOR, *Construction of Universal Bundles. I.* Ann. Math., **63**, 272 (1956).
9. P. J. HILTON, S. WYLIE, *Homology Theory.* Cambridge University Press, 1960.
10. N. STEENROD, S. EILEMBERG, *Fundations of algebric Topology.* Princeton, 1952.
11. C. TELEMAN, *Curs de topologie algebrică* (va apărea).
12. N. BOURBAKI, *Topologie Générale.* Paris, 1940, ch. I.

* * *, *Electronic Computers, fundamentals, systems and applications* (Mașini electronice de calcul, fundamente, sisteme și aplicații). Springer Verlag, Viena, 1961, 235 p.

Lucrarea se compune din patru articole semnate de autori diferiți.

Autorii tratează problemele de construcția mașinilor de calcul digitale și analoge precum și probleme de programare.

Cele patru articole tratează despre: „Calculatoare digitale", „Calculatoare analoge", „Analizatoare digitale diferențiale", „Sisteme de control de calcul".

Articolele conțin metode moderne de construcția mașinilor și anumite tipuri de mașini descrise detaliat, pentru care se dau caracteristicile și metodele de programare.

Se indică elementele de logică și de teoria ecuațiilor diferențiale care au stat la baza acestor construcții.

Lucrarea are o foarte mare importanță inginerească și este folositoare matematicienilor care se ocupă de probleme de programare.

Mariana Coroi-Nedelcu

PAUL LORENZ, *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik*. Bd. II/1 : *Der Fluß vom Teil aufs Ganze*; Bd. III : *Vom Menschen* (Metode curente de predare a statisticii matematice. Vol. II/1 : Concluzia printr-o parte asupra întregului; Vol. III : Despre oameni). S. Hirtzel Verlag, Leipzig, 1959, 1961, 214 p., 112 p.

Datorită aplicării pe scară tot mai largă a metodelor statistice în cele mai diverse ramuri ale științelor experimentale, cunoașterea unor noțiuni și metode fundamentale din domeniul statisticii matematice a devenit în ultimii ani o necesitate imperioasă pentru cercetătorii din aceste ramuri. Inițierea acestora în statistica matematică, cît și familiarizarea lor cu metodele curente de prelucrare a rezultatelor experimentale este sarcina pe care și-o asumă autorul prezentelor volume, sarcină de altfel foarte grea, însă pe care o duce la bun sfîrșit în cele mai bune condiții. În general, dificultatea constă în găsirea unei metode eficiente de prezentare a unui material destul de complex și pentru înțelegerea căruia este necesară o anumită maturitate și pregătire matematică.

Volumul II/1 care are subtitlul „Concluzia printr-o parte asupra întregului" se referă la teoria selecției și are ca idee principală familiarizarea cititorului cu metoda selectivă de cercetare, metodă foarte necesară în științele experimentale. În primul capitol se introduce noțiunea

de probabilitate plecînd de la premisa că această noțiune are o origine fizică și se stabilesc regulile de adunare și înmulțire a probabilităților. În capitolele II și III se tratează despre repartiția binomială, repartiția normală și diverse repartiții empirice, pe baza unor exemple foarte bine alese și expuse cu multă claritate. Începînd cu capitolul IV se intră propriu-zis în teoria selecției. Astfel, sînt prezentate în acest capitol repartițiile de selecție și caracteristicile lor, iar în următorul se studiază aproximările repartiției mediei, a dispersiei și cîtului $\tau = \frac{M - M_u}{\sigma}$ pentru selecțiile de volum mijlociu și mic.

Capitolul VI este consacrat determinării intervalelor de încredere pentru media și dispersia de selecție și a erorilor probabile. Cu toate că în întreaga expunere exemplele și aplicațiile alese din cele mai diverse domenii au fost prezentate și au întregit partea teoretică, capitolul VII cuprinde un număr însemnat de aplicații din domeniile medicină, genetică, psihologie, biometrie. Menționăm cîteva dintre ele : determinarea intervalelor de încredere pentru numărul limfocitelor raportat la numărul leucocitelor pe baza unei probe de sînge ; prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale obținute în teoria învățării (cercetări efectuate în cadrul unui institut de psihologie) ; compararea prin metode statistice a eficacității a două somnifere etc.

Pentru toate exemplele, s-au construit tabele statistice care cuprind 63 pagini și cînd este cazul, grafice și diagrame ceea ce face înțelegerea mai intuitivă. Lucrarea cuprinde de asemenea 27 figuri.

Volumul III, subintitulat „Despre oameni", are 4 capitole și are drept scop prelucrarea materialului statistic legat de oameni. Primul capitol este intitulat „Repartiții unidimensionale" și se deosebește de capitolele despre repartiții statistice din volumul II/1 prin aceea că se studiază repartițiile diferitelor fenomene statistice legate de oameni. Un loc important îl ocupă în acest capitol, funcțiile biometrice și tabelele de mortalitate. Capitolul II se referă la repartițiile bidimensionale ilustrate cu un exemplu din antropometrie. În capitolul III este prezentat un exemplu de analiză statistică a factorilor făcut pe baza fișelor de evidență a anumitor grupuri de populație ținute la Institutul de antropologie al Universității Humboldt din Berlin.

În încheiere se dau cîteva aplicații ale teoriei probabilităților în biologie. În acest scop se reiau și se studiază, ceva mai complet decît în volumul II/1, cîteva probleme în legătură cu repartițiile teoretice.

Acest volum, care cuprinde în afară de un număr de tabele statistice și 19 figuri, este de un real folos tuturor cercetătorilor din medicină, biologie, antropometrie și alte ramuri înrudite.

T. Postelnicu

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA 1883

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,25 lei; vol. II, 155 p., 8,55 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori** (Teoremele de descompunere ale algebrei), 619 p., 25,50 lei.

C. CORDUREANU, **Funcţii aproape periodice**, 191 p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

O. ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.

GH. MIHOC, V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.

Din

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

au apărut :

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, 4 n-re (nr. 1, 10 lei; nr. 2—4, a 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare la

LIBRĂRIA ACADEMIEI R.P.R.

București, Calea Victoriei nr. 27,
sau la orice librărie științifică din țară.
Se pot comanda și prin poștă la secția „Cartea prin poștă"
de pe lîngă Librăria Academiei R.P.R., sau la librăria
CARTEA PRIN POȘTĂ

București, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poștale, agențiile poștale, prin factorii poștali și difuzorii voluntari din întreprinderi și instituții.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerț exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuța poștală 134—135, București.

I. P. 2 — c. 4999

43.831

Lei 7.—

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

2

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; ACADEMICIAN GH. MIHOC; ACADEMICIAN N. TEODORESCU; A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Anul XIV, nr. 2 1963

SUMAR

Pag.

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Operatori integrali care generalizează ecuaţiile diferenţiale. IV. Formule de medie pentru soluţiile analitice ale unor ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior 143

M. JURCHESCU, Funcţii raţionale pe soluţii globale de ecuaţii diferenţiale olomorfe 171

D. FIRESCU, Funcţii de estimaţie eficiente pentru parametrii unei familii de lanţuri Markov discrete staţionare 197

ŞTEFAN N. BERŢI, Asupra metodei Monte-Carlo de evaluare a integralelor 209

SIMONA POPP, Cercetări asupra mişcării subsonice în jurul unui obstacol situat într-un canal 213

ELEMÉR ROSINGER, Structuri pseudotopologice 223

ION I. CRISTEA, O mişcare plană cu vîrtej constant pentru un fluid perfect incompresibil 253

A. CREANGĂ şi I. VĂDUVA, Suprafeţe de răspuns şi teoria regresiei 307

RECENZII 315

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

XIVe année, n° 2 1963

SOMMAIRE

Page

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Opérateurs intégraux qui généralisent les équations différentielles. IV 143
M. JURCHESCU, Rational functions on global solutions of holomorphic differential equations 171
D. FIRESCU, Fonctions d'estimation efficientes pour les paramètres d'une famille de chaînes de Markov discrètes, stationnaires 197
ŞTEFAN N. BERŢI, Sur la méthode de Monte-Carlo pour l'évaluation des intégrales 209
SIMONA POPP, Investigations on the subsonic motion around a body situated in a channel 213
ELEMÉR ROSINGER, Structures pseudotopologiques 223
ION I. CRISTEA, Mouvement plan à tourbillon constant d'un fluide parfaitement incompressible 253
A. CREANGĂ et I. VĂDUVA, Surfaces de réponse et la théorie de la régression 307

COMPTES RENDUS 315

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Год XIV, № 2 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, Интегральные операторы, обобщающие дифференциальные уравнения. IV. 143

М. ЖУРКЕСКУ, Рациональные функции на глобальных решениях голоморфных дифференциальных уравнений 171

Д. ФИРЕСКУ, Эффективные функции оценки для параметров семейства дискретных стационарных марковских цепей 197

ШТЕФАН Н. БЕРЦИ, О методе Монте-Карло вычисления интегралов 209

СИМОНА ПОПП, Исследования по дозвуковому движению около препятствия, расположенного в канале 213

ЭЛЕМЕР РОЗИНГЕР, Псевдотопологические структуры 223

ИОН И. КРИСТЯ, Об одном плоском движении с постоянным вихрем для идеальной несжимаемой жидкости 253

А. КРЯНГЭ и И. ВЭДУВА, Поверхности ответа и теория регрессии . . . 307

РЕЦЕНЗИИ 315

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

OPERATORI INTEGRALI CARE GENERALIZEAZĂ ECUAȚIILE DIFERENȚIALE

IV. FORMULE DE MEDIE PENTRU SOLUȚIILE ANALITICE ALE UNOR ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

INTRODUCERE

În această lucrare obținem formule de medie pentru soluțiile analitice ale ecuațiilor

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} + \frac{\partial^m u}{\partial x_2^m} + \cdots + \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} = 0, \qquad (\alpha)$$

sau

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} + \frac{\partial^m u}{\partial x_2^m} + \cdots + \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m} \pm \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (\beta)$$

pentru m par sau impar, cît și pentru ecuațiile ce se obțin din (α) și (β) adăugîndu-le termenul $\lambda^m u$.

Formule de medie s-au mai obținut pentru anumite ecuații sau sisteme de ecuații de tip eliptic, parabolic [1], [2] sau hiperbolic [2] de ordinul doi. Procedeul constă în a se calcula valoarea medie pe o varietate definită de $\Phi = a^2$, unde $\Phi = 0$ reprezintă ecuația caracteristicilor ecuației diferențiale considerate.

Varietatea care poartă valorile soluției se obține printr-o operație pe care am putea-o numi *dilatarea caracteristicilor*.

Același principiu stă și la baza lucrării de față deși operațiile sînt mai complicate. Astfel, ecuația

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + \frac{\partial^{2m} u}{\partial y^{2m}} = 0 \qquad (\gamma)$$

se integrează pe o curbă care înconjoară originea de m ori care — uniformizată — poate fi considerată trasată pe suprafața lui Riemann cu m foi atașată ecuației (γ).

Aplicînd acestui rezultat un operator integral convenabil, se obține o formulă integrală care conduce imediat la formula de medie căutată.

Pentru ecuațiile de tip parabolic, domeniul de integrare este format de stele de raze în număr finit, dispuse simetric și de lungime infinită, situate în planele variabilelor complexe respective $z_k = x_k + i\xi_k$. Ecuațiile (α) sau (β) sînt în variabile reale, totuși datele și operațiile sînt considerate în complex, soluțiile reale obținute fiind de fapt *urmele* unor funcții analitice de mai multe variabile complexe.

I. ECUAȚII DE TIP ELIPTIC

1. *Calculul unei integrale.* Ne propunem să calculăm integrala

$$\mathcal{J} = \int_0^{2n\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta, \tag{1}$$

unde $2n = m2^p$, m impar, α, β, $p+1$, întregi nenegativi. Deoarece putem scrie

$$\mathcal{J} = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k2^p\pi}^{(k+1)2^p\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta,$$

avem

$$\mathcal{J} = \left[1 + \exp\left(\frac{\alpha+\beta}{m} 2\pi i\right) + \exp\left(\frac{\alpha+\beta}{m} 4\pi i\right) + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \exp\left(\frac{\alpha+\beta}{m} 2(m-1)\pi i\right)\right] \int_0^{2^p\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta d\theta, \; i = \sqrt{-1}; \tag{2}$$

cum avem și

$$\int_0^{2^p\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta = \left(1 + \exp \frac{\alpha+\beta}{m} \pi i\right) \int_0^{2^{p-1}\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta$$

rezultă

$$\int_0^{2^p\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta = A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{\alpha}{n}} \theta \sin^{\frac{\beta}{n}} \theta \, d\theta,$$

cu

$$A = \left(1 + i^{\frac{\alpha-\beta}{n}} \exp \frac{\alpha+\beta}{m2^p} \pi i\right) \prod_{k=0}^{p-1} \left(1 + \exp \frac{\alpha+\beta}{m2^k} \pi i\right), \tag{3}$$

încît obținem pînă la urmă

$$\mathcal{J} = \frac{1 - \exp\left[(\alpha+\beta)2\pi i\right]}{1 - \exp\frac{\alpha+\beta}{m}2\pi i}\left(1 + \exp\frac{2\alpha}{m2^p}\pi i\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{p-1}\left(1 + \exp\frac{\alpha+\beta}{m2^k}\pi i\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{\alpha}{n}}\theta \sin^{\frac{\beta}{n}}\theta\, d\theta, \tag{4}$$

care ne permite să enunțăm

LEMA 1. *Integrala*

$$\mathcal{J} = \int_0^{2n\pi} \cos^{\frac{\alpha}{n}}\theta \sin^{\frac{\beta}{n}}\theta\, d\theta,$$

unde $2n = m\ 2^p$, m *impar*, α, β, $p+1$ *întregi nenegativi, are valoarea*

$$m \cdot 2^p \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2n}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+n}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+2n}{2n}\right)}, \tag{5}$$

pentru $\alpha = k\ m\ 2^p$, $\beta = k'\ m\ 2^p$, k, k' *întregi* $\geqslant 0$, *și nulă în toate celelalte cazuri.*

Să considerăm acum integrala

$$\int_0^{2n\pi} f\left(x + a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b\sqrt[n]{\sin\theta}\right) d\theta,\ n = m2^p. \tag{6}$$

Presupunînd pe f analitică

$$f\left(x + a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b\sqrt[n]{\sin\theta}\right) =$$

$$= f(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(a\sqrt[n]{\cos\theta}\frac{\partial}{\partial x} + b\sqrt[n]{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x, y) = \tag{7}$$

$$= f(x, y) + \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty}\frac{a^\alpha \cdot b^\beta}{\alpha!\,\beta!}\cos^{\frac{\alpha}{n}}\theta \sin^{\frac{\beta}{n}}\theta \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta},$$

obținem, dacă înlocuim pe (7) în (6) și ținem seamă de lema 1, următoarea relație integrală:

$$\int_0^{2n\pi} f\left(x + a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b\sqrt[n]{\sin\theta}\right) d\theta = \pi m 2^p f(x, y) +$$

$$+ m2^p \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} \frac{a^{2n\alpha} b^{2n\beta}}{(2n\alpha)!\,(2n\beta)!} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\cdot \Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\partial^{2n(\alpha+\beta)} f}{\partial x^{2n\alpha}\,\partial y^{2n\beta}} = \tag{8}$$

$$= m2^p \pi f(x,y) + m2^p \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} \frac{a^{2n\alpha} b^{2n\beta}}{(2n\alpha)!\,(2n\beta)!} \cdot \frac{\pi}{2^{2k}} \cdot \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!}{(\alpha+\beta)!\,\alpha!\,\beta!} \cdot \frac{\partial^{2n(\alpha+\beta)} f}{\partial x^{2n\alpha}\,\partial y^{2n\beta}} \cdot$$

Termenul

$$m^{2p}\pi \cdot \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!}{(2n\alpha)!\,(2n\beta)!}$$

se mai poate scrie

$$\frac{2n\pi}{n^{2(\alpha+\beta)}} \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1} s(n+s)(2n+s)\ldots[(2\beta-1)n+s]} \cdot \frac{1}{\prod_{s=1}^{n-1} s(n+s)(2n+s)\ldots[(2\alpha-1)n+s]}$$

și dacă ținem seama de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{4\alpha+\frac{2s-n}{n}}\theta \sin^{4\beta+\frac{2s-n}{n}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{s}{n}\right)\Gamma\left(2\beta+\frac{s}{n}\right)}{\Gamma\left(2\alpha+2\beta+\frac{2s}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(2\alpha+2\beta+\frac{2s}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^{2\alpha+2\beta}}\Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)s(n+s)\ldots[n(2\alpha-1)+s]\,s(n+s)\ldots$$

$$\ldots[n(2\beta-1)+s],$$

putem scrie

$$\prod_{s=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{4\alpha+\frac{2s-n}{n}}\theta \sin^{4\beta+\frac{2s-n}{n}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{n^{n(2\alpha+2\beta)}}\times$$

$$\times\frac{(2n\alpha)!\,(2n\beta)!}{(2\alpha)!\,(2\beta)!}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)}{\Gamma\left(2\alpha+2\beta+\frac{2s}{n}\right)}, \tag{9}$$

deoarece

$$\prod_{s=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-n}{n}}\theta \sin^{\frac{2s-n}{n}}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{n-1}}\prod_{s=1}^{n-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2s}{n}\right)}. \tag{10}$$

Urmează că avem următoarea formulă integrală:

$$Y\left[\int_0^{2n\pi} f(x+a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y+b\sqrt[n]{\sin\theta})\,\mathrm{d}\theta\right]=f(x,y)+ \tag{11}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\prod_{s=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{2s}{n}\right)}{\sum_{s=1}^{n-1}\Gamma\left(2k+\frac{2s}{n}\right)}\cdot\frac{\lambda^{2nk}}{(2n^n)^{2k}}\cdot\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}+\frac{\partial^{2n}}{\partial y^{2n}}\right)^{(k)}f(x,y),$$

unde am pus

$$\begin{aligned} a &= \lambda\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_1\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_2\cdots\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1},\\ b &= \lambda\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_1.\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_2\cdots\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

iar Y este operatorul integral

$$Y=\frac{1}{A}\prod_{s=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2s-n}{n}}\varphi_s\sin^{\frac{2s-n}{n}}\varphi_s\,\mathrm{d}\varphi_s \tag{13}$$

cu

$$A=\frac{n\pi}{2^{n-1}}\prod_{s=1}^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2s}{n}\right). \tag{14}$$

Putem deci enunța

TEOREMA 1. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{2n}w}{\partial x^{2n}}+\frac{\partial^{2n}w}{\partial y^{2n}}=0 \tag{15}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x,y)=\frac{1}{A}Y\left[\int_0^{2n\pi}f(x+a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y+b\sqrt[n]{\sin\theta})\,\mathrm{d}\theta\right], \tag{16}$$

unde

$$\begin{aligned} a &= \lambda\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_1\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_2\cdots\cos^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1},\\ b &= \lambda\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_1\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_2\cdots\sin^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1},\\ A &= \frac{n\pi}{2^{n-1}}\prod_{s=1}^{n-1}\Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2s}{n}\right), \end{aligned}$$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{s=1}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-n}{n}} \varphi_s \sin^{\frac{2s-n}{n}} \varphi_s \, d\varphi_s . \tag{17}$$

TEOREMA 2. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} + \mu^{2n} w = 0 \tag{18}$$

verifică următoarea formulă de medie :

$$\Phi(\lambda\mu) f(x, y) = \frac{1}{A} Y \left[\int_0^{2n\pi} f(x + a \sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b \sqrt[n]{\sin\theta}) \, d\theta \right], \tag{19}$$

unde Y, A, a, b au aceeași semnificație ca la teorema precedentă și

$$\Phi(\lambda\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda\mu)^{2nk}}{(2n^n)^{2k} (k!)^2} \cdot \prod_{s=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2s}{n}\right)}{\Gamma\left(2k + \frac{2s}{n}\right)} . \tag{20}$$

Pentru $n = 2$, funcția $\Phi(z)$ este soluție a ecuației diferențiale

$$z^3 \Phi^{IV} + 4z^2 \Phi''' + z \Phi'' - \Phi' + z^3 \Phi = 0.$$

Domeniul de analiticitate. Dacă considerăm funcția reală $f(x, y)$ ca urma unei funcții analitice $f(z_1, z_2)$ de două variabile complexe $z_1 = x + i\xi$, $z_2 = y + i\eta$, funcția $f(z_1, z_2)$ trebuie să fie analitică în raport cu z_1 într-un domeniu care conține cercul cu centrul în punctul $(x, 0)$ și rază a și în raport cu z_2 într-un domeniu care conține centrul în punctul $(y, 0)$ și rază b.

Integrarea în (1) sau (8) făcîndu-se de n ori în jurul originii poate fi considerată că se efectuează pe o suprafață a lui Riemann cu n foi atașată ecuației (15).

Pentru $n = 1$, curba de integrare este un cerc.

2. Fie o reprezentare a sferei de rază unitatea din spațiul cu $n + 1$ dimensiuni :

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_n \\
\xi_2 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-1} \cos\theta_n \\
\xi_3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_{n-1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\xi_n &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
\xi_{n+1} &= \cos\theta_1
\end{aligned} \tag{21}$$

și să considerăm integrala

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega_{n+1}} \xi_1^{\frac{\alpha_1}{m}} \xi_2^{\frac{\alpha_2}{m}} \cdots \xi_{n+1}^{\frac{\alpha_{n+1}}{m}} \left| \sin^{n-1}\theta_1 \sin^{n-2}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1} \right| \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \ldots \mathrm{d}\theta_n, \quad (22)$$

unde Ω_{n+1} este suprafața definită de

$$0 \leqslant \theta_n \leqslant 2m\pi, \quad 0 \leqslant \theta_k \leqslant m\pi, \quad k = 1,2, \ldots, n-1,$$

$$2m = q2^p, \quad q, \; p+1, \quad \alpha_i \text{ întregi} \geqslant 0.$$

Integrantul lui (22) este

$$\sin^{\beta_1}\theta_1 \cos^{\bar{\beta}_1}\theta_1 \sin^{\beta_2}\theta_2 \cos^{\bar{\beta}_2}\theta_2 \ldots \sin^{\beta_n}\theta_n \cos^{\bar{\beta}_n}\theta_n \,|\sin^{n-1}\theta_1|\cdots|\sin\theta_{n-1}|,$$

cu

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{m}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n), & \bar{\beta}_1 &= \frac{1}{m}\alpha_{n+1}, \\
\beta_2 &= \frac{1}{m}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}), & \bar{\beta}_2 &= \frac{1}{m}\alpha_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \qquad (23) \\
\beta_{n-1} &= \frac{1}{m}(\alpha_1 + \alpha_2), & \bar{\beta}_{n-1} &= \frac{1}{m}\alpha_3, \\
\beta_n &= \frac{1}{m}\alpha_1, & \bar{\beta}_n &= \frac{1}{m}\alpha_2,
\end{aligned}$$

și dacă ținem seamă de rezultatele alineatelor precedente avem

$$\mathcal{J} = A\frac{1}{2^n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+m}{2m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_{n+1}+m}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}+m(n+1)}{2m}\right)}, \quad (24)$$

cu A dat de

$$A = \frac{1-\exp((\beta_n+\bar{\beta}_n)q2^p\pi\mathrm{i})}{1-\exp((\beta_n+\bar{\beta}_n)2^p\pi\mathrm{i})}(1+\exp\pi\bar{\beta}_n\mathrm{i})\prod_{k=0}^{p-1}[1+\exp((\beta_n+\bar{\beta}_n)2^k\pi\mathrm{i})] \times$$

$$\times\prod_{s=1}^{n-1}\left[\frac{1-\exp((\beta_s+\bar{\beta}_s)q2^{p-1}\pi\mathrm{i})}{1-\exp((\beta_s+\bar{\beta}_s)q2^{p-1}\pi\mathrm{i})}(1+\exp\bar{\beta}_s\pi\mathrm{i})\prod_{k=1}^{p-1}[1+\exp((\beta_s+\bar{\beta}_s)2^k\pi\mathrm{i})]\right]. \quad (25)$$

Din (25) rezultă că $A \neq 0$ numai pentru α_i de forma $kq2^p$ și nul în toate celelalte cazuri. Pentru α_i de forma $kq2^p$, A are valoarea

$$A = q^n 2^{pn+1}$$

deci

$$\mathcal{J} = q^n\, 2^{(p-1)n+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+m}{2m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_{n+1}+m}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n+1}+m(n+1)}{2m}\right)}, \tag{26}$$

unde toți α_i sînt întregi $\geqslant 0$, multiplii de $2m$.

Să arătăm acum că $A = 0$ în toate celelalte cazuri.

a) Dacă cel puțin unul din numerele α_s este un multiplu impar de m, $A = 0$ deoarece

$$1 + \exp(\overline{\beta}_s \pi i) = 0.$$

b) Dacă toate numerele α_s sînt multiplii de $2m$ cu excepția lui $\alpha_t = (2k'+1)q2^\gamma$, $\gamma < p$, atunci termenul

$$1 + \exp\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_t}{m}\, 2^k \pi i\right]$$

este nul pentru $k = p-1-\gamma$, $\gamma \neq p-1$, iar dacă $\gamma = p-1$, $A = 0$ în virtutea observației precedente.

c) Dacă toate numerele α_s sînt multiplii de $2m$, cu excepția numerelor $\alpha_{t_1}, \alpha_{t_2}, \cdots, \alpha_{t_r}$, se pot întîmpla două cazuri:

$$c_1)\quad \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{t_1}+\cdots+\alpha_{t_r}}{m} = k2m \qquad (t_1 < t_2 < \cdots < t_r)$$

și atunci

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{t_1}+\cdots+\alpha_{t_r-1}}{m} \neq k2m$$

deci $A = 0$, sau

$$c_2)\quad \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{t_1}+\cdots+\alpha_{t_r}}{m} \neq k2m$$

cînd de asemenea $A = 0$. Avem așadar:

LEMA 2. *Integrala*

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega_{n+1}} \xi_1^{\frac{\alpha_1}{m}}\, \xi_2^{\frac{\alpha_2}{m}} \cdots \xi_{n+1}^{\frac{\alpha_{n+1}}{m}}\, d\sigma_{n+1}, \tag{27}$$

unde

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_n \\
\xi_2 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \cos\theta_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\
\xi_{n+1} &= \cos\theta_1
\end{aligned} \tag{28}$$

și unde $\mathrm{d}\sigma_{n+1} = |\sin^{n-1}\theta_1| \cdot |\sin^{n-2}\theta_2| \cdots |\sin\theta_{n-1}| \cdot \mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \cdots \mathrm{d}\theta_n$, *definit de* $0 \leqslant \theta_n \leqslant 2m\pi$, $0 \leqslant \theta_k \leqslant m\pi$, $k = 1,2, \cdots, n-1$, $2m = q2^p$, $p > 1$, α_i *întregi* $\geqslant 0$, *are valoarea*

$$q^n 2^{(p-1)n+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_2+m}{2m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\alpha_{n+1}+m}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_{n+1}+mn+m}{2m}\right)} \tag{29}$$

dacă toți α_i *sînt multiplii de* $2m$ *și nulă în toate celelalte cazuri.*

3. Să considerăm acum integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{A}\int_{\Omega_{n+1}} f\left(x_1 + a_1\xi_1^{\frac{1}{m}},\ x_2 + a_2\xi_2^{\frac{1}{m}},\ \ldots,\ x_{n+1} + a_{n+1}\xi_{n+1}^{\frac{1}{m}}\right)\mathrm{d}\sigma_{n+1}, \tag{30}$$

unde Ω_{n+1}, $\mathrm{d}\sigma_{n+1}$, ξ_i sînt aceiași ca în lema precedentă. Presupunînd pe f analitică obținem

$$\mathcal{J} = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) + \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{\infty} b_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n+1}} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\lambda_1}\ldots\partial x_{n+1}^{\lambda_{n+1}}},\quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = k,$$

cu

$$A = q^n 2^{(p-1)n+1}\ \Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) \tag{31}$$

iar

$$b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}} = \frac{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_{n+1}^{\lambda_{n+1}}}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_{n+1}!}\int_{\Omega_{n+1}} \xi_1^{\frac{\lambda_1}{m}}\xi_2^{\frac{\lambda_2}{m}}\cdots\xi_{n+1}^{\frac{\lambda_{n+1}}{m}}\mathrm{d}\sigma_{n+1}.$$

Integrala ce intervine însă în expresia lui $b_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n+1}}$ este diferită de zero pentru $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}$, multiplii de $2m$, deci avem, înlocuind pe λ_i cu $2m\lambda_i$,

$$b_{2m\lambda_1, 2m\lambda_2, \ldots, 2m\lambda_{n+1}} = \frac{a_1^{2m\lambda_1}\cdots a_{n+1}^{2m\lambda_{n+1}}\cdot q^n 2^{(p-1)n+1}}{(2m\lambda_1)!\,(2m\lambda_2)!\ldots(2m\lambda_{n+1})!}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(\lambda_1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_2+\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda_{n+1}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n+1}{2}\right)}$$

ceilalți coeficienți fiind nuli. Avem și

$$\frac{\Gamma\left(\lambda_1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda_2+\frac{1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda_{n+1}+\frac{1}{2}\right)}{(2m\lambda_1)!\cdots(2m\lambda_{n+1})!}=$$

$$=\frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{(2\lambda_1)!\,(2\lambda_2)!\cdots(2\lambda_{n+1})!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_{n+1}!\,(2m\lambda_1)!\cdots(2m\lambda_{n+1})!}\cdot\Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

încît putem scrie următoarea formulă integrală, valabilă în domeniul de analiticitate al lui f,

$$\frac{1}{A}\int_{\Omega_{n+1}} f\left(x_1+a_1\xi_1^{\frac{1}{m}},\ x_2+a_2\xi_2^{\frac{1}{m}},\cdots,\ x_{n+1}+a_{n+1}\xi_{n+1}^{\frac{1}{m}}\right)\mathrm{d}\sigma_{n+1}=$$

$$=f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_{n+1})+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{a_1^{2m\lambda_1}\cdot a_2^{2m\lambda_2}\cdot\cdots a_{n+1}^{2m\lambda_{n+1}}}{2^{2k}\cdot\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_{n+1}!}\times$$

$$\times\frac{(2\lambda_1)!\cdots(2\lambda_{n+1})!}{(2m\lambda_1)!\cdots(2m\lambda_{n+1})!}\cdot\frac{\partial^{2mk}f}{\partial x_1^{2m\lambda_1}\cdots\partial x_{n+1}^{2m\lambda_{n+1}}},\qquad(32)$$

cu $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}=k$. Să observăm că putem scrie

$$\frac{(2\lambda_1)!}{(2m\lambda_1)!}=\frac{1}{m^{2\lambda_1}}\cdot\frac{1m\cdot 2m\cdot 3m\cdots 2m\lambda_1}{(2m\lambda_1)!};$$

avem însă și

$$\int_{S_{n+1}}\xi_1^{4\lambda_1+\frac{2s-m}{m}}\cdots\xi_{n+1}^{4\lambda_{n+1}+\frac{2s-m}{m}}\mathrm{d}S_{n+1}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{4\lambda_1m+2s}{2m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{4m\lambda_{n+1}+2s}{2m}\right)}{\Gamma\left(2\lambda_1+\ldots+2\lambda_{n+1}+\frac{(n+1)s}{m}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(2k+\frac{n+1}{m}s\right)}\cdot\frac{1}{m^{2k}}\prod_{i=1}^{n+1}[(2\lambda_i-1)m+2s][(2\lambda_i-2)m+2s]\cdots[2s],$$

$$k=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1},\qquad(33)$$

domeniul de integrare S_{n+1} fiind dat de $\xi_i\geqslant 0$, $\mathrm{d}S_{n+1}$ fiind elementul de arie al lui S_{n+1}; putem deci scrie

$$\prod_{s=1}^{m-1}\int_{S_{n+1}} \xi_1^{4\lambda_1+\frac{2s-m}{m}} \cdots \xi_{n+1}^{4\lambda_{n+1}+\frac{2s-m}{m}} \, dS_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{(m-1)n}} \cdot \frac{1}{m^{2mk}} \cdot \frac{(2m\lambda_1)! \cdots (2m\lambda_{n+1})!}{(2\lambda_1)! \cdots (2\lambda_{n+1})!} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(2k+\frac{n+1}{m}s\right)} \tag{34}$$

cît și

$$\prod_{s=1}^{m-1}\int_{S_{n+1}} \xi_1^{\frac{2s-m}{m}} \cdots \xi_{n+1}^{\frac{2s-m}{m}} \, dS_{n+1} = \frac{1}{2^{(m-1)n}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{m}s\right)} \tag{35}$$

și dacă introducem operatorul integral

$$Y = \frac{1}{B}\prod_{s=1}^{m-1}\int_{S_{s,n+1}} \eta_{s,1}^{\frac{2s-m}{m}} \cdots \eta_{s,n+1}^{\frac{2s-m}{m}} \, dS_{s,n+1}, \tag{36}$$

cu

$$B = \frac{1}{2^{n(m-1)}} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)s}{m}\right)}, \tag{37}$$

avem următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{A} Y\left[\int_{\Omega_{n+1}} f\left(x_1 + a_1\xi_1^{\frac{1}{m}}, x_2 + a_2\xi_2^{\frac{1}{m}}, \cdots, x_{n+1} + a_{n+1}\xi_{n+1}^{\frac{1}{m}}\right) d\sigma_{n+1}\right] =$$

$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{\prod_{s=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}s\right)}{\prod_{s=1}^{m-1}\Gamma\left(2k+\frac{n+1}{m}s\right)} \times$$

$$\times \frac{h^{2mk}}{k!\, 2^{2k} \cdot m^{2mk}} \left[\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m}}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{n+1}^{2m}}\right]^{(k)} f(x_1, \cdots, x_{n+1}), \tag{38}$$

cu

$$A = 2m^n \, \Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

și unde am pus

$$a_i = h\eta_{1,i}^{\frac{2}{m}} \eta_{2,i}^{\frac{2}{m}} \cdots \eta_{n+1,i}^{\frac{2}{m}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1,$$

$\eta_{k,1}, \eta_{k,2}, \ldots, \eta_{k,n+1}$ fiind coordonatele unui punct curent de pe $n+1$ - sfera de rază unitatea $S_{k,n+1}$, domeniul de integrare fiind porțiunea din $S_{k,n+1}$ dată de

$$\eta_{k,1} \geqslant 0, \quad \eta_{k,2} \geqslant 0, \ldots, \eta_{k,n+1} \geqslant 0,$$

iar Ω_{n+1} domeniul definit la lema 2. Formula integrală (38) ne permite să enunțăm

TEOREMA 3. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{2m} w}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_{n+1}^{2m}} = 0 \tag{39}$$

verifică următoarea formulă de medie :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{C} \cdot Y\left[\int_{\Omega_{n+1}} f(x_1 + a_1 \xi_1^{\frac{1}{m}}, \ldots, x_{n+1} + a_{n+1} \xi_{n+1}^{\frac{1}{m}}) \, d\sigma_{n+1}\right], \tag{40}$$

unde

$$C = \frac{2m^n}{2^{n(m-1)}} \Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) \prod_{s=1}^{m-1} \Gamma^{n+1}\left(\frac{s}{m}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{(n+1)s}{m}\right),$$

$$a_i = h \eta_{1,i}^{\frac{2}{m}} \eta_{2,i}^{\frac{2}{m}} \cdots \eta_{n+1,i}^{\frac{2}{m}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$\eta_{k,1}, \eta_{k,2}, \ldots, \eta_{k,n+1}$ *fiind coordonatele unui punct curent de pe* $n+1$ - *sfera de rază unitatea* $S_{k,n+1}$, Y *operatorul integral*

$$Y = \prod_{s=1}^{m-1} \int_{S_{s,n+1}} \eta_{s,1}^{\frac{2s-m}{m}} \eta_{s,2}^{\frac{2s-m}{m}} \cdots \eta_{s,n+1}^{\frac{2s-m}{m}} \, dS_{s,n+1} \tag{41}$$

domeniul de integrare $S_{s,n+1}$ *fiind definit de*

$$\eta_{s,1} \geqslant 0, \quad \eta_{s,2} \geqslant 0, \ldots, \eta_{s,n+1} \geqslant 0$$

iar Ω_{n+1} *același ca în lema 2.*

TEOREMA 4. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^{2m} w}{\partial x_1^{2m}} + \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_2^{2m}} + \cdots + \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_{n+1}^{2m}} + \mu^{2m} \cdot w = 0, \tag{42}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi(h\mu) f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{C} Y\left[\int_{\Omega_{n+1}} f(x_1 + a_1 \xi_1^{\frac{1}{m}}, \ldots, x_{n+1} + a_{n+1} \xi_{n+1}^{\frac{1}{m}}) \, d\sigma_{n+1}\right], \tag{43}$$

notațiile fiind aceleași ca la teorema precedentă și unde

$$\Phi(h\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{n+1}{2}\right)}\cdot\frac{\prod_{s=1}^{m-1}\Gamma\left(\frac{(n+1)s}{m}\right)}{\prod_{s=1}^{m-1}\Gamma\left(2k+\frac{(n+1)s}{m}\right)k!}\cdot\frac{(-1)^k\,(h\mu)^{2mk}}{2^{2k}\cdot m^{2mk}}.$$

Domeniul de analiticitate. Funcția reală $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ considerată ca urma unei funcții de $n+1$ variabile complexe $f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$, $z_k = x_k + i\xi_k$, este analitică în raport cu fiecare din variabilele z_k, în domeniul $D(D_1, D_2, \ldots, D_{n+1})$ cu D_k un domeniu în planul z_k care conține cercul cu centrul în punctul $(x_k, 0)$ de rază a_k.

II. ECUAȚII DE TIP PARABOLIC

1. Să considerăm acum integrala

$$\mathcal{J}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}f\left(x+aht^{\frac{1}{m}}e^{\frac{2k\pi i}{m}},\ y+bh^{2m}\right)dt \tag{1}$$

cu f funcție analitică, h, a, b numere reale oarecare, m întreg $\geqslant 0$ iar t un parametru real. Avem

$$f\left(x+aht^{\frac{1}{m}}e^{\frac{2k\pi i}{m}},\ y+bh^{2m}\right)=f(x,y)+$$

$$+\sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\cdot a^{\alpha}\,b^{\beta}\cdot t^{\frac{\alpha}{m}}\,h^{(\alpha+2\beta)m}\cdot\exp\left(\frac{2k\alpha\pi i}{m}\right)\frac{\partial^{\alpha+\beta}f}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta}} \tag{2}$$

și deoarece pentru α întreg $\neq qm$ sau $\alpha = qm$, respectiv

$$\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left(\frac{2k\alpha\pi i}{m}\right)=0,\quad \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left(\frac{2k\alpha\pi i}{m}\right)=1,$$

urmează că înlocuind pe α cu $m\alpha$ obținem

$$\mathcal{J}=f(x,y)+\sum_{\alpha,\beta}\frac{1}{(m\alpha)!\,\beta!}\,a^{m\alpha}\,b^{\beta}\,h^{(\alpha+2\beta)m}\,\frac{\partial^{m\alpha+\beta}f}{\partial x^{m\alpha}\,\partial y^{\beta}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}t^{\alpha}\,dt$$

care ne conduce la următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{m\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}f\left(x+aht^{\frac{1}{m}}e^{\frac{2k\pi i}{m}},\ y+bh^{2m}\right)dt=$$

$$=f(x,y)+\sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty}\frac{(2\alpha)!}{(2m\alpha)!\,\beta!\,\alpha!}\cdot\left(\frac{a^m}{2}\right)^{2\alpha}b^{\beta}\,h^{(2\alpha+2\beta)m}\,\frac{\partial^{2m\alpha+\beta}f}{\partial x^{2m\alpha}\,\partial y^{\beta}}. \tag{3}$$

Dacă introducem acum operatorul integral

$$Y = \frac{1}{B}\prod_{k=0}^{m-2}\int_0^{\infty} u_k^k \exp(-u_k^m)\,\mathrm{d}u_k,$$

unde

$$B = \frac{1}{m^{m-1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

şi înlocuind în (3) pe a cu $au_0u_1 \ldots u_{m-2}$ obţinem:

$$Y\left[\frac{1}{m\sqrt{\pi}}\sum_{p=0}^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} f\left(x + aht^{\frac{1}{m}}\mathrm{e}^{\frac{2p\pi\mathrm{i}}{m}},\ y + bh^{2m}\right)\mathrm{d}t\right] =$$

$$= f(x, y) + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{h^{2ms}}{s!}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^{2m}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} + b\,\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(s)} f(x, y) \tag{4}$$

formulă integrală care ne permite să enunţăm

TEOREMA 5. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^{2m}\frac{\partial^{2m}w}{\partial x^{2m}} + b\,\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x, y) = \frac{1}{m\sqrt{\pi}\,B}\,Y\left[\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2} f\left(x + \alpha ht^{\frac{1}{m}}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{m}},\ y + bh^{2m}\right)\mathrm{d}t\right], \tag{6}$$

unde

$$\alpha = au_0u_1 \ldots u_{m-2},\quad B = \frac{1}{m^{m-1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{k=0}^{m-2}\int_0^{\infty} u_k^k \exp(-u_k^m)\,\mathrm{d}u_k \tag{7}$$

a, b, h fiind parametri arbitrari.

TEOREMA 6. *Soluţiile analitice ale ecuaţiei cu derivate parţiale*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^{2m}\frac{\partial^{2m}w}{\partial x^{2m}} + b\,\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda^{2m}w = 0 \tag{8}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$\mathrm{e}^{-\lambda^{2m}h^{2m}} f(x, y) = \frac{1}{m\sqrt{\pi}\,B}\,Y\left[\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2} f\left(x + \alpha ht^{\frac{1}{m}}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi\mathrm{i}}{m}},\ y + bh^{2m}\right)\mathrm{d}t\right] \tag{9}$$

unde α, b, B, Y sînt aceiaşi ca la teorema 5.

Domeniul de analiticitate. Dacă considerăm funcția reală $f(x, y)$ ca urma unei funcții $f(z_1, z_2)$ de două variabile complexe $z_1 = x + i\xi$, $z_2 = y + i\eta$, domeniul de integrare este situat în planul z_1 și anume este format de m drepte care trec prin punctul $(x, 0)$ care formează o stea regulată, cu unghiul între raze $\frac{2\pi}{m}$.

Prin urmare, în acest plan $f(z_1, z_2)$ trebuie să fie analitică în m benzi infinite care conțin aceste m drepte. În planul z_2, $f(z_1, z_2)$ trebuie să fie analitică într-un domeniu care conține un segment al axei reale $(y + bh^{2m} - \varepsilon, y + bh^{2m} + \varepsilon)$.

2. Să considerăm acum integrala

$$\mathcal{J} = \frac{1}{m^n \pi^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1 + a_1 h u_1^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_1}{m}, \dots$$

$$\dots, x_n + a_n h u_n^{\frac{1}{m}} \cdot \exp \frac{2\pi i k_n}{m}, y + bh^{2m}) \times \tag{10}$$

$$\times \exp(-u_1^2 - u_2^2 \dots - u_n^2)\, du_1 du_2 \dots du_n,$$

deoarece avem, f fiind presupusă analitică,

$$f(x_1 + a_1 h u_1^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2k_1\pi i}{m}, \dots, x_n + a_n h u_n^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_n}{m}, y + bh^{2m}) =$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) + \sum_{\alpha} \frac{h^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + 2m\beta} a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} b^{\beta}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_n!\, \beta!} \exp \frac{2\pi i k_1 \alpha_1}{m} \dots$$

$$\dots \exp \frac{2\pi i k_n \alpha_n}{m} \cdot u_1^{\frac{\alpha_1}{m}} \dots u_n^{\frac{\alpha_n}{m}} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y^{\beta}}. \tag{10'}$$

În însumarea dublă $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_i=0}^{m-1}$, dacă $\alpha_k \neq \gamma_k m$, γ_k întreg, termenii corespunzători sînt nuli; diferiți de zero sînt numai cînd $\alpha_k = \gamma_k m$. Deoarece integrala multiplă este nulă dacă cel puțin unul din numerele γ_k este impar, urmează, punînd în loc de α_k $2m\alpha_k$, că putem scrie

$$\mathcal{J} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) + \sum A_{2m\alpha_1, \dots, 2m\alpha_n \beta} \frac{\partial^{2m(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) + \beta} f}{\partial x_1^{2m\alpha_1} \partial x_2^{2m\alpha_2} \dots \partial x_n^{2m\alpha_n} \partial y^{\beta}},$$

cu

$$A_{2m\alpha_1, \dots, 2m\alpha_n \beta} = \frac{a_1^{2m\alpha_1} \dots a_n^{2m\alpha_n} b^{\beta} h^{2m(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \beta)}}{(2m\alpha_1)! \dots (2m\alpha_n)!\, \beta!} \cdot \frac{(2\alpha_1)!(2\alpha_2)! \dots (2\alpha_n)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_n!} \times$$

$$\times \frac{1}{2^{2(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}}; \tag{10''}$$

dacă în (10′) sau (10″) înlocuim pe a_i cu

$$a_i = \gamma_i \, v_{i,0} \, v_{i,1} \cdots v_{i,m-2}$$

și introducem operatorul integral

$$Y = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m-2} \int_0^{\infty} v_{ij}^{j} \exp\left(-v_{ij}^{m}\right) \mathrm{d}v_{ij} \tag{11}$$

care aplicat funcției $f \equiv 1$ are valoarea

$$B = \frac{1}{m^{n(m-1)}} \Gamma^n\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma^n\left(\frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma^n\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

obținem următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{1}{m^n \pi^{\frac{n}{2}}} Y \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x_1 + a_1 h u_1^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_1}{m}, \ldots, x_n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_n h u_n^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_n}{m}, y + b h^{2m}\right) \exp\left(-u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_n^2\right) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n \right] =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h^{2ms}}{s!} \left[\frac{1}{4} \frac{1}{m^{2m}} \left(\gamma_1^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{2m}} + \ldots + \gamma_n^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_n^{2m}} \right) + \right.$$

$$\left. + b \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_1, \ldots, x_n, y) \tag{12}$$

care ne permite să enunțăm

TEOREMA 7. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{m^{2m}} \left(\gamma_1^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_1^{2m}} + \ldots + \gamma_n^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x_n^{2m}} \right) + b \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{1}{B} Y \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u_1^2 \ldots - u_n^2\right) \times \right. \tag{14}$$

$$\left. \times f\left(x_1 + a_1 h u_1^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_1}{m}, \ldots, x_n + a_n h u_n^{\frac{1}{m}} \exp \frac{2\pi i k_n}{m}, y + b h^{2m}\right) \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \ldots \mathrm{d}u_n \right],$$

unde

$$a_i = \gamma_i v_{i,0} v_{i,1} \ldots v_{i,m-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$B = \frac{1}{m^n} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma^n\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma^n\left(\frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma^n\left(\frac{m-1}{m}\right) \tag{15}$$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m-2} \int_0^{\infty} v_{ij}^{i} \exp(-v_{ij}^{m})\, dv_{i_j} \tag{16}$$

(în v_{ij}^{i} indicele superior este exponent).

TEOREMA 8. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{1}{4}\frac{1}{m^{2m}}\left(\gamma_1^{2m}\frac{\partial^{2m}w}{\partial x_1^{2m}} + \ldots + \gamma_n^{2m}\frac{\partial^{2m}w}{\partial x_n^{2m}}\right) + b\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda^{2m} w = 0 \tag{17}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$e^{-(\lambda h)^{2m}} \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \frac{1}{B} Y\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k_j=0}^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u_1^2 - u_2^2 \ldots\right.$$

$$\ldots - u_n^2) f(x_1 + a_1 h^{\frac{1}{m}} u_1^{\frac{1}{m}} \exp\frac{2\pi i k_1}{m}, \ldots, x_n +$$

$$\left. + a_n h^{\frac{1}{m}} u_n^{\frac{1}{m}} \exp\frac{2\pi i k_n}{m},\ y + bh^{2m})\, du_1\, du_2 \ldots du_n\right], \tag{18}$$

unde a_i, B și Y au aceeași semnificație ca la teorema precedentă.

3. Să considerăm suma

$$S = \frac{1}{m^n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j=0}^{m-1} f(x_1 + a_1 h \exp\frac{2k_1\pi i}{m}, \ldots, x_n + a_n h \exp\frac{2k_n\pi i}{m},\ y + bh^m), \tag{19}$$

unde, presupunînd pe f analitică iar m un număr natural impar oarecare, avem

$$S = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) + \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}\partial y^{\beta}};$$

numerele $A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta}$ sînt nule dacă cel puțin unul dintre numerele α_i nu este multiplu de m și pentru α_i înlocuiți cu $m\alpha_i$ are valoarea

$$A_{m\alpha_1,m\alpha_2,\ldots,m\alpha_n,\beta} = \frac{h^{m(\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta)}\, a_1^{m\alpha_1} a_2^{m\alpha_2}\ldots a_n^{m\alpha_n} b^{\beta}}{(m\alpha_1)!\,(m\alpha_2)!\ldots(m\alpha_n)!\,\beta!} =$$

$$= \frac{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}{(m\alpha_1)!\,(m\alpha_2)!\ldots(m\alpha_n)!} \cdot \frac{h^{mk}\, a_1^{m\alpha_1}\ldots a_n^{m\alpha_n}\cdot b^{\beta}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!\,\beta!},\ k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \beta,$$

și dacă ținem seamă că

$$\frac{(m\alpha_1)!}{\alpha_1!} = \frac{m^{\alpha_1 m}\, m^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)} \prod_{j=0}^{m-2} \int_0^\infty u^{j+m\alpha_1} \exp\,(-u^m)\,du$$

urmează că dacă introducem operatorul integral

$$Y = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m-2} \int_0^\infty u_{i_j}^{j} \exp\,(-u_{i_j}^{m})\,du_{i_j} \tag{20}$$

care aplicat funcției $f \equiv 1$ are valoarea

$$\frac{1}{m^{n(m-1)}} \Gamma^n\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^n\left(\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma^n\left(\frac{m-1}{m}\right), \tag{21}$$

avem, cu înlocuirea

$$a_i = \lambda_i\, u_{i,0}\, u_{i,1} \dots u_{i,m-2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{B}\, Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} f\left(x_1 + a_1 h \exp\frac{2k_1\pi i}{m}, \dots\right.\right.$$

$$\left.\left. \dots, x_n + a_n h \exp\frac{2k_n\pi i}{m},\ y + bh^m\right)\right] = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{mk}}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda_1^m}{m^m} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} + \dots + \frac{\lambda_n^m}{m^m} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x_n^m} + b\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k)} f(x_1, \dots, x_n, y), \tag{22}$$

unde

$$B = \frac{1}{m^{mn}}\, \Gamma^n\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma^n\left(\frac{2}{m}\right)\dots\Gamma^n\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

iar m este un întreg pozitiv impar. Avem așadar

TEOREMA 9. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{1}{m^m}\left(\lambda_1^m \frac{\partial^m w}{\partial x_1^m} + \lambda_2^m \frac{\partial^m w}{\partial x_2^m} + \dots + \lambda_n^m \frac{\partial^m w}{\partial x_n^m}\right) + b\,\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \frac{1}{B}\, Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} f\left(x_1 + a_1 h \exp\frac{2\pi i k_1}{m}, \dots\right.\right.$$

$$\left.\left. \dots, x_n + a_n h \exp\frac{2\pi i k_n}{m},\ y + bh^m\right)\right], \tag{24}$$

unde

$$a_i = \lambda_i u_{i,0} u_{i,0} \dots u_{i,m-2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$B = \frac{1}{m^{nm}} \Gamma^n\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma^n\left(\frac{2}{m}\right) \dots \Gamma^n\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{m-2} \int_0^\infty u_{ij}^j \exp\left(-u_{ij}^m\right) \mathrm{d}u_{ij} \tag{25}$$

în u_{ij}^j indicele superior este exponent.

TEOREMA 10. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{1}{m^m}\left(\lambda_1^m \frac{\partial^m w}{\partial x_1^m} + \dots + \lambda_n^m \frac{\partial^m w}{\partial x_n^m}\right) + b \frac{\partial w}{\partial y} + \mu^m w = 0 \tag{26}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$\mathrm{e}^{-(\lambda\mu)^m} \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \frac{1}{B} Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=0}^{m-1} f\left(x_1 + a_1 h \exp\frac{2\pi i k_1}{m}, \dots\right.\right.$$

$$\left.\left. \dots, x_n + a_n h \exp\frac{2\pi i k_n}{m}, y + b h^m\right)\right] \tag{27}$$

unde a_i, B, Y au aceeași semnificație ca la teorema precedentă.

III. ECUAȚII DE TIP MIXT

1. Să considerăm suma

$$S = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{h=1}^{m} f\left(x + a\lambda \exp\frac{2k\pi i}{m}, y + b\lambda \exp\frac{2h\pi i}{m}\right), \tag{1}$$

unde presupunînd pe f analitică iar m un număr natural, impar, oarecare, avem

$$S = f(x, y) + \sum_{\alpha+\beta=1}^{\infty} A_{\alpha,\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta},$$

unde $A_{\alpha,\beta}$ este nul dacă cel puțin unul din numerele α sau β nu este multiplu de m și pentru α, β înlocuiți cu $m\alpha$, $m\beta$ respectiv are valoarea

$$A_{m\alpha,m\beta} = \frac{a^{m\alpha} b^{m\beta} \lambda^{m(\alpha+\beta)}}{(m\alpha)!\,(m\beta)!} = \frac{\alpha!\,\beta!}{(m\alpha)!\,(m\beta)!} \cdot \frac{a^{m\alpha} b^{m\beta} \lambda^{m(\alpha+\beta)}}{\alpha!\,\beta!}.$$

Avem însă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha+\frac{2s-m}{m}} \theta \sin^{2\beta+\frac{2s-m}{m}} \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{s}{m}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{2s}{m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{s(m+s)\ldots[s+(\alpha-1)m]}{m^{\alpha}} \cdot \frac{s(m+s)\ldots[s+(\beta-1)m]}{m^{\beta}} \cdot \Gamma^2\left(\frac{s}{m}\right)\Gamma^{-1}\left(\alpha+\beta+\frac{2s}{m}\right).$$

Deci

$$\prod_{s=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha+\frac{2s-m}{m}} \theta \sin^{2\beta+\frac{2s-m}{m}} \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \frac{(\alpha m)!}{\alpha!} \cdot \frac{(\beta m)!}{\beta!} \cdot \frac{1}{m^{m(\alpha+\beta)}} \cdot \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{2s}{m}\right)}, \tag{2}$$

încît dacă înlocuim în (1) pe a şi b cu

$$a = \cos^{\frac{2}{m}}\varphi_1 \cos^{\frac{2}{m}}\varphi_2 \ldots \cos^{\frac{2}{m}}\varphi_{m-1}$$

$$b = \sin^{\frac{2}{m}}\varphi_1 \sin^{\frac{2}{m}}\varphi_2 \ldots \sin^{\frac{2}{m}}\varphi_{m-1}$$

şi introducem operatorul integral

$$Y = \prod_{s=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-m}{m}}\varphi_s \sin^{\frac{2s-m}{m}}\varphi_s \, d\varphi_s, \tag{3}$$

care aplicat funcţiei $f \equiv 1$ are valoarea

$$B = \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2s}{m}\right)}, \tag{4}$$

obţinem următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{m^2 B} Y\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} f\left(x + a\lambda \exp\frac{2k\pi i}{m}, y + b\lambda \exp\frac{2h\pi i}{m}\right)\right] =$$

$$= f(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{mk}}{k!\, m^{mk}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2s}{m}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{2s}{m}\right)} \cdot \left(\frac{\partial^m}{\partial x^m} + \frac{\partial^m}{\partial y^m}\right)^{(k)} f(x,y) \tag{5}$$

ceea ce ne permite să enunțăm

TEOREMA 11. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x^m} + \frac{\partial^m w}{\partial y^m} = 0 \tag{6}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x,y) = \frac{1}{B} Y\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} f\left(x + a\lambda \exp\frac{2k\pi i}{m},\ y + b\lambda \exp\frac{2h\pi i}{m}\right)\right], \tag{7}$$

unde

$$a = \prod_{j=1}^{m-1} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi_j,\quad b = \prod_{j=1}^{m-1} \sin^{\frac{2}{m}} \varphi_j, \tag{8}$$

$$B = \frac{m^2}{2^{m-1}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2s}{m}\right)}$$

iar Y este operatorul integral

$$Y = \prod_{s=1}^{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-m}{m}} \varphi_s \sin^{\frac{2s-m}{m}} \varphi_s \, d\varphi_s . \tag{9}$$

TEOREMA 12. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x^m} + \frac{\partial^m w}{\partial y^m} + \mu^m w = 0 \tag{10}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$\Phi(\lambda\mu) f(x,y) = \frac{1}{B} Y\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=1}^{m} f\left(x + a\lambda \exp\frac{2k\pi i}{m},\ y + b\lambda \exp\frac{2h\pi i}{m}\right)\right] \tag{11}$$

cu a, b, B, Y aceiași ca la teorema precedentă și

$$\Phi(\lambda\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2s}{m}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{2s}{m}\right)} \left(\frac{\lambda\mu}{m}\right)^{mk} . \tag{12}$$

Pentru $m = 3$, $\Phi(z)$ *este o soluție a ecuației diferențiale*

$$z\,\Phi''' + 3\,\Phi'' + z\,\Phi = 0. \tag{13}$$

2. Fie acum suma

$$S = \frac{1}{m^n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m} f\left(x_1 + \lambda a_1 \exp \frac{2k_1 \pi i}{m}, \ldots, x_n + \lambda a_n \exp \frac{2k_n \pi i}{m} \right), \quad (14)$$

unde, presupunînd pe f analitică iar m un număr natural, impar, oarecare, avem

$$S = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1}^{\infty} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

unde $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n}$ este nul dacă cel puțin unul din numerele α_i nu este multiplu de m și pentru $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ înlocuiți cu $m\,\alpha_1, m\,\alpha_2, \ldots, m\,\alpha_n$, respectiv, are valoarea

$$A_{m\alpha_1, m\alpha_2, \ldots, m\alpha_n} = \frac{a_1^{m\alpha_1} a_2^{m\alpha_2} \ldots a_n^{m\alpha_n}}{(m\,\alpha_1)!\,(m\,\alpha_2)! \ldots (m\,\alpha_n)!} \lambda^{m(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)}.$$

Avem însă

$$\int_{S_n} \xi_1^{2\alpha_1 + \frac{2s-m}{m}} \xi_2^{2\alpha_2 + \frac{2s-m}{m}} \ldots \xi_n^{2\alpha_n + \frac{2s-m}{m}} \, \mathrm{d}S_n = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\Gamma\left(\alpha_1 + \frac{s}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\alpha_n + \frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \frac{ns}{m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{m^k} \cdot \frac{\Gamma^n\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{ns}{m}\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} [(\alpha_i - 1)\, n + s] \cdot [(\alpha_i - 2)\, n + s] \ldots \quad (15)$$

$$\ldots [n + s] \cdot s,$$

cu $k = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, S_n definit de $\xi_i \geqslant 0$, $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$, iar $\mathrm{d}S_n$ elementul de arie al lui S_n; putem scrie

$$\prod_{s=1}^{m-1} \int_{S_n} \xi_1^{2\alpha_1 + \frac{2s-m}{m}} \ldots \xi_n^{2\alpha_n + \frac{2s-m}{m}} \, \mathrm{d}S_n =$$

$$= \frac{1}{2^{(n-1)(m-1)}} \frac{1}{m^{mk}} \cdot \frac{(m\alpha_1)!\,(m\alpha_2)! \ldots (m\alpha_n)!}{\alpha_1!\,\alpha_2! \ldots \alpha_n!} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^n\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{ns}{m}\right)}$$

cît și

$$\prod_{s=1}^{m-1} \int_{S_n} \xi_1^{\frac{2s-m}{m}} \xi_2^{\frac{2s-m}{m}} \ldots \xi_n^{\frac{2s-m}{m}} \, \mathrm{d}S_n = \frac{1}{2^{(m-1)(n-1)}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^n\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns}{m}\right)}$$

și dacă introducem operatorul

$$Y = \frac{1}{B} \prod_{s=1}^{m-1} \int_{S_{s,n}} \eta_{s,1}^{\frac{2s-m}{m}} \dots \eta_{s,n}^{\frac{2s-m}{m}} \, \mathrm{d}\, S_{s,n},$$

cu

$$B = \frac{1}{2^{(n-1)\,(m-1)}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^n\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns}{m}\right)},$$

avem următoarea formulă integrală:

$$\frac{1}{m^n} Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m} f\left(x_1 + \lambda\, a_1 \exp\frac{2k_1\,\pi\mathrm{i}}{m}, \dots, x_n + \lambda a_n \exp\frac{2k_n\,\pi\mathrm{i}}{m}\right)\right] =$$

$$= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{ns}{m}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{ns}{m}\right)} \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{mk} \times \tag{16}$$

$$\times \left(\frac{\partial^m}{\partial x_1^m} + \frac{\partial^m}{\partial x_2^m} + \dots + \frac{\partial^m}{\partial x_n^m}\right)^{(k)} f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dacă înlocuim pe a_i cu

$$a_i = \eta_{1,i}^{\frac{2}{m}} \eta_{2,i}^{\frac{2}{m}} \dots \eta_{n,i}^{\frac{2}{m}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$\eta_{k,1}, \dots, \eta_{k,n}$ fiind coordonatele unui punct curent de pe sfera $S_{k,n}$ de rază unitatea, domeniul de integrare fiind porțiunea lui $S_{k,n}$ dată de

$$\eta_{k,1} \geqslant 0, \ \eta_{k,2} \geqslant 0, \ \dots, \ \eta_{k,n} \geqslant 0.$$

Avem așadar

TEOREMA 13. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x_1^m} + \frac{\partial^m w}{\partial x_2^m} + \dots + \frac{\partial^m w}{\partial x_n^m} = 0 \tag{17}$$

verifică următoarea formulă de medie:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{C} Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m} f\left(x_1 + \lambda\, a_1 \exp\frac{2k_1\,\pi\mathrm{i}}{m}, \dots\right.\right.$$

$$\left.\left. \dots, x_n + \lambda\, a_n \exp\frac{2k_n\,\pi\mathrm{i}}{m}\right)\right], \tag{18}$$

unde

$$C = \frac{m^n}{2^{(n-1)(m-1)}} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma^n\left(\frac{s}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{ns}{m}\right)}, \tag{19}$$

$$a_i = \eta_{1,i}^{\frac{2}{m}} \eta_{2,i}^{\frac{2}{m}} \cdots \eta_{n,i}^{\frac{2}{m}}, \qquad i = 1,2,\ldots,n,$$

iar Y operatorul integral

$$Y = \prod_{s=1}^{m-1} \int_{S_{s,n}} \eta_{s,1}^{\frac{2s-m}{m}} \cdots \eta_{s,n}^{\frac{2s-m}{m}} \, \mathrm{d}S_{s,n} \tag{20}$$

$\eta_{k,1}, \ldots, \eta_{k,n}$ fiind coordonatele unui punct curent de pe sfera $S_{k,n}$ de rază unitatea, domeniul de integrare $S_{k,n}$ fiind definit de

$$\eta_{k,1} \geqslant 0, \quad \eta_{k,2} \geqslant 0, \ldots, \quad \eta_{k,n} \geqslant 0.$$

TEOREMA 14. *Soluțiile analitice ale ecuației cu derivate parțiale*

$$\frac{\partial^m w}{\partial x_1^m} + \frac{\partial^m w}{\partial x_2^m} + \ldots + \frac{\partial^m w}{\partial x_n^m} + \mu^m w = 0 \tag{21}$$

verifică următoarea formulă de medie

$$\Phi\left(\frac{\lambda\mu}{m}\right) \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{C} \cdot Y\left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{m} f(x_1 + \lambda a_1 \exp \frac{2k_1\pi\mathrm{i}}{m}, \ldots, x_n + \lambda a_n \exp \frac{2k_n\pi\mathrm{i}}{m}\right] \tag{22}$$

unde C, a_i, Y au aceeași semnificație ca la teorema precedentă iar $\Phi\left(\frac{\lambda\mu}{m}\right)$ este dat de

$$\Phi\left(\frac{\lambda\mu}{m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda\mu}{m}\right)^{mk} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{ns}{m}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{ns}{m}\right)}.$$

Domeniul de analiticitate se deduce în mod asemănător ca la alineatele precedente.

Primită la redacție la 15 noiembrie 1962

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОБОБЩАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. IV

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе устанавливаются формулы среднего для аналитических решений некоторых уравнений в частных производных высшего порядка.

Приведем, для примера, две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Аналитические решения уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} = 0 \qquad (\alpha)$$

удовлетворяют следующей формуле среднего:

$$f(x, y) = \frac{1}{A} Y\left[\int_0^{2n\pi} f(x + a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b\sqrt[n]{\sin\theta})\,\mathrm{d}\theta\right],$$

где

$$a = \lambda \cos^{\frac{2}{n}} \varphi_1 \cos^{\frac{2}{n}} \varphi_2 \ldots \cos^{\frac{2}{n}} \varphi_{n-1}, \qquad b = \lambda \sin^{\frac{2}{n}} \varphi_1 \sin^{\frac{2}{n}} \varphi_2 \ldots \sin^{\frac{2}{n}} \varphi_{n-1}$$

$$A = \frac{2\pi}{2^{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} \Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{2s}{n}\right),$$

а Y — интегральный оператор

$$Y = \prod_{s=1}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-n}{n}} \varphi_s \sin^{\frac{2s-n}{n}} \varphi_s \mathrm{d}\,\varphi_s .$$

ТЕОРЕМА 5. *Аналитические решения уравнения в частных производных*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} + b \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (\beta)$$

удовлетворяют следующей формуле среднего

$$f(x, y) = \frac{1}{m\sqrt{\pi} B} \cdot Y\left[\sum_{k=0}^{m-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} f(x + \alpha h t^{\frac{1}{m}} \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{m}},\ y + b h^{2m})\,\mathrm{d}t\right],$$

где

$$\alpha = a\, u_0\, u_1 \ldots u_{m-2}, \qquad B = \frac{1}{m^{m-1}} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

а Y — интегральный оператор

$$Y = \prod_{k=0}^{m-2} \int_0^{\infty} \cdot u_k^k \exp(-u_k^m)\, \mathrm{d}u_k,$$

при этом a, b, h — некоторые числа.

OPÉRATEURS INTÉGRAUX QUI GÉNÉRALISENT LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. IV

RÉSUMÉ

L'auteur établit des formules de moyenne pour les solutions analytiques des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

A titre d'exemple, voici deux théorèmes.

THÉORÈME 1. *Les solutions analytiques de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} + \frac{\partial^{2n} w}{\partial y^{2n}} = 0 \qquad (\alpha)$$

vérifient la formule de moyenne

$$f(x, y) = \frac{1}{A}\, Y\left[\int_0^{2n\pi} f(x + a\sqrt[n]{\cos\theta},\ y + b\sqrt[n]{\sin\theta})\, \mathrm{d}\theta\right],$$

où

$$a = \lambda \cos^{\frac{2}{n}}\varphi_1 \cos^{\frac{2}{n}}\varphi_2 \ldots \cos^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1},\quad b = \lambda \sin^{\frac{2}{n}}\varphi_1 \sin^{\frac{2}{n}}\varphi_2 \ldots \sin^{\frac{2}{n}}\varphi_{n-1},$$

$$A = \frac{2\pi}{2^{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} \Gamma^2\left(\frac{s}{n}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2s}{n}\right),$$

Y étant l'opérateur intégral

$$Y = \prod_{s=1}^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2s-n}{n}}\varphi_s \sin^{\frac{2s-n}{n}}\varphi_s \mathrm{d}\varphi_s.$$

THÉORÈME 5. *Les solutions analytiques de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{m}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} w}{\partial x^{2m}} + b\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad (\beta)$$

vérifient la formule de moyenne

$$f(x, y) = \frac{1}{m\sqrt{\pi}\,B}\, Y\left[\sum_{k=0}^{m-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f\left(x + \alpha h t^{\frac{1}{m}} e^{\frac{2k\pi i}{m}},\ y + b h^{2m}\right) dt\right],$$

où

$$\alpha = a\, u_0\, u_1 \ldots u_{m-2}, \quad B = \frac{1}{m^{m-1}}\, \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right),$$

Y étant l'opérateur intégral

$$Y = \prod_{k=0}^{m-2}\int_{0}^{\infty} u_k^k \exp\left(-u_k^m\right) du_k$$

et a, b, h des nombres quelconques.

BIBLIOGRAFIE

1. MIRON NICOLESCU, *Sur l'équation de la chaleur.* Commentarii Mathematici Helvetici, *10*, 3—7 (1937).
2. MARCEL N. ROȘCULEȚ, *Operatori integrali care generalizează ecuațiile diferențiale.* II. *Formule de medie pentru soluțiile analitice ale unor ecuații sau sisteme de ecuații de tip parabolic sau hiperbolic.* St. cerc. mat., **XIV**, *1* (1963).

FUNCȚII RAȚIONALE PE SOLUȚII GLOBALE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE OLOMORFE

DE

M. JURCHESCU

INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [5], în scopul elaborării unei tehnici pentru studiul soluțiilor globale ale ecuațiilor diferențiale olomorfe de ordinul întîi și al doilea, am introdus o clasă remarcabilă de aplicații olomorfe caracterizate prin proprietatea că frontierele lor accesibile sînt reuniuni numărabile de mulțimi polare și am demonstrat teorema fundamentală (notată A) că orice astfel de aplicație este local de tip Bl (și în particular de clasă I).

În lucrarea de față se studiază funcțiile raționale pe o soluție globală (R, Φ) (R suprafață riemanniană, Φ aplicație olomorfă) a unei ecuații de forma

$$w'' = \frac{P_1(z, w, w')}{Q_1(z, w, w')}, \quad (z, w) \in \Omega,$$

unde P_1 și Q_1 sînt polinoame în w' cu coeficienți olomorfi pe un deschis conex $\Omega \subset C^2$. În termeni neprecizați, teorema fundamentală a lucrării (notată B și anunțată în [7]) afirmă că dacă mulțimea $A = C^2 - \Omega$ este suficient de *subțire* și dacă $\varphi : R \to P_1$ este o funcție rațională pe (R, Φ) (adică $\varphi = \rho \circ \Phi$ cu ρ funcție rațională de z, w) cu proprietatea că, într-un anume sens, este în poziție generală în raport cu ecuația considerată, atunci frontiera accesibilă β_φ a lui φ este reuniune numărabilă de mulțimi polare.

Ideile esențiale ale tehnicii elaborate în [5] și în lucrarea de față reprezintă dezvoltarea ideilor din lucrările mai vechi ale autorului [3], [4]. Independent de autor, și cu ajutorul unei tehnici diferite de cea a autorului, a fost obținută proprietatea I pentru unele ecuații de ordinul întîi și al doilea de către T. Kimura [8]—[10] și Y. Satô [11].

1. PRELUNGIREA ANALITICĂ

Vom nota C corpul numerelor complexe considerat împreună cu structura sa uzuală de corp valuat și P_1 dreapta proiectivă complexă (sfera lui Riemann) considerată împreună cu scufundarea canonică a lui C în P_1, deci $P_1 = C \cup \{\infty\}$.

Pentru orice varietate analitică complexă Y, vom nota $\mathcal{O}(Y)$ inelul funcțiilor olomorfe pe Y.

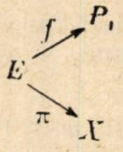
În această lucrare, vom conveni să numim *spațiu analitic* orice varietate analitică complexă care are dimensiune complexă egală cu 1 în orice punct. Astfel, orice spațiu analitic conex este o suprafață riemanniană și reciproc.

Dacă E este un spațiu analitic, orice funcție meromorfă ψ pe E se interpretează ca aplicație $\psi : E \to P_1$; o astfel de aplicație este olomorfă și diferită de aplicația ∞ (se notează astfel aplicația care ia valoarea ∞ în orice punct). Vom numi de asemenea funcție meromorfă (vectorială) orice aplicație $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) = E \to (P_1)^n$ astfel încît fiecare ψ_i este o funcție meromorfă.

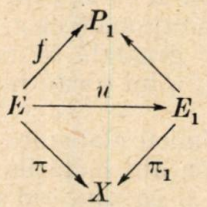
Fie X o suprafață riemanniană fixată.

Fie E un spațiu analitic, fie $\varphi : E \to X$ o aplicație olomorfă deschisă și fie U un deschis conex $\subset X$. Se numește *secțiune* a lui φ peste U orice aplicație continuă $s : U \to E$ astfel încît $\varphi \circ s =$ identitatea lui U. Întrucît, cu excepția unei mulțimi discrete, φ este un izomorfism analitic local (în particular omeomorfism local), se vede ușor că, dacă $s : U \to E$ este o secțiune a lui φ, atunci s este o aplicație olomorfă deschisă iar $s : U \to s(U)$ un izomorfism analitic.

Vom considera diagrame de forma



unde E este un spațiu analitic, $\pi : E \to X$ o aplicație olomorfă deschisă (deci 0-dimensională) și $f : E \to P_1$ o aplicație olomorfă arbitrară; o astfel de diagramă va fi notată uneori (E, π, f). Vom numi morfism al diagramei (E, π, f) în diagrama (E_1, π_1, f_1) orice aplicație olomorfă $u : E \to E_1$ astfel încît diagrama următoare este comutativă



Un morfism u se numește *izomorfism* dacă are un invers : aceasta revine la faptul că $u^{-1} : E_1 \to E$ există și este morfism.

D e f i n i ț i e. O diagramă (E, π, f) se zice *maximală* dacă are proprietatea următoare :

Pentru orice deschis conex $U \subset X$ și orice polinom monic ireductibil $p(t) = t^k + c_1 t^{k-1} + \ldots + c_k$ cu c_i funcții meromorfe pe U, există o componentă conexă V a lui $\pi^{-1}(U)$ astfel încît aplicația $\pi : V \to U$ este proprie de grad k și astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$ (ca funcție meromorfă pe V), unde $p^*(t) = t^k + c_1^* t^{k-1} + \ldots + c_k^*$ și $c_i^* = c_i \circ \pi \mid V$; în plus, componenta conexă V a lui $\pi^{-1}(U)$ cu proprietatea că $p^*(f \mid V) = 0$ este unică.

Sensul expresiei „aplicația proprie $\pi : V \to U$ are grad k" este că fiecare fibră $V \cap \pi^{-1}(a)$, $a \in U$, a acestei aplicații conține cel mult k puncte și există fibre care conțin exact k puncte.

LEMA 1.1. *Fie (E, π, f) o diagramă maximală. Atunci, pentru orice deschis conex $U \subset X$ și orice funcție meromorfă $\psi : U \to P_1$ există exact o secțiune $s : U \to E$ astfel încît $\psi = f \circ s$.*

D e m o n s t r a ț i e. Fie $p(t) = t - \psi$. După definiția maximalității, există exact o componentă conexă V a lui $\pi^{-1}(U)$ astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$, adică $f \mid V = \psi \circ \pi \mid V$; în plus aplicația $\pi : V \to U$ este proprie și univalentă, deci omeomorfism ($\pi(V)$ este o mulțime închisă și deschisă în U, deci $\pi(V) = U$).

Fie s inversul omeomorfismului $\pi : V \to U$. Clar, s este o secțiune a lui π peste U și $\psi = f \circ s$. În plus s este unica secțiune cu această proprietate, întrucît $V = s(U)$ este unica componentă conexă a lui $\pi^{-1}(U)$ cu proprietatea că $f \mid V = \psi \circ \pi \mid V$. Astfel lema este demonstrată.

Fie U un deschis conex în X, $a \in U$ și $p = p(t)$ un polinom monic cu coeficienții funcții meromorfe pe U. Vom spune că p este *ireductibil în a*, dacă, pentru orice deschis conex W conținînd a și conținut în U, polinomul $p \mid W$ este ireductibil (se notează $p \mid W$ polinomul avînd drept coeficienți restricțiile la W ale coeficienților lui p).

LEMA 1.2. *Fie (E, π, f) o diagramă maximală, U un deschis conex în X, V o componentă conexă a lui $\pi^{-1}(U)$. Proprietățile următoare sînt echivalente* :

1) *aplicația $\pi : V \to U$ este proprie*;

2) *există un polinom monic $q(t)$ cu coeficienții funcții meromorfe pe U astfel încît $q^*(f \mid V) = 0$.*

În plus, dacă $\pi : V \to U$ este proprie, polinomul monic ireductibil $p = p(t)$ astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$ există, este unic, are grad egal cu gradul aplicației $\pi : V \to U$ și are proprietatea următoare : p este ireductibil în $a \in U$ dacă și numai dacă $V \cap \pi^{-1}(a)$ conține un singur punct.

D e m o n s t r a ț i e. Pentru demonstrația implicației 1) $\Rightarrow$ 2) a se vedea [6].

Să demonstrăm implicația 2) $\Rightarrow$ 1). Fie q astfel încît $q^*(f \mid V) = 0$. Există un factor monic ireductibil p, al lui q, astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$. După definiția maximalității, $\pi : V \to U$ este proprie și are grad egal cu gradul lui p. De aici rezultă imediat și unicitatea lui p.

Fie acum $a \in U$. Să presupunem mai întîi că $V \cap \pi^{-1}(a)$ conține două puncte distincte e_1 și e_2. Atunci există un deschis conex $W \subset U$ conținînd a și două componente conexe distincte $V_1, V_2 \subset V$ ale lui $\pi^{-1}(W)$ cu $e_1 \in V_1$, $e_2 \in V_2$. Cum $p^*(f \mid V_i) = 0$, $i = 1,2$, $p \mid W$ este în mod necesar reductibil

(a se vedea definiția maximalității). Invers, să presupunem că p este reductibil în a și fie $W \subset U$ un deschis conex conținînd a astfel încît $p \mid W$ să fie reductibil. Există două componente conexe distincte V_1, $V_2 \subset V$ ale lui $\pi^{-1}(W)$ astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$. Cum $\pi(V_i) = W$, fibra $V \cap \pi^{-1}(a)$ conține cel puțin două puncte.

LEMA 1.3. *Pentru $X = P_1$, fie (E, π, f) o diagramă maximală, W un deschis conex în P_1, V o componentă conexă a lui $f^{-1}(W)$ astfel încît aplicația $f : V \to W$ este deschisă și astfel încît există un polinom monic $q(z) = z^l + d_1 z^{l-1} + \ldots + d_l$ cu coeficienți meromorfi pe W și cu proprietatea că $q^*(\pi \mid V) = 0$, unde $q^*(z) = z^l + d_1^* z^{l-1} + \ldots + d_l^*$ și $d_i^* = d_i \circ f \mid V$. Atunci aplicația $f : V \to W$ este proprie.*

Pentru demonstrație a se vedea [6].

LEMA 1.4. *Orice două diagrame maximale sînt izomorfe.*

Demonstrație. Fie (E, π, f) și (E_1, π_1, f_1) două diagrame maximale. Vom defini o aplicație $u : E \to E_1$ cum urmează : fie $e \in E$ și $a = \pi(e)$. Există un deschis conex U conținînd a și o componentă conexă V a lui $\pi^{-1}(U)$ astfel încît $V \cap \pi^{-1}(a) = \{e\}$ și astfel încît $\pi : V \to U$ este proprie. După lema 1.2, există un polinom monic $p(t)$, ireductibil în a, cu coeficienți meromorfici pe U, astfel încît $p^*(f \mid V) = 0$; în plus, p este ireductibil în a.

După definiția maximalității, există o componentă conexă V_1 a lui $\pi_1^{-1}(U)$ astfel încît $p_1^*(f_1 \mid U_1) = 0$ (dacă $p = t^k + c_1 t^{k-1} + \ldots + c_k$, definim $p_1^* = t^k + \gamma_1 t^{k-1} + \ldots + \gamma_k$ cu $\gamma_i = c_i \circ \pi_1 \mid V_1$). Întrucît p este ireductibil în a, $V_1 \cap \pi_1^{-1}(a)$ conține un singur punct, să zicem e_1. Vom pune $u(e) = e_1$. Se verifică imediat că aplicația u astfel obținută este un izomorfism.

LEMA 1.5. *Există diagrame maximale.*

Demonstrația în [6].

Vom alege una din aceste diagrame maximale, de exemplu cea construită prin procedeul din [6], și o vom numi *diagrama maximală canonică.*

De aici înainte, pentru X fixat, vom nota (E, π, f) diagrama maximală canonică; de asemenea vom nota Φ aplicația

$$\Phi = (\pi, f) : E \to X \times P_1.$$

Fie Ω un deschis conex în $X \times P_1$, U un deschis conex în X și $\psi : U \to P_1$ o funcție meromorfă astfel încît

$$U \times \psi(U) \subset \Omega.$$

Există exact o secțiune $s : U \to X$ astfel încît $\psi = f \circ s$. Mulțimea $V = s(U)$ este un deschis conex în E, $\pi(V) = U$ și $f(V) = f(s(U)) = \psi(U)$, de unde

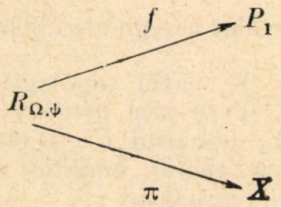
$$\Phi(V) \subset U \times \psi(U) \subset \Omega,$$

adică

$$V \subset \Phi^{-1}(\Omega).$$

Vom nota $R_{\Omega, \psi}$ componenta conexă a lui $\Phi^{-1}(\Omega)$ care conține pe V.

Definiție. Diagrama



se numește *prelungirea analitică în* X, în raport cu Ω, a lui ψ.

În cazul $\Omega = X \times P_1$, avem în mod trivial $U \times \psi(U) \subset \Omega$ pentru orice U și orice ψ. În acest caz, vom scrie R_ψ în loc de $R_{\Omega,\psi}$ și vom spune *prelungire analitică în* X în loc de prelungire analitică în X în raport cu Ω.

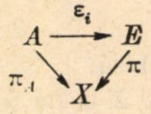
În legătură cu problema tratată în acest paragraf, a se vedea și M. Heins [2].

2. PRELUNGIREA ANALITICĂ (CONTINUARE)

Vom continua să notăm (E, π, f) diagrama maximală canonică.

Fie n întreg $\geqslant 1$, E^n produsul direct a n factori egali cu E și, pentru fiecare $i = 1, \ldots, n$, $p_i : E^n \to E$ proiecția canonică $(e_1, \ldots, e_n) \to e_i$. Atunci E^n este o varietate analitică complexă și fiecare p_i este o aplicație olomorfă deschisă.

Fie A mulțimea punctelor $e = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ cu proprietatea că $\pi(e_1) = \ldots = \pi(e_n)$, fie $\pi_A : A \to X$ aplicația definită prin $\pi_A(e) = \pi(e_1) = \ldots = \pi(e_n)$, $e = (e_1, \ldots, e_n) \in A$, și fie $\varepsilon_i = p_i \mid A$, $i = 1, \ldots, n$. Este clar că pentru orice $i = 1, \ldots, n$, avem o diagramă comutativă



adică $\pi_A = \pi \circ \varepsilon_i$.

LEMA 2.1. *Aplicațiile* $\varepsilon_i : A \to E$ *sînt deschise.*

Demonstrație. Să demonstrăm, de exemplu, că aplicația $\varepsilon_1 : A \to E$ este deschisă. Evident topologia lui A are o bază formată din mulțimi de forma $V = (V_1 \times \ldots \times V_n) \cap A$ cu $V_1, \ldots, V_n$ deschise în E și $\pi_1(V_1) \subset \pi_i(V_i)$ pentru $i \geqslant 2$. Or, este imediat că, pentru un astfel de V, $\varepsilon_1(V) = V_1$.

COROLAR. *Aplicația* $\pi_A : A \to X$ *este continuă deschisă.*

Demonstrație. π și ε_i sînt continue deschise și $\pi_A = \pi \circ \varepsilon_i$, de unde π_A este continuă deschisă.

După definiție, A este exact mulțimea punctelor $e \in E^n$ în care sînt egale cele n aplicații olomorfe $\pi \circ p_i : E^n \to X$, și, în consecință, A este anali-

tică în E^n (în legătură cu teoria mulțimilor analitice, inclusiv normalizarea, a se vedea [6]).

Fie M mulțimea punctelor neregulate ale lui A. Atunci M este închisă și nicăieri densă în A.

Amintim că, pentru Y spațiu topologic local conex, o mulțime închisă nicăieri densă $B \subset Y$ se zice *nicăieri disconectantă* dacă pentru orice deschis conex $U \subset Y$, deschisul $U - B$ este conex.

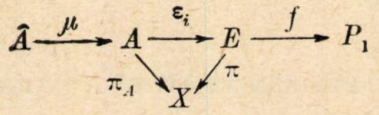
LEMA 2.2. *Există un spațiu analitic $\hat{A}$ și o aplicație olomorfă $\mu : \hat{A} \to E$ având proprietățile următoare :*

1) *μ este proprie, cu fibre finite, și $\mu(\hat{A}) = A$;*

2) *$\mu^{-1}(M)$ este nicăieri disconectantă în $\hat{A}$ și aplicația $\mu : \hat{A} - \mu^{-1}(M) \to A - M$ este un omeomorfism.*

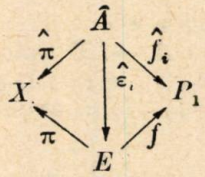
Demonstrație. Caz particular al teoremei de normalizare pentru mulțimi analitice (a se vedea de exemplu, [6]).

Pentru fiecare $i = 1, \ldots, n$, avem o diagramă comutativă



Vom nota $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \circ \mu$, $\hat{\pi} = \pi_A \circ \mu = \pi \circ \hat{\varepsilon}_i$, $f_i = f \circ \varepsilon_i$, $\hat{f}_i = f_i \circ \mu = f \circ \hat{\varepsilon}_i$, $f_A = (f_1, \ldots, f_n)$, $\hat{f} = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n) = f_A \circ \mu$.

Atunci, în particular, pentru fiecare i avem o diagramă comutativă



Aplicația $\hat{\pi}$ este olomorfă deschisă.

Fie U un deschis conex în X și fie $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ o funcție meromorfă (adică fiecare ψ_i este o funcție meromorfă). După lema 1.1, pentru fiecare i, există exact o secțiune $s_i : U \to E$ a lui π astfel încît

$$\psi_i = f \circ s_i.$$

Vom defini aplicația $s : U \to A$ prin $s(x) = (s_1(x), \ldots, s_n(x))$, $x \in U$. Atunci s este continuă și $\pi_A \circ s =$ identitatea lui U ; în plus, întrucît fiecare mulțime $s_i(U)$ este deschisă în E, mulțimea

$$s(U) = (s_1(U) \times \ldots \times s_n(U)) \cap A$$

este deschisă în A. Urmează că aplicația $s : U \to s(U)$, fiind continuă, deschisă, univalentă și pe, este omeomorfism ; în plus, întrucît fiecare $s_i : U \to E$ este o aplicație olomorfă, aplicația s, considerată ca aplicație de la U în E^n, este olomorfă. De aici rezultă imediat că mulțimea $s(U)$ este

formată numai din puncte regulate ale lui A. Fie $V = s(U)$ și $\hat{V} = \mu^{-1}(V)$. După lema 2.2, aplicația $\mu : \hat{V} \to V$ este un omeomorfism, să zicem μ_U. Vom defini aplicația

$$\hat{s} : U \to \hat{A}$$

prin $\hat{s} = \mu_U^{-1} \circ s$. Este clar că $\hat{s}(U) = \hat{V}$.

LEMA 2.3. *$\hat{s}$ este o secțiune peste U a lui $\hat{\pi}$ și $\psi = \hat{f} \circ \hat{s}$.*

Demonstrație. Evident $\hat{s}$ este continuă. Apoi, $\hat{\pi} \circ \hat{s} = (\pi_A \circ \mu) \circ (\mu_U^{-1} \circ s) = \pi_A \circ s =$ identitatea lui U, astfel că s este o secțiune a lui $\hat{\pi}$. Mai departe, întrucît $\hat{f}_i = f \circ \hat{\varepsilon}_i = f \circ \varepsilon_i \circ \mu$ și întrucît evident $\varepsilon_i \circ s = s_i$, $\hat{f}_i \circ \hat{s} = f \circ \varepsilon_i \circ \mu \circ \mu_U^{-1} \circ s = f \circ s_i = \psi_i$, de unde $\hat{f} \circ \hat{s} = \psi$, ceea ce termină demonstrația lemei.

Vom nota

$$\Phi_A = (\pi_A, f_A) : A \to X \times (P_1)^n$$

și

$$\hat{\Phi} = \Phi_A \circ \mu = (\hat{\pi}, \hat{f}) : \hat{A} \to X \times (P_1)^n.$$

Fie Ω un deschis conex în $X \times (P_1)^n$, U un deschis conex în X și $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : U \to (P_1)^n$ o funcție meromorfă astfel încît

$$U \times \psi(U) \subset \Omega.$$

Fie $\hat{s} : U \to \hat{A}$ secțiunea lui $\hat{\pi}$ din lema 2.3, asociată cu ψ, și fie $\hat{V} = \hat{s}(U)$. Atunci $\hat{\pi}(\hat{V}) = U$ și $\hat{f}(\hat{V}) = \hat{f}(\hat{s}(\hat{V})) = \psi(U)$, de unde

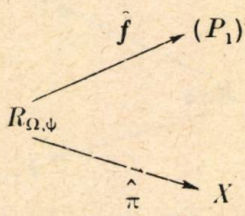
$$\hat{\Phi}(\hat{V}) \subset U \times \psi(U) \subset \Omega,$$

adică

$$\hat{V} = \hat{\Phi}^{-1}(\Omega).$$

Vom nota $R_{\Omega,\psi}$ componenta conexă a lui $\hat{\Phi}^{-1}(\Omega)$ care conține pe $\hat{V}$.

Definiție. Diagrama



se numește *prelungirea analitică* în X, în raport cu Ω, a funcției meromorfe ψ.

3. SOLUȚII LOCALE ȘI SOLUȚII GLOBALE

Fie n întreg $\geqslant 1$, Ω un deschis conex în $C^{n+1} = C \times C^n$ (funcții coordonate z și $w = (w_1, \ldots, w_n)$) și $F_i \in \mathcal{O}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Vom considera sistemul diferențial olomorf

$$\frac{dw_i}{dz} = F_i(z,w), \quad (z,w) \in \Omega. \tag{1}$$

Definiție. Fie U un deschis conex în C și fie $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) : U \to C^n$ o aplicație olomorfă astfel încît

1) $U \times \psi(U) \subset \Omega$,

2) $\dfrac{d\psi_i(z)}{dz} = F_i(z, \psi(z))$, $z \in V$, $i = 1, \ldots, n$.

În aceste condiții, vom spune că ψ este o *soluție locală* sau o *integrală locală* (în raport cu Ω) a sistemului (1).

În absența mențiunii exprese a contrariului, prin *disc* în C (respectiv *polidisc* în C^n) vom înțelege un disc (respectiv polidisc) centrat în origine. Amintim că prin polidisc centrat în $a = (a_1, \ldots, a_n)$ și de rază $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ se înțelege mulțimea punctelor $w = (w_1, \ldots, w_n) \in C^n$ cu proprietatea că $|w_i| < \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Vom presupune că Ω conține originea $(0, 0)$ a lui C^{n+1}.

TEOREMA 3.1. *Există un disc D în C, un polidisc F în C^n, $D \times F \subset \Omega$, și o aplicație olomorfă*

$$\varphi : D \times D \times F \to C^n,$$

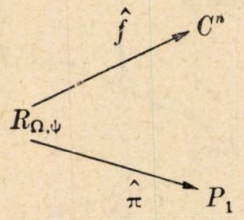
unică, astfel încît, pentru orice punct $(z^0, w^0) \in D \times F$,

1. *funcția $z \to \varphi(z, z^0, w^0)$, $z \in D$, este o soluție locală a sistemului* (1),

2. $\varphi(z^0, z^0, w^0) = w^0$.

Această teoremă este *clasică* și de aceea vom omite demonstrația ei.

Fie U un deschis conex în C, fie $\psi : U \to C^n$ o soluție locală a sistemului (1), și fie



prelungirea analitică în P (în raport cu Ω) a lui ψ.

Definiție. Vom spune că diagrama $(R_{\Omega,\psi}, \hat{\pi}, \hat{f})$ este *soluție globală* sau *integrală globală*, asociată cu ψ, a sistemului (1).

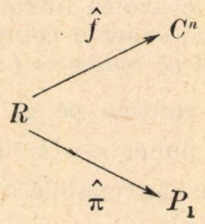
Observație. Prin aplicarea principiului prelungirii analitice se demonstrează imediat proprietatea următoare care justifică numele de soluție globală : în situația din definiția precedentă, dacă W este un deschis conex în C și $\hat{s} : W \to R_{\Omega,\psi}$ o secțiune a lui $\hat{\pi}$, atunci $\hat{f} \circ \hat{s}$ este o soluție locală a sistemului (1).

4. FILTRE CONEXE

Prin *filtru conex* pe un spațiu topologic, vom înțelege un filtru care are o bază formată din mulțimi conexe.

Ne vom situa în condițiile teoremei 3.1 și vom folosi notațiile din această teoremă.

Fie



o soluție globală (în raport cu Ω) a sistemului (1).

TEOREMA 4. *Să considerăm proprietățile următoare ale unui filtru conex* λ *pe* R :

1) *aderența lui* $\hat{\Phi}(\lambda)$ *conține originea lui* C^{n+1},

2) *există* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *astfel încît* $\hat{f}_j(\lambda)$ *converge către* 0 *și astfel încît funcția* $z \to \varphi_j(z, 0, 0)$ *este diferită de funcția zero*,

3) $\hat{\pi}(\lambda)$ *converge către* 0,

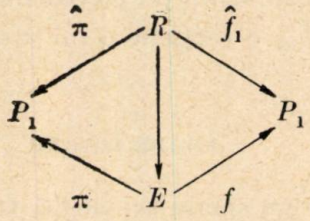
4) λ *converge în* R.

Atunci 1) și 2) $\Rightarrow$ *1) și 3)* $\Rightarrow$ *4).*

Demonstrație. 1) și 2) $\Rightarrow$ 1) și 3). Vom face raționamentul pentru $j = 1$. Vom folosi notațiile din teorema 2.1. Fie B imaginea prin proiecția $(w_1, \ldots, w_n) \to w_1$ a polidiscului F. Din 2) rezultă că funcția $(z, w_1, z^0, w^\circ) \to w_1 - \varphi_1(z, z^0, w^0)$, $(z, w_1, z^0, w^0) \in D \times B \times D \times F$, este regulată în raport cu z în $0 \in C^{n+3}$ (adică această funcție nu se anulează identic cînd facem simultan $z^0 = 0$, $w^0 = 0$ și $w_1 = 0$). După teorema lui Weierstrass, există un polidisc $D_1 \times B_1 \times D_1 \times F_1 \subset D \times B \times D \times F$, funcții $c_i \in \mathcal{O}_*(B_1 \times D_1 \times F_1)$ cu $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, și o funcție $g \in \mathcal{O}(D_1 \times B_1 \times D_1 \times F_1)$ diferită de zero în orice punct din $D_1 \times B_1 \times D_1 \times F_1$ astfel încît să avem identitatea

$$(w_1 - \varphi_1(z, z^0, w^0))\, g(z, w_1, z^0, w^0) = z^k + c_1(w_1, z^0, w^0)\, z^{k-1} + \ldots + c_k(w_1, z^0, w^0),\ (z, w_1, z^0, w^0) \in D_1 \times B_1 \times D_1 \times F_1.$$

Să considerăm acum diagrama comutativă (a se vedea paragraful 2, cazul $X = P_1$)



Vom nota λ_1 filtrul generat de baza $\hat{\varepsilon}_1(\lambda)$; λ_1 este un filtru conex pe E (întrucît λ este conex și $\hat{\varepsilon}_1$ continuă). Din comutativitatea diagramei rezultă că bazele de filtru $f(\lambda_1)$ și $\hat{f}_1(\lambda)$ sînt echivalente, de unde, după 2), $f(\lambda_1)$ converge către 0. Urmează că filtrul λ_1 conține mulțimea $f^{-1}(B_1)$ și deci, fiind conex, λ_1 conține exact o componentă conexă, să zicem V, a lui $f^{-1}(B_1)$. Vom demonstra *că aplicația* $f: V \to B$ *este proprie.*

Într-adevăr, întrucît λ conține pe $\hat{\varepsilon}_1^{-1}(V)$ și întrucît aderența lui $\hat{\Phi}(\lambda)$ conține pe 0, există un punct $r_0 \in \hat{\varepsilon}_1^{-1}(V)$, *ordinar* pentru $\hat{\pi}$ (adică restricția lui $\hat{\pi}$ la o vecinătate convenabilă a lui r_0 este univalentă) astfel încît

$$\hat{\Phi}(r_0) = (a, b) \in D_1 \times F_1, \quad b = (b_1, \ldots, b_n).$$

Vom defini funcțiile $\gamma_i \in \mathcal{O}(B)$, $i = 1, \ldots, k$, prin formulele

$$\gamma_i(w_1) = c_i(w_1, a, b), \quad w_1 \in B_1,$$

și vom nota $\gamma_i^* = \gamma_i \circ f$ și $q^*(z) = z^k + \gamma_1^* z^{k-1} + \cdots + \gamma_k^*$.

Atunci $\gamma_i^* \in \mathcal{O}(V)$ și

$$q^*(\pi \mid V) \in \mathcal{O}(V).$$

Vom arăta că

$$q^*(\pi \mid V) = 0 \qquad \text{în } \mathcal{O}(V).$$

Întrucît $r_0 \in \hat{\varepsilon}_1^{-1}(V)$ este ordinar pentru $\hat{\pi}$ și întrucît $a = \hat{\pi}(r_0) \in D_1$ și $\hat{\varepsilon}_1(r_0) \in V$, există un deschis conex $U \subset D_1$ conținînd pe a și o secțiune locală

$$\hat{s}: U \to R$$

a lui $\hat{\pi}$ astfel încît $\hat{s}(a) = r_0$ și astfel încît

$$s_1(U) \subset V,$$

unde $s_1 = \hat{\varepsilon}_1 \circ \hat{s}$. Aplicația $\psi = \hat{f} \circ \hat{s}: U \to C^n$ este o soluție locală a lui (1) (a se vedea observația de la sfîrșitul paragrafului 3) și $\psi(a) = \hat{f}(r_0) = b$.

După teorema 3.1, ψ coincide, pe U, cu aplicația $z \to \varphi(z, a, b)$, adică

$$\hat{f}(\hat{s}(z)) = \varphi(z, a, b), \; z \in U,$$

de unde, în particular,

$$\hat{f}_1(\hat{s}(z)) = \varphi_1(z, a, b), \; z \in U.$$

Dar avem

$$\hat{f}_i \circ \hat{s} = (f_1 \circ \mu) \circ \hat{s} = f \circ (\varepsilon_1 \circ \mu) \circ \hat{s} = f \circ \hat{\varepsilon}_1 \circ \hat{s} = f \circ s_1,$$

astfel că egalitatea precedentă devine

$$f(s_1(z)) = \varphi_1(z, a, b), \; z \in U.$$

Pe de altă parte, s_1 este o secțiune a lui π peste U (într-adevăr, s_1 este continuă și $\pi \circ s_1 = \pi \circ \hat{\varepsilon}_1 \circ \hat{s} = \hat{\pi} \circ \hat{s} =$ identitatea lui U) și de aceea egalitatea $s_1(z) = e$, $z \in U$, este echivalentă cu $z = \pi(e)$, $e \in s_1(U)$, astfel că putem scrie

$$f(e) = \varphi_1(\pi(e), a, b), \; e \in s_1(U).$$

Pentru $z^0 = a$ și $w^0 = b$, identitatea stabilită la începutul demonstrației devine

$$(w_1 - \varphi_1(z, a, b))\, g(z, w_1, a, b) = z^k + \gamma_1(w_1)z^{k-1} + \ldots + \gamma_k(w_1),$$
$$(z, w_1) \in D_1 \times B_1.$$

Substituind aici $z = \pi(e)$ și $w_1 = f(e)$, $e \in s_1(U)$, și ținînd seama de egalitatea precedentă, obținem

$$0 = (\pi(e))^k + \gamma_1^*(e)\,(\pi(e))^{k-1} + \ldots + \gamma_k^*(e), \; e \in s_1(U).$$

Aceasta înseamnă că funcția $q^*(\pi \mid V) \in \mathcal{O}(V)$ se anulează în orice punct $e \in s_1(U)$. Dar $s_1(U)$ este un deschis nevid $\subset V$ și V este un deschis conex, astfel că, după principiul prelungirii analitice,

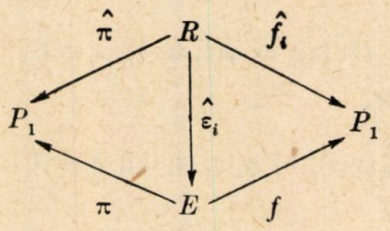
$$q^*(\pi \mid V) = 0.$$

Astfel condițiile lemei 1.3 sînt îndeplinite și de aceea aplicația $f: V \to B_1$ este proprie.

Așadar ne găsim în situația următoare: filtrul λ_1 este conex și conține pe V, aplicația $f: V \to B$ este proprie, și baza de filtru $f(\lambda_1)$ converge către 0.

După o lemă stabilită în [5], filtrul λ_1 converge către un punct $e_1 \in V \cap \pi^{-1}(0)$. De aici rezultă că baza de filtru $\hat{\pi}(\lambda)$, echivalentă cu $\pi(\lambda_1)$, converge către 0. Astfel prima implicație este demonstrată.

1) și 3) $\Rightarrow$ 4). Să considerăm diagrama comutativă



Vom nota λ_i filtrul generat de baza $\hat{\varepsilon}_i(\lambda)$; λ_i este un filtru conex pe E. Din comutativitatea diagramei rezultă că bazele de filtru $\hat{\pi}(\lambda)$ și $\pi(\lambda_i)$ sînt echivalente, astfel că, după 3), $\pi(\lambda_i)$ converge către 0. Urmează că λ_i conține exact o componentă conexă, să zicem V_i, a lui $\pi^{-1}(D)$. *Vom arăta că aplicația* $\pi : V_i \to D$ *este proprie.*

Într-adevăr, întrucît λ conține pe $\hat{\varepsilon}_i^{-1}(V_i)$ și întrucît aderența lui $\hat{\Phi}(\lambda)$ conține pe 0, există $r_0 \in \hat{\varepsilon}_i^{-1}(V_i)$, ordinar pentru $\hat{\pi}$, astfel încît

$$\hat{\Phi}(r_0) = (a,\ b) \in D \times B.$$

Vom defini secțiunea $\hat{s} : U \to R$ a lui π, astfel încît $a \in U \subset D$, $\hat{s}(a) = r_0$ și $s_i(U) \subset V_i$, unde $s_i = \hat{\varepsilon}_i \circ \hat{s}$. Atunci avem

$$f(e) = \varphi_i(\pi(e),\ a,\ b), \qquad e \in s_i(U).$$

Dar $s_i(U)$ este un deschis nevid $\subset V_i$ și V_i este un deschis conex; de aceea, în virtutea principiului prelungirii analitice,

$$f(e) = \varphi_i(\pi(e),\ a,\ b),\ e \in V_i.$$

După lema 1.2, aplicată polinomului monic, de grad 1,

$$t - \varphi_i(z,\ a,\ b),\ z \in D,$$

aplicația $\pi : V_i \to D$ este proprie.

Așadar ne găsim în situația: λ este conex și conține pe V_i, $\pi : V_i \to D$ este proprie, $\pi(\lambda_i)$ converge către 0. Urmează că λ_i (deci $\hat{\varepsilon}_i(\lambda)$) converge către un punct $e_i \in V_i \cap \pi^{-1}(0)$.

Mai departe, avem $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i \circ \mu$ și deci, pentru orice i, $\varepsilon_i(\mu(\lambda))$ converge către e_i. Urmează că $\mu(\lambda)$ converge către $e = (e_1, \ldots, e_n) \in A$ $(\pi(e_1) = \cdots = \pi(e_n) = 0)$. În sfîrșit, cum λ este conex și μ proprie, λ este convergent în R și teorema este complet demonstrată.

Notăm că teorema 4.1 conține așa-numita *teoremă de unicitate a lui Painlevé* (a se vedea și W. Gross [1]).

5. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ SEMIRAȚIONALĂ DE ORDINUL AL DOILEA

Amintim că dacă K este corp comutativ, inelul $K[X]$ al polinoamelor în o nedeterminată X cu coeficienți în K este *factorial*, adică orice polinom F de grad $\partial(F) > 0$ din $K[X]$ admite o reprezentare ca produs finit de polinoame ireductibile și în plus această reprezentare este *unică* pînă la ordinea factorilor și pînă la înmulțirea lor cu elemente nenule din K; un polinom $F \in K[X]$ se zice *ireductibil* dacă $\partial(F) > 0$ și dacă nu există polinoame $F_1, F_2 \in K[X]$ astfel încît $\partial(F_1), \partial(F_2) > 0$ și astfel încît $F = F_1 F_2$; două polinoame $P, Q \in K[X]$ se zic *fără factori ireductibili comuni* dacă nu există polinoame $F, P_1, Q_1 \in K[X]$, F ireductibil, astfel încît $P = F P_1$ și $Q = FQ_1$.

Fie Ω un deschis conex în C^2 (funcții coordonate z, w). Vom nota $\Lambda = \mathcal{O}(\Omega)$ (Λ este inel de integritate) și $\Lambda' =$ corpul fracțiilor lui Λ; avem $\Lambda \subset \Lambda'$ și $\Lambda[X] \subset \Lambda'[X]$. Pentru $F \in \Lambda[X]$ și $(z, w) \in \Omega$, vom nota $F(z, w, X)$ polinomul avînd drept coeficienți valorile în (z, w) ale coeficienților lui F.

Fie P_1 și $Q_1 \in \Lambda[X]$ două polinoame fără factori ireductibili comuni (în inelul factorial $\Lambda'[X]$). Vom considera ecuația diferențială

$$w'' = \frac{P_1(z, w, w')}{Q_1(z, w, w')}, \quad (z, w) \in \Omega. \tag{2}$$

Vom numi *soluție locală* a ecuației (2), orice funcție $\psi \in \mathcal{O}(U)$ avînd proprietățile următoare (ψ' și ψ'' sînt derivatele primă și secundă ale lui ψ):

1) U este un deschis conex în C și $U \times \psi(U) \subset \Omega$;

2) există $z_0 \in U$ astfel încît $Q_1(z_0, \psi(z_0), \psi'(z_0)) \neq 0$;

3) $\psi''(z)\, Q_1(z, \psi(z), \psi'(z)) = P_1(z, \psi(z), \psi'(z))$, $z \in U$.

Prelungirea analitică (în raport cu Ω) a unei soluții locale se numește *soluție globală*.

Fie (R, Φ), $\Phi = (\pi, f) : R \to \Omega$, o soluție globală a ecuației (2).

Definiție. Vom numi *funcție rațională* pe (R, Φ) orice aplicație olomorfă $\varphi : R \to P_1$ care admite o factorizare de forma

$$\varphi : R \xrightarrow{\Phi} \Omega \xrightarrow{\rho} P_1,$$

unde ρ este o funcție rațională de z, w (întrucît $\Phi \neq$ const., compunerea $\rho \circ \Phi$ are sens deși funcția ρ are un număr finit de puncte de nedeterminare).

Fie (R, Φ) o soluție globală a ecuației (2) și fie $\varphi = \rho \circ \Phi : R \to P_1$ o funcție rațională neconstantă pe (R, Φ). Vom alege o funcție rațională σ de z, w astfel încît aplicația rațională $(z, w) \to (x = \rho(z, w), t = \sigma(z, w))$ să fie de rang diferențial complex 2, adică

$$\Delta = \rho_w \sigma_z - \rho_z \sigma_w \neq 0$$

(ca funcție rațională), unde ρ_z, ρ_w sînt derivatele în raport cu z, w ale lui ρ etc.; atunci $(R, \sigma \circ \Phi, \varphi)$ este o soluție globală a unei ecuații diferențiale de forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P(z, w, u)}{Q(z, w, u)}, \quad (z, w) \in \Omega, \tag{3}$$

unde P și Q sînt polinoame în $u = \frac{dx}{dt}$ cu coeficienți $\in \Lambda$, fără factori ireductibili comuni.

Vom nota $p = \partial(P)$, $q = \partial(Q)$.

Definiție. O funcție rațională $\varphi = \rho \circ \Phi : R \to P_1$ se zice în *poziție generală* (în raport cu ecuația (2)) dacă există σ astfel încît $P(0) \neq 0$ în Λ.

Evident, dacă φ este în poziție generală, atunci $\varphi \neq$ const.

Observație. Calculul efectiv arată că dacă $P(0) \neq 0$ pentru un σ, atunci $P(0) \neq 0$ pentru orice σ astfel încît $\Delta \neq 0$.

Exemple. Un calcul simplu arată că funcția π (cazul $\rho = z$) este în poziție generală dacă $\partial(P_1) \geqslant \partial(Q_1) + 3$, iar funcția $\varphi = c\pi + f$ (cazul $\rho = cz + w$) este în poziție generală dacă $P_1(-c) \neq 0$, astfel că $\varphi = c\pi + f$ este în poziție generală exceptînd un număr finit de valori ale lui c.

Pentru studiul ecuației (3) vom avea nevoie de cîteva sisteme auxiliare echivalente cu (3). Vom folosi formulele

$$\frac{dx}{dz} = \rho_z + \rho_w w', \quad \frac{dt}{dz} = \sigma_z + \sigma_w w'$$

care dau

$$w' = \frac{-\rho_z + \sigma_z u}{\rho_w - \sigma_w u}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{\Delta u}{\rho_w - \sigma_w u}, \quad \frac{dt}{dz} = \frac{\Delta}{\rho_w - \sigma_w u}.$$

De aici se obține imediat primul sistem auxiliar echivalent cu ecuația (3):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{P(u)}{Q(u)}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\rho_w - \sigma_w u}{\Delta}, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{-\rho_z + \sigma_z u}{\Delta}. \end{cases} \tag{3. a}$$

Apoi, dacă în (3. a) luăm ca variabilă independentă pe u, obținem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \dfrac{uQ(u)}{P(u)}, \\ \dfrac{dt}{du} = \dfrac{Q(u)}{P(u)}, \\ \dfrac{dz}{du} = \dfrac{(\rho_w - \sigma_w u)\, Q(u)}{\Delta P(u)}, \\ \dfrac{dw}{du} = \dfrac{(-\rho_z + \sigma_z u) Q(u)}{\Delta P(u)}. \end{cases} \tag{3. b}$$

De asemenea, punînd $u = 1/v$ în (3. a), găsim, în cazul $p \leqslant q + 3$,

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = v, \\ \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v^3 P\left(\dfrac{1}{v}\right)}{Q\left(\dfrac{1}{v}\right)} = -\dfrac{v^{3-p+q}\dot{P}(v)}{\dot{Q}(v)}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\rho_w v - \sigma_w}{\Delta}, \\ \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{-\rho_z v + \sigma_z}{\Delta}, \end{cases} \tag{3. c}$$

unde $p = \partial(P)$, $q = \partial(Q)$, $\dot{P}(v) = v^p\, P\left(\dfrac{1}{v}\right)$, $\dot{Q}(v) = v^q Q\left(\dfrac{1}{v}\right)$.

În sfîrșit, în cazul $p \geqslant q + 3$, luînd v drept variabilă independentă în (3. c), avem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dv} = -\dfrac{v^{p-q-3}\,\dot{Q}(v)}{\dot{P}(v)}, \\ \dfrac{dt}{dv} = -\dfrac{v^{p-q-2}\,\dot{Q}(v)}{\dot{P}(v)}, \\ \dfrac{dz}{dv} = -\dfrac{(\rho_w v - \sigma_w)\, v^{p-q-3}\,\dot{Q}(v)}{\Delta\, \dot{P}(v)}, \\ \dfrac{dw}{dv} = -\dfrac{(-\rho_z v + \sigma_z)\, v^{p-q-3}\,\dot{Q}(v)}{\Delta\, \dot{P}(v)}. \end{cases} \tag{3. d}$$

Vom folosi următoarele notații:

$\rho = \rho_1/\rho_0$, unde ρ_0 și ρ_1 sînt polinoame de z, w (cu coeficienți $\in C$) fără factori ireductibili comuni,

$\Delta = \Delta_1/\rho_0^4$, unde ρ_0 și Δ_1 sînt polinoame în z, w fără factori ireductibili comuni,

d = rezultantul lui P și Q,
a_p = coeficientul dominant al lui P,
b_q = coeficientul dominant al lui Q,
a_0 = coeficientul liber al lui P,
$g = d\Delta_1\rho_0\rho_1 a_0 a_p b_q$,
$A_1 = g^{-1}(0)$,
$\Omega_1 = \Omega - A_1$.

Notăm că $d \in \Lambda$, $d \neq 0$ și, pentru $(a, b) \in \Omega$, $d(a, b) = 0$ dacă există $u_0 \in C$ astfel încît $P(a, b, u_0) = Q(a, b, u_0) = 0$; A_1 este o mulțime analitică (de dimensiune complexă 1) în Ω și Ω_1 este un deschis conex.

LEMA 5.1. *Presupunem că* $\varphi = \rho \circ \Phi$ *este în poziție generală.*

1) *Fie* $(t_0, x_0, u_0, a, b) \in C^3 \times \Omega_1$ *astfel încît* $Q(a, b, u_0) \neq 0$, $U \subset C$ *un deschis conex conținînd pe* t_0 *și* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) : U \to C^2 \times \Omega$ *o soluție locală a lui* (3. a) *astfel încît* $\psi(t_0) = (x_0, u_0, a, b)$.

Atunci ψ_1 *este neconstant.*

2) *Fie* $(u_0, x_0, t_0, a, b) \in C^3 \times \Omega_1$ *astfel încît* $P(a, b, u_0) \neq 0$, $U \subset C$ *un deschis conex conținînd pe* u_0 *și* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) : U \to C^2 \times \Omega_1$ *o soluție locală a lui* (3. b) *astfel încît* $\psi(u_0) = (x_0, t_0, a, b)$.

Atunci ψ_1 *este neconstant.*

3) *Fie* $(x_0, t_0, a, b) \in C^2 \times \Omega_1$ *astfel încît* $a_p(a, b) \neq 0$, $U \subset C$ *un deschis conex conținînd pe* 0 *și* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) : U \to C^2 \times \Omega_1$ *o soluție locală a lui* (3. d) *astfel încît* $\psi(0) = (x_0, t_0, a, b)$. *Atunci* ψ_1 *este neconstant.*

Demonstrație. 1) Întrucît $(a, b) \in \Omega_1$ și întrucît $Q(a, b, u_0) \neq 0$, sistemul (3. a) este olomorf pe un deschis conex $G \subset C^2 \times \Omega_1$ conținînd pe (t_0, x_0, u_0, a, b). Vom presupune că U este așa de mic, încît $U \times \psi(U) \subset G$. Să admitem prin absurd, că ψ_1 este constant, adică $\psi_1 = x_0$. Atunci din (3. a) rezultă mai întîi că ψ_2 este constant și anume $\psi_2 = u_0 = 0$ și apoi că $P(\psi_3(t), \psi_4(t), 0) = 0$ pentru orice $t \in U$, de unde, pentru $t = t_0$, $P(a, b, 0) = 0$, ceea ce este o contradicție (a se vedea definiția lui Ω_1).

2) Sistemul (3.b) este olomorf pe un deschis conex $G \subset C^3 \times \Omega_1$ conținînd punctul (u_0, x_0, t_0, a, b); vom presupune că U este astfel încît $U \times \psi(U) \subset G$. Să admitem, prin absurd, că ψ_1 este constant, adică $\psi_1 = x_0$. Din (3.b) rezultă mai întîi că $Q(\psi_3(u), \psi_4(u), u) = 0$ pentru orice $u \in U$, și apoi că ψ este constant, $\psi = (x_0, t_0, a, b)$. Urmează că $Q(a, b, u)$ este polinomul zero, de unde, în particular, $bq(a, b) = 0$, ceea ce este o contradicție.

3) Întrucît $P(a, b, 0) = a_p(a, b) \neq 0$, sistemul (3.d) este olomorf pe un deschis conex $G \subset C^3 \times \Omega_1$ conținînd punctul $(0, x_0, t_0, a, b)$; vom presupune că U este astfel încît $U \times \psi(U) \subset G$. Să admitem, prin ab-

surd, că ψ_1 este constant, adică $\psi_1 = x_0$. Atunci din (3.d) rezultă mai întîi că $\dot{Q}(\psi_3(v), \psi_4(v), v) = 0$ pentru orice $v \in U$ și apoi că ψ este constant, $\psi = (x_0, t_0, a, b)$. Urmează că polinomul $\dot{Q}(a, b, v)$ este nul, de unde, în particular, $Q(a, b, 0) = b_2(a, b) = 0$, ceea ce este iarăși o contradicție.

6. TEOREMA PRELIMINARĂ

Fie din nou (R, Φ) o soluție globală (în raport cu Ω) a ecuației (2) și fie $\varphi = \rho \circ \Phi : R \to P_1$ o funcție rațională pe (R, Φ); *vom presupune că* φ *este în poziție generală* (și, în particular, neconstant).

Fie $L \subset P_1 \times P_1$ mulțimea punctelor de nedeterminare ale lui ρ.

LEMA 6.1. *Mulțimea* L *este finită și aplicația* $\rho : P_1 \times P_1 - L \to P_1$ *este olomorfă.*

Din lema 6.1 rezultă că, pentru orice $c \in P_1$, mulțimea $M(c) \subset P_1 \times P_1 - L$, definită prin

$$M(c) = \rho^{-1}(c),$$

este analitică (de dimensiune complexă 1) în $P_1 \times P_1 - L$, iar închiderea ei, $\overline{M(c)}$, este analitică (de dimensiune complexă 1) în $P_1 \times P_1$.

Vom nota β_φ *frontiera accesibilă* a aplicației olomorfe neconstante $\varphi : R \to P_1$ (pentru definiția frontierei accesibile a se vedea [5]).

TEOREMA 6. Fie $\lambda \in \beta_\varphi$, $c = lim\ \varphi(\lambda)$ (*presupunem* $c \neq \infty$), $K(\lambda)$ *aderența lui* $\Phi(\lambda)$ *în* $P_1 \times P_1$ *și* $K_0(\lambda) = (P_1 \times P_1 - L) \cap K(\lambda)$.

Atunci

$$K_0(\lambda) \subset M(c) \cap (P_1 \times P_1 - \Omega_1).$$

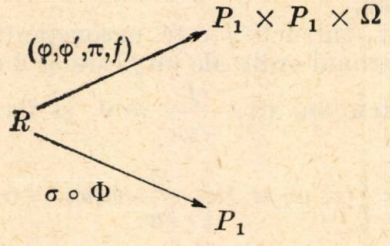
Demonstrație. (i) $K_0(\lambda) \subset M(c)$. Într-adevăr, baza de filtru $\varphi(\lambda) = \rho(\Phi(\lambda))$ converge către c și aplicația

$$\rho : P_1 \times P_1 - L \to P_1$$

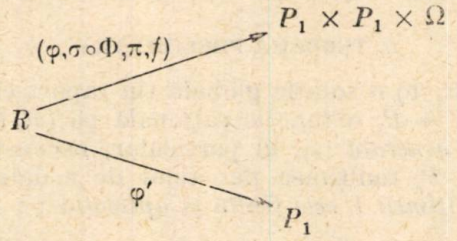
este continuă, de unde aderența în $P_1 \times P_1 - L$ a lui $\Phi(\lambda)$ este conținută în $\rho^{-1}(c) \cap (P_1 \times P_1 - L) = M(c)$.

(ii) $K_0(\lambda) \subset P_1 \times P_1 - \Omega_1$. Fie $(a, b) \in K_0(\lambda)$. Să admitem, prin absurd, că $(a, b) \in \Omega_1$. Vom nota φ' derivata lui φ în raport cu π; întrucît, cu excepția unei mulțimi discrete, π este izomorfism local, φ' există și este o funcție meromorfă pe R. Baza de filtru $(\pi(\lambda), \varphi'(\lambda), \pi(\lambda), f(\lambda))$ are, în $P_1 \times \Omega_1$, un punct aderent de forma (c, u_0, a, b).

Cazul $u_0 \neq \infty$. Vom arăta că avem $Q(a, b, u_0) = P(a, b, u_0) = 0$. Într-adevăr, să presupunem că avem $Q(a, b, u_0) \neq 0$. Atunci sistemul (3.a) este olomorf pe un deschis conținînd punctul (c, u_0, a, b). Diagrama



este prelungirea analitică a unei soluții locale a lui (3.a). În virtutea lemei 5.1, condițiile teoremei 4.1 sînt îndeplinite, astfel că filtrul λ converge pe R, ceea ce este o contradicție. Astfel $Q(a, b, u_0) = 0$. În mod similar se arată că $P(a, b, u_0) = 0$, folosind sistemul (3.b) și diagrama



Urmează că $d(a, b) = 0$, $(a, b) \in A_1$, ceea ce este o contradicție.

Cazul $u_0 = \infty$. Avem $v_0 = 1/u_0 = 0$. Folosind sistemul (3.c) în cazul $p \leqslant q + 3$ (respectiv (3.d) în cazul $p \geqslant q + 3$) și diagrama corespunzătoare, se ajunge la contradicția că $\dot{Q}(a, b, 0) = b_q(a, b) = 0$ (respectiv $\dot{P}(a, b, 0) = a_p(a, b) = 0$).

Teorema este demonstrată.

7. TEOREMA B

După Lelong, pentru Y varietate analitică complexă, se numește funcție *plurisubarmonică* pe Y orice aplicație $s : Y \to [-\infty, +\infty)$, superior semicontinuă și astfel încît, pentru orice aplicație olomorfă $\tau : D_1 \to Y$ (D_1 discul unitate în C), funcția $s \circ \tau$ este subarmonică pe D_1.

LEMA 7.1. *Fie D un polidisc în C^2 (mai precis un bidisc), f o funcție olomorfă neconstantă pe D, s o funcție plurisubarmonică diferită de funcția $-\infty$ pe D, și $E(s)$ mulțimea punctelor $c \in C$ cu proprietatea că există o componentă ireductibilă N a lui $f^{-1}(c)$ astfel încît $s \mid N = -\infty$.*

Atunci $E(s)$ este polară.

Demonstrație (i) *Cazul* $f = p \mid D$, unde $p : C^2 \to C$ este proiecția canonică $(z, w) \to z$. În acest caz, $f(D)$ este un disc și, pentru orice $c \in f(D)$, mulțimea analitică $f^{-1}(c)$ este un disc și de aceea este ireductibilă. Astfel, $E(s)$ este mulțimea punctelor $c \in f(D)$ cu proprietatea că $s \mid f^{-1}(c) = -\infty$. Fie $(a, b) \in D$ astfel încît $s(a, b) \neq -\infty$. Funcția $z \to s(z, b)$, $z \in f(D)$, este subarmonică pe $f(D)$, este diferită de funcția $-\infty$ (întrucît $s(a, b) \neq -\infty$) și ia valoarea $-\infty$ în orice punct $c \in E(s)$. Astfel, $E(s)$ este polară.

(ii) *Cazul general.* Întrucît f este neconstantă, una cel puțin din derivatele parțiale de primul ordin ale lui f este $\not\equiv 0$ (ca element în $\mathcal{O}(D)$). Să presupunem, de exemplu, că $\dfrac{\partial f}{\partial w} \not\equiv 0$ și fie

$$B = \left\{ (z, w) \in D \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) = 0 \right\};$$

atunci B este analitică în D și are dimensiune complexă 1. Avem o aplicație olomorfă

$$F : D \to C^2,$$

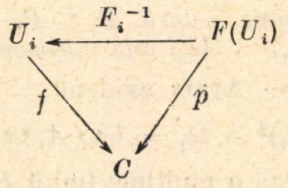
definită prin formulele

$$\begin{cases} x = f(z, w) \\ y = z \end{cases}$$

al cărei iacobian este $\dfrac{\partial f}{\partial w}$. După teorema inversării locale a aplicațiilor regulate, $F : D - B \to C^2$ este un izomorfism local, astfel că există o acoperire numărabilă a lui $D - B$ cu deschise conexe $U_i \subset D - B$, $i \geqslant 1$, astfel încît, pentru fiecare i, $F(U_i)$ este un polidisc deschis în C^2 și aplicația

$$F : U_i \to F(U_i)$$

este un izomorfism analitic F_i. După definiția lui F, avem diagrama comutativă



(unde p este proiecția canonică $(z,w) \to z$. Mulțimea analitică $U_i \cap f^{-1}(c) = F_i^{-1}(p^{-1}(c))$ este canonic izomorfă cu un disc, iar din (1) rezultă, folosind funcția $s \circ F_i^{-1}$, că mulțimea

$$E_i = \{ c \in C \mid s \mid U_i \cap f^{-1}(c) = -\infty \}$$

este polară.

Mai departe, mulțimea analitică $B \subset D$ este o reuniune numărabilă de mulțimi analitice ireductibile, B_j. Fie V_j mulțimea punctelor regulate ale lui B_j; atunci $B_j - V_j$ este o mulțime discretă și V_j este o suprafață riemanniană. Este clar că mulțimea

$$E_0 = \{ c \in C \mid \text{există } j \text{ astfel încît } f \mid B_j = c \}$$

este numărabilă.

În sfîrșit, avem

$$E(s) \subset \bigcup_{i \geqslant 0} E_i.$$

Într-adevăr, fie $c \in E(s)$ astfel încît $c \notin E_0$; atunci $B \cap f^{-1}(c)$ este o mulțime analitică 0-dimensională (deci discretă),

$$(D - B) \cap f^{-1}(c) = \bigcup_{i \geqslant 1} (U_i \cap f^{-1}(c)),$$

și există o componentă ireductibilă, N, a lui $f^{-1}(c)$ astfel încît $s \mid N = -\infty$. Întrucît N are dimensiune complexă 1 și întrucît $B \cap N \subset B \cap f^{-1}(c)$ este discretă, $(D - B) \cap N$ este o submulțime deschisă nevidă a lui N. Întrucît $(U_i)_{i \geq 1}$ este o acoperire a lui $D - B$, există i_0 astfel încît $U_{i_0} \cap N \neq \emptyset$. Dar $U_{i_0} \cap f^{-1}(c)$ este ireductibilă (fiind izomorfă cu un disc) și de aceea

$$U_{i_0} \cap N = U_{i_0} \cap f^{-1}(c).$$

Urmează că $s \mid U_{i_0} \cap f^{-1}(c) = -\infty$, adică $c \in E_{i_0}$.

Astfel, mulțimea $E(s)$, fiind conținută într-o reuniune numărabilă de mulțimi polare, este ea însăși polară și lema este complet demonstrată.

Vom folosi notațiile din paragrafele 5 și 6. Fie $A = C^2 - \Omega$, $A_2 = (P_1)^2 - C^2$ și ρ o funcție rațională neconstantă de z, w.

LEMA 7.2. *Să presupunem că există un șir s_i de funcții plurisubarmonice pe C^2, diferite de funcția $-\infty$, astfel încît*

$$A \subset \bigcup_i s_i^{-1}(-\infty).$$

Atunci există o mulțime polară $E_\rho \subset P_1$ astfel încît, pentru orice $c \in P_1 - E_\rho$, $M(c) \cap ((P_1)^2 - \Omega_1)$ este 0-dimensională.

Demonstrație. Avem evident

$$(P_1)^2 - \Omega_1 = A \cup A_1 \cup A_2.$$

Este imediat că există o mulțime finită E' în C cu proprietatea că, pentru orice $c \in C - E'$, mulțimea $A_2 \cap M(c)$ este finită.

Mai departe, mulțimea $A_1 \subset \Omega$ este analitică (și are dimensiune complexă 1 în fiecare punct) și de aceea A este o reuniune numărabilă de mulțimi analitice ireductibile, N_i. Fie E'' mulțimea punctelor $c \in C$ cu proprietatea că $\rho \mid N_i = c$ pentru cel puțin un i. Este clar că E'' este numărabilă.

Fie V_i mulțimea punctelor regulate ale lui N_i. Atunci $N_i - V_i$ este o mulțime discretă (deci numărabilă), iar V_i este o suprafață riemanniană. Urmează că, pentru orice $c \in C - E''$, $V_i \cap M(c)$ este discretă. În concluzie, pentru orice $c \in C - E''$, $A_1 \cap M(c)$ este numărabilă.

În sfîrșit, fie E''' mulțimea punctelor $c \in C$ cu proprietatea că există o componentă ireductibilă N a lui $M(c) \cap (\Omega - L)$ astfel încît $s_i \mid N = -\infty$ pentru cel puțin un i, adică

$$E''' = \bigcup_i E(s_i).$$

După lema 7.1, fiecare $E(s_i)$ este polară și deci E''' este polară. Este clar că pentru orice $c \in C - E''$, $M(c) \cap A$ este polară pe fiecare din componentele ireductibile ale lui $M(c)$ și de aceea, fiind închisă, este 0-dimensională.

Concluzia lemei este îndeplinită pentru

$$E_\rho = E' \cup E'' \cup E''' \cup \{\infty\}.$$

COROLAR. *Dacă* $\varphi = \rho \circ \Phi$ *este în poziția generală și dacă* $c \in C - E_\rho$ *atunci* $K(\lambda)$ *conține un singur punct (adică filtrul* $\Phi(\lambda)$ *este convergent).*

Demonstrație. Întrucît filtrul λ este conex și întrucît spațiul $(P_1)^2$ este compact, mulțimea $K(\lambda)$ este conexă. După teorema 6.2

$$K(\lambda) - L \subset M(c) \cap ((P_1)^2 - \Omega_1),$$

de unde, pentru $c \in C - E_\rho$, $K(\lambda)$ este 0-dimensională în virtutea lemei 7.2; în consecință, fiind conexă, $K(\lambda)$ se reduce la un singur punct.

TEOREMA B. *Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții:*

1) $A \subset \bigcup_{i \geqslant 4} s_i^{-1}(-\infty)$, *unde* s_i *sînt funcții plurisubarmonice,* $\not\equiv -\infty$, *pe* C^2;

2) *soluția* $\Phi : R \to \Omega$ *este astfel încît*

$$s_i \circ \Phi \not\equiv -\infty, \quad i \geqslant 4;$$

3) $\varphi = \rho \circ \Phi$ *este în poziție generală.*

Atunci β_φ *este reuniune numărabilă de mulțimi polare.*

Demonstrație. Întrucît mulțimea E este polară, există o funcție subarmonică generalizată $u \not\equiv -\infty$ pe C astfel încît

$$E(\rho) \subset u^{-1}(-\infty)$$

(pentru conceptul de funcție subarmonică generalizată a se vedea [5]).

Cazul $g \circ \Phi \not\equiv 0$. Vom nota:

$$\begin{aligned} t_0 &= u \circ \varphi, \\ t_1 &= \log |\, g \circ \Phi \,|, \\ t_2 &= -\log |\, \pi \,|, \\ t_3 &= -\log |\, f \,|, \\ t_i &= s_i \circ \Phi, \quad i \geqslant 4. \end{aligned}$$

Fiecare t_i, $i \geqslant 0$, este o funcție subarmonică generalizată, $\not\equiv -\infty$, pe R. Urmează că fiecare

$$\alpha_i = \{\lambda \in \beta_\varphi \mid \lim t_i(\lambda) = -\infty\}$$

este o submulțime polară a lui β_φ. Vom arăta că

$$\beta_\varphi = \bigcup_{i \geqslant 0} \alpha_i.$$

Într-adevăr, fie $\lambda \in \beta_\varphi$ și $c = \lim \varphi(\lambda)$. Dacă $c \in E_\rho$, atunci evident $\lambda \in \alpha_0$. Dacă $c \in P_1 - E_\rho$, atunci, în virtutea corolarului lemei 7.2, $\Phi(\lambda)$ converge către un punct $(a,b) \in (P_1)^2 - \Omega_1 = A \cup A_1 \cup A_2$. Dacă $(a,b) \in A_1$, atunci $g(a,b) = 0$, adică $\lim t_1(\lambda) = -\infty$, de unde $\lambda \in \alpha_1$. Dacă $(a,b) \in A_2$ atunci $a = \infty$ sau $b = \infty$, adică $\lim t_2(\lambda) = -\infty$ sau $\lim t_3(\lambda) = -\infty$, de unde $\lambda \in \alpha_2 \cup \alpha_3$. În sfîrșit, dacă $(a,b) \in A$, atunci există $i_0 \geqslant 4$ astfel încît $s_{i_0}(a,b) = -\infty$ adică $\lim t_{i_0}(\lambda) = -\infty$, de unde $\lambda \in \alpha_{i_0}$.

Astfel β_φ este o reuniune numărabilă de mulțimi polare.

Cazul $g \circ \Phi = 0$. În acest caz, folosind teorema de normalizare a mulțimilor analitice, se vede că aplicația $\Phi : R \to \Omega$ este proprie. După lema 3.1 din [5], dacă $\lambda \in \beta_\varphi$, atunci aderența lui $\Phi(\lambda)$ este conținută în $A \cup A_2$ și raționamentul de mai sus se aplică excluzînd funcția t_1.

Teorema B este complet demonstrată.

COROLAR. *Să presupunem că mulțimea* A *este conținută într-o reuniune numărabilă de mulțimi analitice de dimensiune complexă* < 2 *în* C^2 *și că* φ *este în poziție generală. Atunci* β_φ *este reuniune numărabilă de mulțimi polare.*

Demonstrație. Întrucît A este conținută într-o reuniune numărabilă de mulțimi polare, există un șir de funcții $g_i \in \mathcal{O}(C^2)$, $i \geqslant 4$, diferite de funcția 0, astfel încît

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 4} g_i^{-1}(0).$$

Condiția 1) din teorema B este îndeplinită dacă luăm $s_i = \log |g_i|$, iar condiția 3) este dată printre ipoteze. Dacă $g_i \circ \Phi \not\equiv 0$ pentru orice i, atunci toate condițiile teoremei B sînt îndeplinite și de aceea aserțiunea corolarului este adevărată. Dacă există i astfel încît $g_i \circ \Phi = 0$, atunci se aplică raționamentul folosit la demonstrația teoremei B, cazul $g \circ \Phi = 0$, și aserțiunea corolarului este din nou adevărată.

8. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ SEMIALGEBRICĂ DE ORDINUL ÎNTÎI

Să considerăm, în încheiere, ecuația diferențială

$$P_1(z,w,w') = 0, \qquad (z,w) \in \Omega, \tag{4}$$

unde P_1 este un polinom în w', de grad $\geqslant 1$, cu coeficienți $\in \Lambda = \mathcal{O}(\Omega)$.

Vom numi *soluție locală* a ecuației (4) orice funcție $\psi \in \mathcal{O}(U)$ avînd proprietățile următoare :

1) U este un deschis conex în C și $U \times \psi(U) \subset \Omega$;

2) există $z_0 \in U$ astfel încît $\dfrac{\partial P_1}{\partial w'}(z_0, \psi(z_0), \psi'(z_0)) \not\equiv 0$;

3) $P_1(z, \psi(z), \psi'(z)) = 0$, $z \in U$.

Prelungirea analitică (în raport cu Ω) a unei soluții locale se numește *soluție globală.*

Fie (R, Φ) o soluție globală a ecuației (4) și fie $\varphi = \rho \circ \Phi : R \to P_1$ o funcție rațională neconstantă pe (R, Φ).

TEOREMA 8. 1. *Să presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiții :*

1) $A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} s_i^{-1}(-\infty)$, *unde* s_i *sînt funcții plurisubarmonice,* $\not\equiv -\infty$, *pe* C^2;

2) $s_i \circ \Phi \not\equiv -\infty$, $i \geqslant 1$.

Atunci β_φ *este reuniune numărabilă de mulțimi polare (în particular* β_π *și* β_f*, cînd* $f \neq const.$*, sînt reuniuni numărabile de mulțimi polare).*

Demonstrație. Vom alege o funcție rațională σ de z, w astfel încît „aplicația rațională" $(z,w) \to (x = \rho(z,w),\ t = \sigma(z,w))$ să fie de rang diferențial complex 2. Atunci $(R, \sigma \circ \Phi, \varphi)$ este o soluție globală a unei ecuații diferențiale de forma

$$c\,u^r = P_2(z,w,u),\ u = \frac{dx}{dt},\ (z,w) \in \Omega,$$

unde $c \in \Lambda$, $c \neq 0$, r este întreg $\geqslant 1$ iar P_2 un polinom în u de grad $< r$ cu coeficienți $\in \Lambda$; în plus, ținînd seama că $\varphi \neq$ const., putem presupune că P_2 are coeficient liber $\neq 0$. Prin derivare, se vede că $(R, \sigma \circ \Phi, \varphi)$ este soluție globală a unei ecuații de forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{(cu^r)^k\, P_3(z,w,u)}{Q(z,w,u)},$$

unde k este întreg $\geqslant 0$, iar P_3 și Q sînt polinoame în u cu coeficienți $\in \Lambda$ și P_3 are coeficient liber $\neq 0$. În definitiv $(\pi, \sigma \circ \Phi, \varphi)$ este soluție a ecuației

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P(z,w,u)}{Q(z,w,u)},$$

unde $P = P_2^k P_3$ și deci P are coeficient liber $\neq 0$.

Teorema 8.1 este acum o consecință imediată a teoremei B.

COROLAR. *Să presupunem că* A *este conținută într-o reuniune numărabilă de mulțimi analitice de dimensiune complexă* < 2 *în* C^2*. Atunci* β_φ *este reuniune numărabilă de mulțimi polare (în particular,* β_π *și* β_f*, cînd* $f \neq const.$*, sînt reuniuni numărabile de mulțimi polare).*

Primită la redacție la 30 noiembrie 1962

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе, главной целью которой является доказательство результатов, высказанных в заметке [7], исследуются рациональные функции на глобальном решении (R, Φ) дифференциального уравнения вида

$$w'' = \frac{P_1(z,w,w')}{Q_1(z,w,w')},\ (z,w) \in \Omega,$$

где P_1 и Q_1 — полиномы относительно w' с голоморфными коэффициентами на открытом связном $\Omega \subset C^2$. В неуточненной формулировке основная теорема работы (обозначенная через B) утверждает, что если множество $A = C^2 - \Omega$ является достаточно „тонким"' (например : оно содержится в счетной совокупности аналитических множеств комплексной размерности < 2 в C^2) и если $\varphi : R \to P_1$ является рациональной функцией на (R, Φ), т.е. $\varphi = \rho \circ \Phi$ при ρ рациональном относительно z, w, и обладает тем свойством, что в некотором смысле находится в общем положении по отношению к рассматриваемому уравнению, то достижимая граница β_φ является счетным соединением полярных множеств и, следовательно, по теореме A из [5], φ — локально типа Bl, и в частности класса I.

RATIONAL FUNCTIONS ON GLOBAL SOLUTIONS OF HOLOMORPHIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

The main purpose of this paper is to demonstrate the results stated in the Note [7]. The author discusses the rational functions on a global solution (R, Φ) of a differential equation of the form

$$w'' = \frac{P_1(z,w,w')}{Q_1(z,w,w')}, \quad (z,w) \in \Omega,$$

where P_1 and Q_1 are polynomials in w' with holomorphic coefficients on a connected open set $\Omega \subset C^2$. In unspecified terms, the fundamental theorem (denoted by B) asserts that, if the set $A = C^2 - \Omega$ is sufficiently "thin" (for instance, contained in a numerable union of analytical sets of complex dimension < 2 in C^2) and if $\varphi : R \to P_1$ is a rational function on (R, Φ) (that is $\varphi = \rho \circ \Phi$ with ρ rational of z, w), having the property to be in a certain sense, in general position with respect to the considered equation, then the accessible boundary β_φ of φ is a numerable union of polar sets, whence by theorem A of [5], φ is local of type Bl, and in particular of class I.

BIBLIOGRAFIE

1. W. GROSS, *Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten*. Math. Ann., **78**, 332 (1918).
2. M. HEINS, *The conformal mapping of Riemann surfaces*, în „Analytic Functions", Princeton, 1960, 137–158.
3. M. JURCHESCU, *Asupra funcţiilor definite prin ecuaţii diferenţiale nealgebrice*. Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. şt. mat.-fiz., **VII**, 347–354 (1955).

4. M. JURCHESCU, *Recouvrements riemanniens définis par des équations différentielles du second ordre.* C.R. Acad. Sci. Paris, **247**, 627—629 (1957).
5. — *Suprafețe riemanniene și aplicații olomorfe.* St. cerc. mat., **12**, 575—590 (1961).
6. — *Teoria locală a funcțiilor de mai multe variabile complexe* (Expuneri în seminarul Stoilow, 1960/61 și 1962/63; va apare).
7. — *Sur la théorie des équations différentielles dans le cas analytique complexe.* C.R. Acad. Sci. Paris, **256**, 851—854 (1963).
8. T. KIMURA, *Sur les fonctions définies par les équations différentielles ordinaires du premier ordre.* Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, **7**, 65—75 (1959).
9. — *Sur la propriété d'Iversen et l'équation différentielle ordinaire du second ordre.* I. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, **8**, 63—70 (1960).
10. — *Sur la propriété d'Iversen et l'équation différentielle ordinaire du second ordre.* II. Comment. Math. Univ. Santi Pauli, **9**, 87—90 (1961).
11. Y. SATÔ, *On analytic continuation of solutions of an ordinary differential equation of the first order.* Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, **10**, 17—25 (1961).

FUNCȚII DE ESTIMAȚIE EFICIENTE PENTRU PARAMETRII UNEI FAMILII DE LANȚURI MARKOV DISCRETE STAȚIONARE[1)]

DE

D. FIRESCU

1. Considerăm o familie de lanțuri Markov simple staționare ale căror variabile pot lua oricare din valorile

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Probabilitățile de trecere $p_{ij}(\vec{\theta})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ sînt presupuse strict pozitive și depind de vectorul $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, fiind astfel elementele matricei stochastice infinite

$$\begin{pmatrix} p_{11}(\vec{\theta}) & p_{12}(\vec{\theta}) & p_{13}(\vec{\theta}) \ldots \\ p_{21}(\vec{\theta}) & p_{22}(\vec{\theta}) & p_{23}(\vec{\theta}) \ldots \\ p_{31}(\vec{\theta}) & p_{32}(\vec{\theta}) & p_{33}(\vec{\theta}) \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Avem deci

$$p_{ij}(\vec{\theta}) > 0, \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Presupunem de asemenea că sînt îndeplinite următoarele condiții:

I. Pentru orice i și j aparținînd mulțimii $\{1, 2, \ldots\}$, probabilitățile $p_{ij}(\vec{\theta})$ au derivate parțiale continue de ordinul întîi și doi în raport cu fiecare dintre coordonatele $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ ale vectorului $\vec{\theta}$;

[1)] Comunicare prezentată la „Colocviul de Teoria probabilităților", Brașov, 22–26 octombrie 1962.

II. $$\frac{\partial}{\partial \theta_\mu}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \frac{\partial}{\partial \theta_\nu}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial^2 p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\nu},$$
$$(\mu,\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

în ipoteza că seriile corespunzătoare sînt uniform convergente;

III. Seria

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}p_{ij}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

este convergentă.

Efectuăm selecția

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

după legea de probabilitate a unui lanț Markov din familia considerată, în ipoteza că probabilitatea ca x_1 să fie egal cu a_{h_r} este $p_{sh_r}(\vec{\theta})$ (s fiind dat și aparținînd ca și h_r mulțimii numerelor naturale).

Fie acum

$$x_1 = a_{h_1}, \quad x_2 = a_{h_2}, \ldots, x_n = a_{h_n}$$

cele n valori obținute în selecția efectuată și

$$\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_1(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_2(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \ldots, \bar{\theta}_k = \bar{\theta}_k(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}) \quad (1)$$

funcțiile de estimație absolut corecte respectiv pentru parametrii (coordonatele vectorului $\vec{\theta}$) $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Ne propunem să găsim condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească probabilitățile $p_{ij}(\vec{\theta})$ ($i, j = 1, 2, \ldots$) astfel ca funcțiile de estimație (1) să fie *eficiente*.

Condiții necesare. Dacă funcțiile de estimație (1) sînt eficiente, atunci se știe că matricea covariantă a variabilelor

$$\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \ldots, \bar{\theta}_k, \sum_{u=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{u-1}h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_1}, \sum_{u=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{u-1}h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_2}, \ldots,$$
$$\ldots \sum_{u=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{u-1}h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_k}$$

trebuie să fie de rangul k, adică trebuie să aibă loc relațiile

$$\sum_{u=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{u-1}h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})[\bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}) - \theta_\nu], (\mu = 1, 2, \ldots, k). \quad (2)$$

Luînd $n = 2$ și punînd

$$h_0 = s, \quad h_1 = i, \quad h_2 = j,$$

obținem :

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})[\bar{\theta}_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu] - \frac{\partial \log p_{si}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \ (\mu = 1,2,\ldots,k). \quad (3)$$

Punînd acum $i = s$ și $j = i$, relația precedentă devine

$$\frac{\partial \log p_{si}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})[\bar{\theta}_\nu(a_s, a_i) - \theta_\nu] - \frac{\partial \log p_{ss}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Înlocuind în (3), obținem

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})[\bar{\theta}_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu] - \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})[\bar{\theta}_\nu(a_s, a_i) - \theta_\nu] +$$

$$+ \frac{\partial \log p_{ss}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Aceste relații adevărate pentru orice i și j $(i, j = 1, 2, \ldots)$ se mai pot scrie sub forma

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta}) A_\nu(a_i, a_j) + B(\vec{\theta}), \ (\mu = 1, 2, \ldots, k). \quad (4)$$

Introducînd în (2), deducem prin identificare

$$\sum_{u=1}^{n} A_\nu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) = \bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n})$$

și

$$B(\vec{\theta}) = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta})\, \theta_\nu, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

astfel încît relațiile (4) devin

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} G_{\mu\nu}(\vec{\theta}) \left[A_\nu(a_i, a_j) - \frac{\theta_\nu}{n} \right], \ (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

sau

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta})[C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu], \ (\mu = 1, 2, \ldots, k), \quad (5)$$

unde

$$F_{\mu\nu}(\vec{\theta}) = \frac{G_{\mu\nu}(\vec{\theta})}{n}, \ C_\nu(a_i, a_j) = n A_\nu(a_i, a_j).$$

Rezultă deci că relațiile (5) sînt condiții necesare pe care trebuie să le îndeplinească probabilitățile $p_{ij}(\vec{\theta})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, astfel ca funcțiile de estimație (1) să fie eficiente.

Condiții suficiente. Dacă relațiile (5) sînt îndeplinite, avem

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}\right\} = \mathcal{M}\left\{\sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta})[C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu]\right\}, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

sau

$$\sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta})\, \mathcal{M}\{C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu\} = 0, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

deoarece

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}\right\} = 0, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Determinantul

$$|F_{\mu\nu}(\vec{\theta})|, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

este diferit de zero. Într-adevăr, din (6) rezultă sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta}) \sum_{u=1}^{n} \mathcal{M}\{C_\nu(a_{h_u-1}, a_{h_u}) - \theta_\nu\} = 0, \ (\mu = 1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

unde considerăm ca necunoscute pe

$$\sum_{u=1}^{n} \mathcal{M}\{C_\nu(a_{h_u-1}, a_{h_u}) - \theta_\nu\}, \ (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Ținînd seama de rezultatele stabilite, iar pe de altă parte că funcțiile de estimație (1) sînt absolut corecte, avem

$$\mathcal{M}\{\bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n})\} = \sum_{u=1}^{n} \mathcal{M}\{A_\nu(a_{h_u-1}, a_{h_u})\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{n} \mathcal{M}\{C_\nu(a_{h_u-1}, a_{h_u})\} = \theta_\nu, \ (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

De aici rezultă că

$$\sum_{u=1}^{n} \mathcal{M}\{C_\nu(a_{h_u-1}, a_{h_u}) - \theta_\nu\} = 0, \ (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

adică sistemul de ecuații (7) nu poate avea alte soluții decît soluția banală și deci determinantul lui trebuie să fie diferit de zero.

O consecință imediată a acestui rezultat este că și sistemul de ecuații (6) admite numai soluția banală

$$\mathcal{M}\{C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu\} = 0, \ (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{9}$$

Covarianța variabilelor

$$\sum_{u=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

este prin definiție egală cu

$$\operatorname{cov}\left\{\sum_{u=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\right\} =$$

$$= \sum_{h_1=1}^{\infty}\sum_{h_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=1}^{\infty}\left[\sum_{u=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\right] p_{s\,h_1}(\vec{\theta})\, p_{h_1\,h_2}(\vec{\theta}) \cdots$$

$$\cdots p_{h_{n-1}\,h_n}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

sau

$$\operatorname{cov}\left\{\sum_{u=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\right\} =$$

$$= \sum_{u=1}^{n}\left[\sum_{h_1=1}^{\infty}\sum_{h_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\right] p_{s\,h_1}(\vec{\theta})\, p_{h_1\,h_2}(\vec{\theta}) \cdots$$

$$\cdots p_{h_{n-1}\,h_n}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{10}$$

Derivînd în raport cu θ_ν relațiile

$$\sum_{h_u=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta}) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

obținem

$$\sum_{h_u=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu} p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta}) =$$

$$= -\sum_{h_u=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu\, \partial \theta_\nu} p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

sau, în baza relațiilor (5) și (9), putem să scriem

$$\sum_{h_u=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu} p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta}) =$$

$$= -\sum_{h_u=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=1}^{\kappa} \frac{\partial F_{\mu\nu}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\left[C_\nu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\nu\right] - F_{\mu\nu}(\vec{\theta})\right\} p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta}) =$$

$$= F_{\mu\nu}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{11}$$

Rezultă deci că expresia covarianței (10) este

$$\operatorname{cov}\left\{\sum_{u=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{u-1}\,h_u}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \sum_{v=1}^{n}\frac{\partial \log p_{h_{v-1}\,h_v}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu}\right\} = n F_{\mu\nu}(\vec{\theta}), (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{12}$$

Pe de altă parte, avînd în vedere relațiile

$$\bar{\theta}_\mu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}) = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} C_\mu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}), (\mu = 1, 2, \ldots, k),$$

covarianța variabilelor

$$\bar{\theta}_\mu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

este

$$\operatorname{cov}\{\bar{\theta}_\mu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n})\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\left\{\sum_{h_1=1}^{\infty}\sum_{h_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=1}^{\infty}[C_\mu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\mu][C_\nu(a_{h_{v-1}}, a_{h_v}) - \right.$$

$$\left. - \theta_\nu] p_{s_{h_1}}(\vec{\theta}) p_{h_1 h_2}(\vec{\theta}) \ldots p_{h_{n-1} h_n}(\vec{\theta})\right\} (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

sau, potrivit relațiilor (8), avem

$$\operatorname{cov}\{\bar{\theta}_\mu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \bar{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n})\} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{u=1}^{n}\left\{\sum_{h_1=1}^{\infty}\sum_{h_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=1}^{\infty}[C_\mu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\mu][C_\nu(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \right.$$

$$\left. - \theta_\nu] p_{s_{h_1}}(\vec{\theta}) p_{h_1 h_2}(\vec{\theta}) \ldots p_{h_{n-1} h_n}(\vec{\theta})\right\}, (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{13}$$

Folosind acum relațiile (5) și (11), obținem sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k} F_{\mu\alpha}(\vec{\theta}) F_{\nu\beta}(\vec{\theta}) \sum_{h_u=1}^{\infty}[C_\alpha(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\alpha][C_\beta(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) -$$

$$- \theta_\beta] p_{h_{u-1} h_u}(\vec{\theta}) = F_{\mu\nu}(\vec{\theta}), (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{14}$$

unde considerăm ca necunoscute pe

$$\sum_{h_u=1}^{\infty}[C_\alpha(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\alpha][C_\beta(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\beta] p_{h_{u-1} h_u}(\vec{\theta}), (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k).$$

Acest sistem de ecuații are o soluție unică, deoarece determinantul

$$|F_{\mu\alpha}(\vec{\theta}) F_{\nu\beta}(\vec{\theta})|, (\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

este diferit de zero. Se verifică ușor că soluția sistemului (14) este

$$\sum_{h_u=1}^{\infty} [C_\alpha(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\alpha][C_\beta(a_{h_{u-1}}, a_{h_u}) - \theta_\beta] p_{h_{u-1}h_u}(\vec{\theta}) =$$

$$= \overset{-1}{F}_{\alpha\beta}(\vec{\theta}), (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k),$$

care introdusă în expresia covarianței (13) ne dă

$$\operatorname{cov}\{\overline{\theta}_\mu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n}), \overline{\theta}_\nu(a_{h_1}, a_{h_2}, \ldots, a_{h_n})\} = \frac{1}{n}\overset{-1}{F}_{\mu\nu}(\theta). \qquad (15)$$

În sfîrșit, comparînd expresiile celor două covariațe (12) și (15), se vede că elipsoidul de concentrație al funcțiilor de estimație (1) coincide cu elipsoidul de concentrație minimă al dispersiei și deci aceste funcții de estimație sînt eficiente.

Rezultă astfel că relațiile (5) sînt și condiții suficiente pe care trebuie de asemenea să le îndeplinească probabilitățile $p_{ij}(\vec{\theta})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ pentru ca funcțiile de estimație (1) să fie eficiente.

2. Considerăm o familie de lanțuri Markov multiple de ordinul s staționare, ale căror variabile pot lua oricare din valorile

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Fie mulțimea

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

și produsul cartezian

$$J_s = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{s \text{ ori}}.$$

Probabilitățile fundamentale

$$\varphi(a_i \mid \alpha; \vec{\theta}) = P_r[X_n = a_i \mid \{X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots, X_{n-s}\} = \alpha; \vec{\theta}],$$

$$(\alpha \in J_s, \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(a_i \mid \alpha; \vec{\theta}) = 1),$$

sau sub forma explicită

$$\varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta}) = P_r[X_n = a_{i_{s+1}} \mid X_{n-1} = a_{i_s}, X_{n-2} =$$

$$a_{i_{s-1}}, \ldots, X_{n-s} = a_{i_1}; \vec{\theta}],$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{s+1} = 1, 2, \ldots; \sum_{i_{s+1}=1}^{\infty} \varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta}) = 1),$$

presupuse strict pozitive, depind de vectorul

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k).$$

Dacă scriem acum lanțurile

$$(X) = X_i, \ (i = 1, 2, \ldots),$$

din familia considerată sub forma

$$(Y) = Y_j, (j = 1, 2, \ldots),$$

unde $Y_j = \{X_{j+1}, X_{j+2}, \ldots, X_{j+s}\}$, se vede că sub această formă, lanțurile multiple de ordinul s se reduc la lanțuri simple, pentru care valorile luate de variabilele lor sînt mulțimile

$$\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s}\}, (j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots).$$

Notînd cu $\Phi(j_1, j_2, \ldots, j_s \mid i_1, i_2, \ldots, i_s; \vec{\theta})$ probabilitățile de trecere ale lanțurilor simple $(Y) = Y_j \ (j = 1, 2, \ldots)$, adică

$$\Phi(j_1, j_2, \ldots, j_s \mid i_1, i_2, \ldots, i_s; \vec{\theta}) = P_r(Y_n = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s} \mid Y_{n-1} =$$

$$= \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}\}; \vec{\theta}], (i_1, i_2, \ldots, i_s, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots;$$

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_s = 1}^{\infty} \Phi(j_1, j_2, \ldots, j_s \mid i_1, i_2, \ldots, i_s; \vec{\theta}) = 1),$$

care depind evident de vectorul $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, avem

$$\Phi(j_1, j_2, \ldots, j_s \mid i_1, i_2, \ldots, i_s; \vec{\theta}) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta}), & \text{dacă } j_1 = i_2, j_2 = i_3, \ldots, j_s = i_{s+1} \\ 0, & \text{în toate celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Presupunem de asemenea că pentru familia de lanțuri simple $(Y) = Y_j \ (j = 1, 2, \ldots)$ sînt îndeplinite condițiile I, II și III indicate la punctul **1**.

Efectuăm selecția

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

după legea de probabilitate a unui lanț Markov din această familie.

Fie $y_j = \alpha_j = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_s}\} \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ valorile obținute în selecția efectuată și $\bar{\theta}_h = \bar{\theta}_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \ (h = 1, 2, \ldots, k)$ funcțiile de estimație absolut corecte respectiv pentru parametrii $\theta_h (h = 1, 2, \ldots, k)$.

În sfîrșit, considerînd cazul lanțului simplu cu probabilitățile de trecere $\varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta})$ presupuse strict pozitive și repetînd demonstrația făcută pentru acest lanț, rezultă că relațiile

$$\frac{\partial \log \varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta})[C_\nu(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}\}, a_{i_{s+1}}) - \theta_\nu]$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots, k; \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_s}\} \in J_s, i_{s+1} = 1, 2, \ldots)$$

sînt condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească probabilitățile fundamentale $\varphi(i_{s+1} \mid i_s, i_{s-1}, \ldots, i_1; \vec{\theta})$ astfel ca funcțiile de estimație absolut corecte $\bar{\theta}_h$ $(h = 1, 2, \ldots, k)$ respectiv pentru parametrii θ_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$ să fie eficiente.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1962

ЭФФЕКТИВНЫЕ ФУНКЦИИ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ СЕМЕЙСТВА ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

РЕЗЮМЕ

Рассмотрим семейство марковских простых стационарных цепей, переменные которых могут принимать любые из значений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Вероятности перехода $p_{ij}(\vec{\theta})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ предполагаются строго положительными и зависят от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Имеет место, следовательно:

$$p_{ij}(\vec{\theta}) > 0, \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Предположим также, что выполняются следующие условия:

I. Для любого принадлежащего множеству $\{1,2,\ldots\}$ i и j, вероятности $p_{ij}(\vec{\theta})$ имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков по отношению к каждой из координат $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ вектора $\vec{\theta}$.

$$\text{II.} \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\nu},$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

в предположении, что соответствующие ряды сходятся равномерно.

III. Ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu} p_{ij}(\vec{\theta}), \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

сходится.

При этих условиях доказывается, что функции отбора $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \ldots, \bar{\theta}_k$, рассматриваемые как совершенно корректные функции оценки соответственно для параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, становятся *эффективными* тогда и только тогда, когда вероятности перехода

$$p_{ij}(\vec{\theta})$$

удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta}) \, [C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu]. \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k)$$

Полученные результаты обобщаются затем и на случай семейств марковских цепей, множественных, порядка s, стационарных, со счетным множеством состояний.

FONCTIONS D'ESTIMATION EFFICIENTES POUR LES PARAMÈTRES D'UNE FAMILLE DE CHAÎNES DE MARKOV DISCRÈTES, STATIONNAIRES

RÉSUMÉ

Considérons une famille de chaînes de Markov simples, stationnaires dont les variables peuvent prendre l'une quelconque des valeurs

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Les probabilités de passage $p_{ij}(\vec{\theta})$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ sont supposées strictement positives et dépendent du vecteur $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$. Nous avons donc

$$p_{ij}(\vec{\theta}) > 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

Supposons également que sont remplies les conditions suivantes:-

I. Pour tout i et j appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \ldots\}$ les probabilités $p_{ij}(\vec{\theta})$ ont des dérivées partielles continues, d'ordre un et deux, par rapport à chacune des coordonnées $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ du vecteur $\vec{\theta}$.

II. $$\frac{\partial}{\partial \theta_\mu} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(\vec{\theta}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta_\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu \, \partial \theta_\nu},$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

dans l'hypothèse que les séries correspondantes sont uniformément convergentes.

III. La série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} \cdot \frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\nu} p_{ij}(\vec{\theta}) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k)$$

est convergente.

Dans ces conditions, l'auteur démontre que les fonctions de sélection

$$\overline{\theta}_1, \overline{\theta}_2, \ldots, \overline{\theta}_k,$$

considérées comme des fonctions d'estimation absolument correctes, respectivement pour les paramètres

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k,$$

deviennent *efficientes*, si, et seulement si, les probabilités de passage $p_{ij}(\vec{\theta})$ satisfont aux relations

$$\frac{\partial \log p_{ij}(\vec{\theta})}{\partial \theta_\mu} = \sum_{\nu=1}^{k} F_{\mu\nu}(\vec{\theta}) [C_\nu(a_i, a_j) - \theta_\nu] \quad (\mu = 1, 2, \ldots, k).$$

Les résultats obtenus seront ensuite également étendus au cas d'une famille de chaînes de Markov multiples, d'ordre s, stationnaires, avec un ensemble d'états dénombrable.

BIBLIOGRAFIE

1. G. MIHOC, *Über verschiedene Ausdehnungen des Poissonschen Gesetzes auf endliche konstante Markoffsche Ketten* în „Bericht über die Tagung *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*", Berlin, 1954.

2. G. MIHOC, D. FIRESCU, *Funcții de estimație pentru parametrii unei distribuții Markov cu densități de probabilitate.* Analele Universității București, Seria șt. nat., *22* (1959).

3. D. FIRESCU, *Fonctions d'estimation pour les probabilités fondamentales d'une chaîne de Markoff multiple, homogène, d'ordre fini,* Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., **2(50)**, *4* (1958).

ASUPRA METODEI MONTE-CARLO DE EVALUARE A INTEGRALELOR[1)]

DE

ŞTEFAN N. BERŢI

În această lucrare vom studia problema micşorării dispersiei în metoda Monte-Carlo. Fie ξ o variabilă aleatoare de distribuţie uniformă pe $[0,1]$. Dacă $f(x)$ este o funcţie integrabilă Riemann pe $[0,1]$, atunci variabila aleatoare $f(\xi)$ va fi un estimator al integralei

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

deoarece aşteptarea matematică a lui $f(\xi)$ va fi

$$Ef(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}F(x) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = I.$$

S-a ţinut seama de funcţia de repartiţie a lui ξ:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

O transformare de funcţie T este estimatoare dacă $ET f(\xi) = I$. Astfel transformarea

$$U_N f(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{\xi + j}{N}\right)$$

este estimatoare, deoarece

$$EU_N f(\xi) = I.$$

[1)] Comunicare prezentată la Colocviul de Teoria probabilităţilor, Braşov, 22—26 octombrie 1962.

Se arată uşor că T şi T_1 fiind transformări estimatoare, produsul $T_1 T$ în sensul

$$T_1 Tf = T_1(Tf)$$

va fi de asemenea o transformare estimatoare. Hammersley şi Morton au pus problema aflării unor transformări de funcţii, astfel încît dispersia să fie micşorată.

Dacă se presupune $f(x)$ de m ori derivabilă, cu derivata de ordin m continuă, atunci după formula lui Euler-Mac Laurin, pentru dispersia lui $U_N f(\xi)$ vom avea expresia

$$\sigma^2 U_N f(\xi) = \sum_{\mu,\nu\geqslant 1}^{\mu+\nu\leqslant m} \frac{(-1)^{\mu-1}\cdot \Delta^{(\mu-1)}f.\ \Delta^{(\nu-1)}f.\ B_{\mu+\nu}}{(\mu+\nu)!\ N^{\mu+\nu}} + o\left(\frac{1}{N^m}\right),$$

unde $\Delta^{(k)}f$ este diferenţa derivatei de ordinul k a lui f pe $[0,1]$ iar B_k este al k-lea număr al lui Bernoulli.

Folosind formulele

$$\Delta^{(m)}\ U_N f(x) = \frac{1}{N^{m+1}}\ \Delta^{(m)} f(x),\ \Delta^{(m)}\ U_N f(1-x) = \frac{(-1)^{m+1}}{N^{m+1}}\ \Delta^{(m)} f(x),$$

se consideră estimatori de forma

$$H_M f(x) = \sum_{l=1}^{M+1} \alpha_l\ U_l f(x) \tag{2}$$

şi

$$K_M f(x) = \sum_{l=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{\beta_l}{2}\ [U_l f(x) + U_l f(1-x)] \quad (M \text{ impar}) \tag{3}$$

şi se determină $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{M+1}$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\frac{M+1}{2}}$ astfel încît

$$EH_M f(x) = I,\ \Delta^{(j)} H_M f(x) = 0\ (j = 0, 1, 2, \ldots, M-1),$$

respectiv

$$EK_M f(x) = I,\ \Delta^{(j)} H_M f(x) = 0\ (j = 0, 1, 2, \ldots, M-1).$$

Pentru determinarea coeficienţilor α_l vom avea de rezolvat sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{M+1} \frac{1}{i^j}\ \alpha_i = \delta_{0,j} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, M)$$

care are soluţia

$$\alpha_k = \frac{(-1)^{k+M+1}\cdot k^M}{(k-1)!\,(M+1-k)!}\ (k = 1, 2, 3, \ldots, M+1).$$

Pentru a determina coeficienţii β_l vom avea sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{1}{i^{2j}}\ \beta_i = \delta_{0,j}\left(j = 0, 1, 2, \ldots, \frac{M-1}{2}\right)$$

care are soluția

$$\beta_k = (-1)^{\frac{2k+M+1}{2}} \frac{2k^{M+1}}{\left(\frac{M+1}{2}+k\right)!\left(\frac{M+1}{2}-k\right)!} \left(k = 1, 2, \ldots, \frac{M+1}{2}\right).$$

Dispersiile variabilelor aleatoare $U_N H_M f(\xi)$ și $U_N K_M f(\xi)$ vor fi

$$\sigma^2 U_N H_M f(\xi) = h_M \cdot \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot B_{2M+2}}{N^{2M+2} \cdot (2M+2)!} + o\left(\frac{1}{N^{M+1}}\right) \tag{4}$$

$$\sigma^2 U_N K_M f(\xi) = k_M \cdot \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot B_{2M+2}}{N^{2M+2} \cdot (2M+2)!} + o\left(\frac{1}{N^{M+1}}\right), \tag{5}$$

unde

$$h_M = \left(\sum_{l=1}^{M+1} \frac{(-1)^{l+M+1}}{l!(M+l-1)!}\right)^2 \qquad (M \text{ impar})$$

și

$$k_M = 4 \sum_{l=1}^{\frac{M+1}{2}} \frac{(-1)^{l+\frac{M+1}{2}}}{\left(\frac{M+l}{2}-1\right)!\left(\frac{M+l}{2}+1\right)!}.$$

În lucrarea [2] se află expresiile efective ale lui

$$H_i, h_i \ (i = 1, 2, 3) \text{ și } K_j, k_j \ (j = 1, 3, 5, 7).$$

Folosind formula asimptotică pentru numerele lui Bernoulli de ordin par

$$B_{2k} \sim 2\,(2k)!\,(2\pi)^{-2k}$$

pentru valori mari ale lui M, vom avea următoarele expresii asimptotice ale dispersiilor respective:

$$U_N H_M f(\xi) \sim \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot h_M}{(2\pi N)^{2M+2}}, \quad U_N K_M f(\xi) \sim \frac{(\Delta^{(M)} f)^2 \cdot k_M}{(2\pi N)^{2M+2}}.$$

Primită la redacție la 10 decembrie 1962

О МЕТОДЕ МОНТЕ-КАРЛО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача об уменьшении дисперсии в вычислении интегралов вида (1) методом Монте-Карло, с помощью функциональных преобразований вида (2) и (3). После установления выражений коэффициентов α и β в этих преобразованиях, даются выражения (4) и (5) для дисперсии, а также их асимптотическая форма.

SUR LA MÉTHODE DE MONTE-CARLO POUR L'ÉVALUATION DES INTÉGRALES

RÉSUMÉ

L'auteur traite le problème de la diminution de la dispersion dans l'évaluation des intégrales de la forme (1) par la méthode dite de Monte-Carlo, par les transformations des fonctions de la forme (2) et (3). Après avoir établi les expressions des coefficients α et β de ces formes, il donne les expressions (4) et (5) de la dispersion, ainsi que leur forme asymptotique.

BIBLIOGRAFIE

1. В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов.* Государственное издательство, Москва, 1959.
2. Pierre-Jean Laurent, *Remarque sur l'évaluation d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo.* C. R. Acad. Sci. Paris, **253**, *4*, 610–612 (1960).

CERCETĂRI ASUPRA MIȘCĂRII SUBSONICE ÎN JURUL UNUI OBSTACOL SITUAT ÎNTR-UN CANAL

DE

SIMONA POPP

1. Cercetările referitoare la mișcarea subsonică a unui fluid perfect, compresibil, într-un canal, în jurul unui cilindru circular sau aproape circular, s-au efectuat, pînă în prezent, pe două căi : cu metode de aproximare directe și cu metode de aproximare hodografice. În prima categorie se înscrie studiul făcut de E. Lamla [1] cu metoda Janzen-Rayleigh și acela a lui Z. Hasimoto [2] cu metoda lui Imai. În a doua categorie, se situează cercetările lui Suzuki pe care noi nu le-am putut consulta, dar se găsesc menționate în lucrarea lui Hasimoto citată mai sus, precum și cercetările noastre anterioare [3], [4] în care se utilizează metoda de aproximare hodografică a lui Ciaplîghin sub cele trei variante : 1° varianta Ciaplîghin-Demtchenko, 2° varianta Kármàn-Tsien și 3° varianta Caius Iacob.

În lucrarea de față, se studiază problema enunțată, cu o metodă de aproximare directă, prezentată de B. M. Kiselev într-o culegere de cercetări teoretice de aerodinamică [5].

Kiselev a aplicat metoda sa la studiul mișcării subsonice în jurul unui cilindru circular în fluid nelimitat.

În cele ce urmează, vom aplica aceeași metodă la mișcarea unui fluid compresibil în canal, în jurul unui cilindru circular.

Iată, pe scurt, în ce constă metoda lui Kiselev.

Se consideră formula care generalizează, pentru fluidul compresibil, pe aceea dată de Ciaplîghin, referitoare la determinarea forțelor care acționează asupra unui corp, într-un fluid perfect, incompresibil.

Această formulă este :

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{i}R_x + R_y) = -\frac{\rho V^2}{2}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}z + S\,\mathrm{d}\bar{z}, \tag{1.1}$$

în care R_x, R_y sînt componentele rezultantei forțelor care acționează asupra conturului care mărginește corpul, V și θ sînt respectiv mărimea

și unghiul pe care-l face viteza cu axa Ox — care indică direcția generală a curentului la infinit — ρ este masa specifică, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ iar $S = p + \frac{\rho V^2}{2}$, p fiind presiunea.

Expresia (1.1) fiind o diferențială totală exactă, se deduc următoarele relații:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho V^2 e^{-2i\theta})}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial (2S)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho V^2 e^{2i\theta})}{\partial z} + \frac{\partial (2S)}{\partial \bar{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Considerînd mișcarea adiabatică, avem

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \rho_0 \rho(\lambda), \\ p &= p_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = p_0 p(\lambda), \end{aligned} \tag{1.3}$$

cu $\lambda = \frac{V}{V^*}$, V^* fiind viteza critică [6].

Introducînd notația

$$\lambda^2 \rho(\lambda) = \tilde{\lambda}^2 \tag{1.4}$$

și avînd în vedere expresia $S = p + \frac{\rho V^2}{2} = p_0 \rho(\lambda) \left(1 + \frac{\lambda^2}{1 + \gamma}\right)$, prima ecuație (1.2) se transformă în

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}^2 e^{-2i\theta}}{\partial \bar{z}} + \frac{\gamma + 1}{\gamma} \frac{\partial \rho(\lambda) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma + 1}\right)}{\partial z} = 0. \tag{1.5}$$

A doua ecuație (1.2) va deveni conjugata acesteia.

Observînd că expresia $\chi(\lambda) = \rho(\lambda) \left(1 + \frac{\lambda^2}{\gamma + 1}\right)$ care figurează în ecuația (1.5) ia valori foarte apropiate de unitate, cînd λ variază între zero și unu, în special pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}5$ ($\lambda = 0$, $\chi(\lambda) = 1$; $\lambda = 0{,}5$, $\chi(\lambda) = 0{,}9927$), Kiselev o consideră aproximativ constantă și deduce astfel din (1.5)

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}^2 e^{-2i\theta}}{\partial \bar{z}} = 0, \tag{1.6}$$

deci expresia $\tilde{\lambda} e^{-i\theta}$ este o funcție analitică depinzînd numai de z.

Relația (1.6) este însă, riguros, valabilă pentru mișcarea unui fluid incompresibil, după cum se poate constata din expresia S.

Prin urmare, după Kiselev, corecția de compresibilitate se poate determina, cu o bună aproximație, fără a schimba variația unghiului de înclinare al vectorului viteză, exprimînd coeficientul vitezei λ din fluidul compresibil, în funcție de coeficientul vitezei $\tilde{\lambda}$ corespunzător unei mișcări incompresibile, convenabil aleasă, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Cum λ este funcție de $\tilde{\lambda}$ conform relației (1.4), $\chi(\lambda)$ se poate reprezenta ca o serie de puteri de $\tilde{\lambda}$, sub forma

$$\chi = 1 + a_1 \tilde{\lambda}^2 + a_2 \tilde{\lambda}^4 + \dots \tag{1.7}$$

din care este suficient să se considere, pentru practică [5], numai polinomul

$$\chi = 1 - a \tilde{\lambda}^6, \text{ în care } a = 0{,}4. \tag{1.8}$$

Ținînd seama de valoarea $\gamma = 1{,}4$ și de relația (1.8), ecuația (1.5) se poate scrie astfel

$$\frac{\partial \tilde{\lambda} e^{-i\theta}}{\partial \bar{z}} = 0{,}343 \frac{e^{i\theta}}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial \tilde{\lambda}^6}{\partial z}. \tag{1.9}$$

Pentru obținerea primei aproximații se înlocuiește, în membrul drept al ecuației (1.9), $\tilde{\lambda} e^{-i\theta}$ cu viteza complexă corespunzătoare din curentul incompresibil, în prezența aceluiași corp, $\bar{w} = \tilde{\lambda}_0 e^{-i\theta_0}$, $\bar{w}$ fiind o funcție analitică de variabila z.

În acest mod se obține, ca primă aproximație, următoarea soluție a ecuației (1.9):

$$\tilde{\lambda}_1 e^{-i\theta_1} = 0{,}343 \frac{1}{\tilde{\lambda}_0 e^{-i\theta_0}} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z_0}^{\bar{z}} \tilde{\lambda}_0^6 \, d\bar{z} + \Phi_1(z), \tag{1.10}$$

unde $\Phi_1(z)$ este o funcție analitică arbitrară de z.

Observînd că $\tilde{\lambda}_0^6 = \bar{w}^3(z)\, w^3(\bar{z})$ și luînd $\Phi_1(z) = \bar{w}(z) + \Phi_2(z)$, după o ușoară prelucrare a ecuației (1.10) Kiselev obține în definitiv, pe conturul corpului, relația

$$\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_0} = 1 + 1{,}028 \left[\mathcal{R}e \frac{d\bar{w}}{dz} \int_{z_0}^{\bar{z}} w^3 \, d\bar{z} + \mathcal{R}e\, \Phi(z) \right], \tag{1.11}$$

în care $\Phi(z)$ este aleasă ca o funcție analitică satisfăcînd pe contur condiția

$$\mathcal{I}m\, \Phi(z) = - \mathcal{I}m \frac{d\bar{w}}{dz} \int_{z_0}^{\bar{z}} w^3 \, d\bar{z} \tag{1.12}$$

și anulîndu-se la infinit.

O dată determinat $\tilde{\lambda}$ din (1.11), se calculează apoi valorile lui λ cu ajutorul relației (1.4).

2. Metoda expusă o vom aplica la găsirea distribuției vitezelor pe un obstacol circular de rază b, plasat în curent compresibil, într-un canal cu pereții paraleli, de lărgime a.

Potențialul complex corespunzător mișcării incompresibile în jurul aceluiași obstacol se exprimă astfel [7]:

$$f(z) = \tilde{\lambda}_\infty \left\{ z + \frac{\pi b^2}{a} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^2 \right] \operatorname{cth} \frac{\pi z}{a} \right\}. \tag{2.1}$$

De fapt, acest potențial complex corespunde unui obstacol cvasi-circular alungit în direcția axei absciselor, dar cum diferența dintre cele două diametre extreme este foarte mică, acest obstacol se asimilează de obicei cu un cerc.

Mărginindu-ne în dezvoltarea în serie după puterile lui $\frac{\pi b}{a}$ la termenii de gradul doi, putem scrie potențialul $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \tilde{\lambda}_\infty \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left(z + \frac{b^2}{z} \right), \tag{2.2}$$

unde $\tilde{\lambda}_\infty$ este coeficientul obținut din relația (1.4) pentru un λ_∞ dat, care la rîndul său se exprimă în funcție de viteza V_∞ conform definiției (1.3).

Păstrînd aceeași aproximație, viteza complexă dedusă din (2.1) va fi

$$\bar{w} = \tilde{\lambda}_\infty \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{b^2}{z^2} \right). \tag{2.3}$$

De aici, făcînd calculul pentru expresiile care figurează în relația (1.13), se obține

$$\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}z} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} w^3 \, \mathrm{d}\bar{z} = 2 b^2 \tilde{\lambda}_\infty^4 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left(\frac{\bar{z}}{z^3} + \frac{3 b^2}{z^3 \bar{z}} - \frac{b^4}{z^3 \bar{z}^3} + \frac{b^6}{\bar{z}^5 z^3} \right). \tag{2.4}$$

Ceea ce provine de la limita inferioară a integralei este o funcție analitică de z care se poate introduce în funcția arbitrară $\Phi(z)$.

Pe cercul de rază b, făcînd $z = b e^{i\varphi}$ expresia (2.4) devine

$$\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}z} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} w^3 \, \mathrm{d}\bar{z} = 2 \tilde{\lambda}_\infty^4 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left[-1 + 3 \frac{1}{5} \cos 2\varphi + \cos 4\varphi - \right.$$
$$\left. - i \left(2 \frac{4}{5} \sin 2\varphi + \sin 4\varphi \right) \right]. \tag{2.5}$$

Prin urmare, funcția analitică $\Phi(z)$ care se determină cu condiția (1.12) va fi de forma

$$\Phi(z) = -2 \tilde{\lambda}_\infty^4 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left(2 \frac{4}{5} \frac{b^2}{z^2} + \frac{b^4}{z^4} \right). \tag{2.6}$$

Așadar,

$$\mathcal{R}e \, \Phi(z) = -2 \tilde{\lambda}_\infty^4 \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 b^2}{a^2} \right) \left(2 \frac{4}{5} \cos 2\varphi + \cos 4\varphi \right). \tag{2.7}$$

Relația (1.11) devine, ținînd seama de expresiile (2.5) și (2.7),

$$\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_0} = 1 - 2{,}056\,\tilde{\lambda}_\infty^4\left(1 + \frac{4}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\cos 2\varphi\right).$$

Înlocuind pe $\tilde{\lambda}_0$ cu valoarea $2\tilde{\lambda}_\infty\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)|\sin\varphi|$, corespunzătoare fluidului incompresibil, se obține în definitiv,

$$\tilde{\lambda} = 2\,\tilde{\lambda}_\infty\,|\sin\varphi|\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2} - 2{,}056\,\tilde{\lambda}_\infty^4\left(1 - \frac{2}{5}\cos 2\varphi\right)\left(1 + \frac{5}{3}\frac{\pi^2 b^2}{a^2}\right)\right\}. \tag{2.8}$$

Această formulă permite să se calculeze, efectiv, valorile lui λ pe obstacol, ținînd seama de relațiile de legătură (1.4) între λ și $\tilde{\lambda}$, de expresia $\rho(\lambda)$ din (1.3) precum și de tabelele numerice din lucrarea lui Kiselev.

Comparînd rezultatele obținute prin metoda lui Kiselev, cu acelea care se deduc din calculele efectuate de Lamla pentru aceeași problemă, se constată că se găsesc valori foarte apropiate.

În tabela alăturată dăm aceste rezultate, pentru valorile corespunzătoare vitezei maxime pe obstacol, calculate cu ambele metode, pentru cîteva valori ale raportului $\frac{b}{a}$:

	$\lambda_\infty = 0{,}2$	
$\frac{b}{a}$	$\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$ (Kiselev)	$\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$ (Lamla)
$\frac{1}{4}$	2,5025	2,4993
$\frac{1}{10}$	2,1165	2,1126
$\frac{1}{20}$	2,0635	2,0573
$\frac{1}{100}$	2,0460	2,0396

Totodată, pe baza calculelor numerice efectuate se dau graficele alăturate.

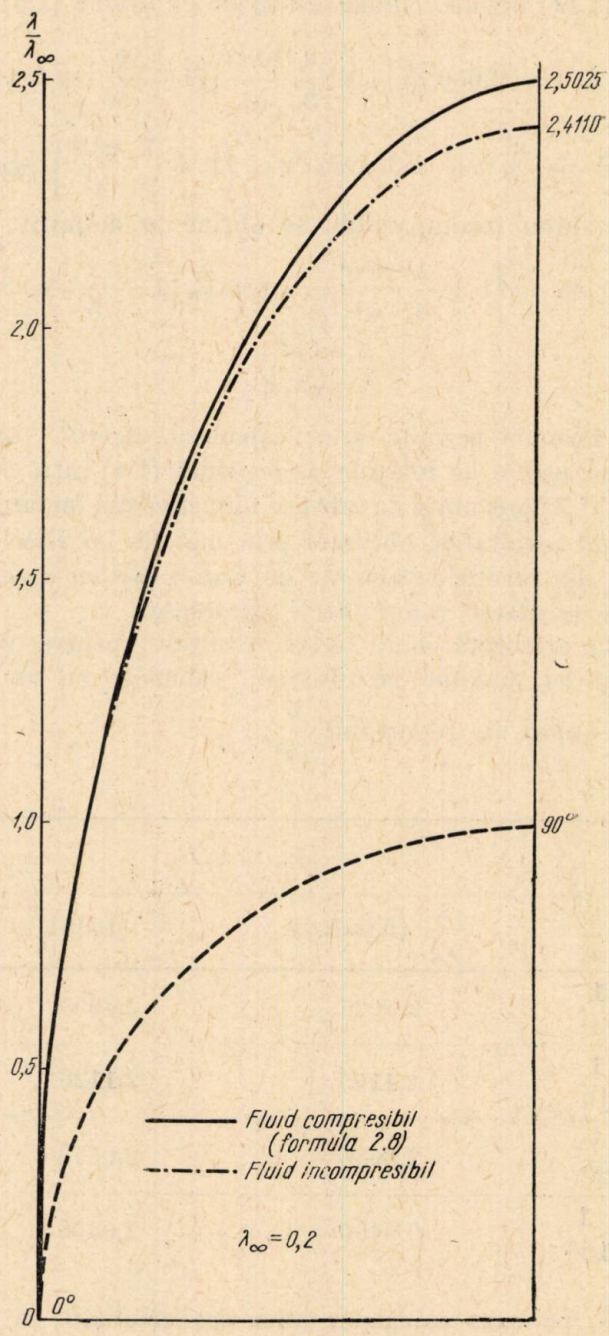

$\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
2,5025
2,4110
90°
0°
Fluid compresibil
(formula 2.8)
Fluid incompresibil
$\lambda_\infty = 0,2$

Fig. 1

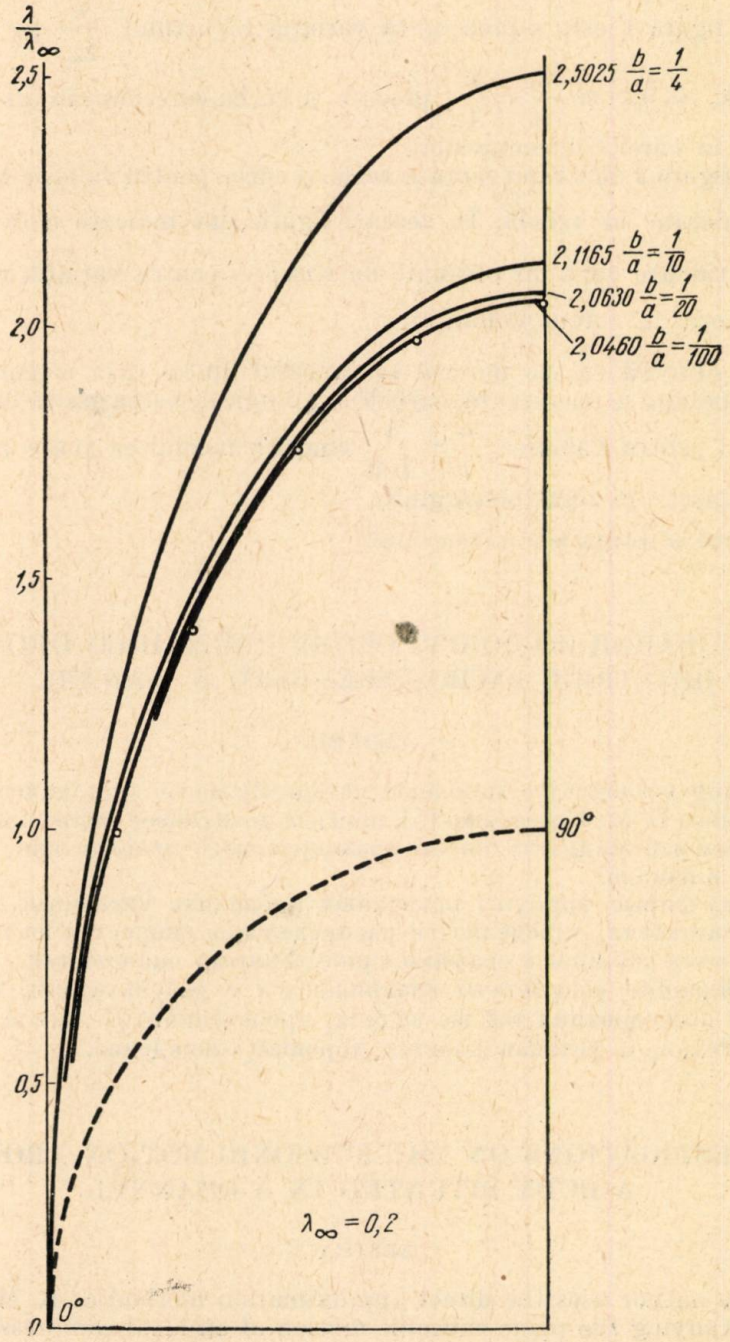

λ/λ∞
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
0°
90°
2,5025 b/a = 1/4
2,1165 b/a = 1/10
2,0630 b/a = 1/20
2,0460 b/a = 1/100
λ∞ = 0,2

Fig. 2

În figura 1 este reprezentată variația raportului $\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$ pe obstacol, pentru $\lambda_\infty = 0{,}2$ și $\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$, precum și curba corespunzătoare aceluiași obstacol în curent incompresibil.

În figura 2 sînt reprezentate aceleași curbe pentru valorile raportului $\frac{b}{a}$ considerate în tabelă. În aceeași figură sînt indicate cîteva puncte corespunzătoare valorilor obținute de Kiselev, pentru variația raportului $\frac{\lambda}{\lambda_\infty}$ pe cerc, în curent nelimitat.

Se observă că, pe măsură ce raportul dintre raza cercului și lărgimea canalului se micșorează, curbele se apropie de aceea găsită de Kiselev, în special pentru valoarea $\frac{a}{b} = \frac{1}{100}$ cînd obstacolul se poate considera, practic, plasat în fluid nemărginit.

Primită la redacție la 5 noiembrie 1962

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ДОЗВУКОВОМУ ДВИЖЕНИЮ ОКОЛО ПРЕПЯТСТВИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В КАНАЛЕ

РЕЗЮМЕ

Автор исследует с помощью метода прямого приближения, разработанного Б. М. Киселевым [5], плоское дозвуковое движение идеальной сжимаемой жидкости около квазикругового препятствия, расположенного в канале.

Полученные формулы позволяют проводить численные расчеты. В частности, определяется распределение скоростей на препятствии и даются таблицы и графики с полученными значениями.

Найденные результаты сравниваются с результатами, вытекающими из исследования той же задачи, проведенного Е. Ламла методом Янсена-Релея, и устанавливается хорошее совпадение.

INVESTIGATIONS ON THE SUBSONIC MOTION AROUND A BODY SITUATED IN A CHANNEL

ABSTRACT

The author uses the direct approximation method of B. M. Kiselev [5] for studying the plane subsonic motion of an ideal compressible fluid around a quasi-circular body situated in a channel.

The formulas obtained permit the performing of numerical calculations.

The velocity distribution on the body is determined and tables and graphs showing the values obtained are given.

The results are compared to those deduced in E. Lamla's study, who uses the Janzen-Rayleigh method, a good agreement being observed.

BIBLIOGRAFIE

1. E. LAMLA, *Die symmetrische Potentialströmung eines kompressibeln Gases um einen Kreiszylinder im Kanal im unterkritischen Gebiet.* Luftfahrtforschung, **17**, 329—331 (1940).

2. Z. HASIMOTO, *On the Subsonic Flow of a Compressible Fluid past a Circular Cylinder between two Parallel Walls.* Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, **25**, 563—574 (1943).

3. S. POPP, *Mişcarea subsonică a unui fluid compresibil într-un canal în jurul unui cilindru cvasicircular.* Com. Acad. R.P.R., **9**, 223—228 (1959).

4. — *Variantele metodei de aproximaţie a lui S. A. Ciaplighin în problema mişcării subsonice în canal în jurul cilindrului cvasicircular.* Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" din Iaşi, Supliment, **6**, 723—730 (1960).

5. Б. М. КИСЕЛЕВ, *Обтекание тел заданной формы плоским дозвуковым потоком газа.* Сборник теоретических работ по аэродинамике, Оборонгиз, Москва, 1957, 11—26.

6. CAIUS IACOB, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides.* Edit. Acad. R.P.R. — Gauthier-Villars, Bucureşti—Paris, 1959.

7. A. MASOTTI, *Traslazione uniforme di un cilindro rotondo in un canale a sponde piane parallele; seconda approssimazione.* Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei, **4**, 443—446 (1926).

STRUCTURI PSEUDOTOPOLOGICE

DE

ELEMÉR ROSINGER

INTRODUCERE

Structurile topologice obișnuite [1], [2] prezintă două tipuri de deficiențe : pe de o parte există procese topologice — de pildă în mulțimi ordonate — care nu se pot încadra satisfăcător în schema obișnuită, pe de altă parte, prezintă o comportare dificilă față de trecerea la marginea inferioară și superioară.

Deficiența a doua a fost observată îndeosebi la studiul spațiilor vectoriale topologice legate de teoria distribuțiilor. Cu scopul înlăturării ei s-au propus structurile pseudotopologice [9], [4], [5].

De fapt această a doua deficiență nu este proprie doar spațiilor vectoriale topologice ci apare și la spațiile topologice oarecare, constînd în cele expuse mai jos :

Fie pe o mulțime E o familie de topologii $(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$, fie $\underline{\mathcal{D}} = \inf (\mathcal{D}_i \mid i \in I)$, atunci pentru $x \in E$ avem :

$$1)\ \underline{\mathcal{V}}(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}_i(x),$$

$$2)\ \underline{\mathcal{F}}(x) \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i(x),$$

$$3)\ \underline{\mathcal{S}}(x) \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{S}_i(x);$$

de asemenea avem :

$$4)\ \underline{\mathcal{K}} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{K}_i,$$

unde prin $\underline{\mathcal{V}}(x)$, $\underline{\mathcal{F}}(x)$, $\underline{\mathcal{S}}(x)$ și $\underline{\mathcal{K}}$ am notat respectiv filtrul vecinătăților ui x, filtrele convergente spre x, șirurile generalizate convergente spre x i mulțimile compacte în topologia $\underline{\mathcal{D}}$, iar prin $\mathcal{V}_i(x)$, $\mathcal{F}_i(x)$, $\mathcal{S}_i(x)$ și $\mathcal{K}_i$ m notat aceleași mulțimi în topologia $\mathcal{D}_i$.

Dacă pe E s-a dat o familie de structuri uniforme $(\mathcal{U}_i \mid i \in I)$, notînd $\underline{\mathcal{U}} = \inf(\mathcal{U}_i \mid i \in I)$ avem:

$$5)\ \underline{\mathfrak{F}} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

$$6)\ \underline{\mathfrak{S}} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_i,$$

$$7)\ \underline{\mathfrak{K}_r} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{K}_{r_i},$$

unde prin $\underline{\mathfrak{F}}$, $\underline{\mathfrak{S}}$ și $\underline{\mathfrak{K}_r}$ am notat filtrele Cauchy, șirurile generalizate Cauchy și mulțimile relativ compacte în structura uniformă $\underline{\mathcal{U}}$ iar prin $\mathfrak{F}_i$, $\mathfrak{S}_i$ și $\mathfrak{K}_{r_i}$ am notat mulțimile respective în structura uniformă $\mathcal{U}_i$.

Dacă E este spațiu vectorial iar $(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$ este o familie de topologii vectoriale pe E atunci în plus

$$8)\ \underline{\mathcal{M}} \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i,$$

unde prin $\underline{\mathcal{M}}$ și $\mathcal{M}_i$ am notat mulțimile mărginite în topologiile vectoriale $\underline{\mathcal{D}}$ respectiv $\mathcal{D}_i$.

Fie F un spațiu vectorial cu topologia vectorială $\mathcal{D}$, fie $\overline{\mathcal{D}} = \sup(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$, atunci

$$9)\ \mathcal{L}(\mathcal{D} \to \underline{\mathcal{D}}) \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{L}(\mathcal{D} \to \mathcal{D}_i),$$

$$10)\ \mathcal{L}(\overline{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}) \supseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{L}(\mathcal{D}_i \to \mathcal{D}),$$

unde prin $\mathcal{L}(\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'')$ notăm aplicațiile liniare continue de la topologia $\mathcal{D}'$ la topologia $\mathcal{D}''$.

În general, toate incluziunile din relațiile precedente sînt stricte. Acest fapt prezintă un inconvenient deosebit deoarece structurile topologice $(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$ de la care se pornește sînt de obicei spații vectoriale seminormate, deci sînt simple și ușor de studiat, pe cînd topologiile margine inferioară $\underline{\mathcal{D}}$ și margine superioară $\overline{\mathcal{D}}$, dat fiind tocmai faptul că în relațiile de sus nu avem de obicei egalitate, devin dificile.

Ulterior s-a observat [4], [5] că aceste topologii margine inferioară și superioară se pot înlocui cu succes prin anumite structuri topologice mai largi — numite pseudotopologice — care au avantajul că păstrează o legătură simplă cu topologiile $(\mathcal{D}_i \mid i \in I)$ din care au fost obținute.

Structurile pseudotopologice propuse în [9], [4] și [5] se referă doar la spațiile vectoriale.

În lucrarea de față se construiește o structură pseudotopologică nelegată de spațiile vectoriale, în așa fel încît va fi înlăturată complet a doua deficiență a topologiei obișnuite și în parte și prima.

Menționăm că în cazul spațiilor vectoriale, pseudotopologia propusă va duce la structuri mai generale decît cele considerate în [9], [4] și [5].

Ca o aplicație imediată se va arăta că spațiul distribuțiilor $\mathcal{D}'$ a lui L. Schwartz se poate obține ca completat al spațiului funcțiilor con-

tinue sau chiar al funcțiilor indefinite derivabile cu suport compact, într-o pseudotopologie adecvată care este mai generală decît structurile considerate de autorii amintiți.

În privința ideii de bază a construcției propuse în lucrare, menționăm că topologia obișnuită este un complex de noțiuni în care există o noțiune fundamentală — cea de mulțime deschisă sau alta echivalentă — pe baza căreia se definesc în mod unic toate celelalte noțiuni topologice.

Spre deosebire de această situație, pseudotopologia propusă în lucrare se prezintă ca un complex de noțiuni topologice relativ independente în sensul că:

1) legătura dintre noțiunile topologice nu mai este rigidă în mod extrem ca la topologia obișnuită unde o singură noțiune topologică de bază determină în mod unic toate celelalte noțiuni, ci această legătură se manifestă doar prin faptul că noțiunile topologice verifică anumite axiome de compatibilitate;

2) există un grup de noțiuni topologice de primă importanță: filtrul Cauchy, filtrul convergent și echivalența topologică a filtrelor Cauchy, ultima noțiune fiind proprie construcției propuse.

Structura pseudotopologică se va compune dintr-o pereche de spații pseudotopologice plus două clase de aplicații, spațiul pseudotopologic fiind un caz particular de structură pseudotopologică.

Menționăm că totalitatea pseudotopologiilor în sensul acestei lucrări formează o categorie mai largă decît categoria definită de Eilenberg — Mac Lane.

NOTAȚII

Pentru scurtarea expunerii vom folosi următoarele notații:

1) prin $\mathfrak{M}$ notăm mulțimile nevide:

2) pentru $E \in \mathfrak{M}$ notăm cu $B\mathrm{FIL}(E)$ mulțimea bazelor de filtre pe E; pentru $\mathcal{B} \in B\,\mathrm{FIL}(E)$ notăm cu $\mathrm{fil}_E\ \mathcal{B}$ filtrul generat pe E de $\mathcal{B}$; notăm cu $B\mathrm{FIL}^0(E)$ acele baze din $B\mathrm{FIL}(E)$ care sînt cel mult numărabile;

3) pentru $E \in \mathfrak{M}$ notăm cu $\mathrm{FIL}(E)$ mulțimea filtrelor pe E; notăm cu $\mathrm{FIL}^0(E)$ acele filtre din $\mathrm{FIL}(E)$ care au cel puțin o bază din $B\,\mathrm{FIL}^0(E)$; notăm cu $U\mathrm{FIL}(E)$ ultrafiltrele pe E;

4) pentru E, $A \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq E$ notăm cu $\mathrm{FIL}_A(E)$ acele filtre din $\mathrm{FIL}(E)$ care au cel puțin o bază din $B\mathrm{FIL}(A)$;

5) vom folosi cuantificatorii logici sub scrierea următoare:

„$(\forall)\ldots:\ldots$”

pentru a nota „oricare ar fi... avem...”

și

„$(\exists)\ldots:\ldots$”

pentru a nota „există...astfel ca...”

I. DEFINIREA ŞI COMPARAREA PSEUDOTOPOLOGIILOR

§ 1. DEFINIREA

1. Spaţii pseudotopologice

Definiţia 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; *numim spaţiu pseudotopologic pe* E *orice structură de forma*

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r),$$

unde: (PT 1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}(E)$,

(PT 2) $(\forall)\, x \in E: \mathcal{U}_x \in \mathfrak{F}_x \subseteq \mathfrak{F}$ [1]),

(PT 3) R *este o relaţie binară reflexivă şi simetrică pe* $\mathfrak{F}$ *astfel ca*

$$(\forall)\, x \in E, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

(PT 4) $\{\varnothing_E, E\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ca

$$(\forall)\, D \in \mathcal{D}, x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}(E) : x \in E - D,$$

(PT 5) $\{\varnothing_E, E\} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ ca

$$(\forall)\, I \in \mathcal{J}, x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{I}{\mathrm{FIL}}(E) : x \in I,$$

(PT 6) $\{K \subseteq E \mid K \text{ finită}\} \cup \{A \subseteq E \mid (\exists) K \in \mathfrak{K}_r : A \subseteq K\} \subseteq$

$$\subseteq \mathfrak{K}_r \subseteq \mathcal{P}(E) \text{ ca } (\forall) K \in \mathfrak{K}_r, \mathcal{F} \in U\,\mathrm{FIL}(K) : \underset{E}{\mathrm{fil}}\,\mathcal{F} \in \mathfrak{F}.$$

Notăm cu $PT(E)$ mulţimea spaţiilor pseudotopologice pe E.

Observaţia 1. Explicăm definiţia 1: în cazul cînd pe E s-a definit o structură uniformă Bourbaki, filtrele din $\mathfrak{F}$ şi $\mathfrak{F}_x$ reprezintă filtrele Cauchy respectiv convergente spre x; R reprezintă relaţia care indică convergenţa spre acelaşi element din completatul lui E a două filtre Cauchy (această relaţie este necesară în construirea spaţiului separat şi completat); $\mathcal{D}, \mathcal{J}$ şi $\mathfrak{K}_r$ reprezintă mulţimile deschise, închise şi relativ compacte. Dacă pe E s-a definit doar o topologie Bourbaki şi nu o structură uniformă, vom considera $\mathfrak{F}_x$ format din toate filtrele convergente spre x; $\mathfrak{F} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{F}_x$; vom considera că două filtre din $\mathfrak{F}$ sînt în relaţia R numai dacă converg spre acelaşi element din E şi, în sfîrşit, vom considera mulţimile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{J}$ în mod obişnuit iar $\mathfrak{K}_r$ format din acele părţi ale lui E pe care orice ultrafiltru este convergent.

Vom numi relaţia R echivalenţă topologică a filtrelor Cauchy (în general R este numai reflexivă şi simetrică nu şi tranzitivă deci nu este o echivalenţă în sens obişnuit).

---

[1]) Pentru $x \in E$ notăm cu $\mathcal{U}_x$ ultrafiltrul pe E generat de părţile din E ce conţin pe x.

2. Structuri pseudotopologice

Definiția 2. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$; *numim structură pseudotopologică pe* (E_0, E_1) *orice structură*

$$\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u),$$

unde: (PT 7) $(\forall)$ $i = 0,1$:

$$\Sigma_i = (\mathcal{F}^i, (\mathcal{F}^i_{x_i} \mid x_i \in E_i), R^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{J}^i, \mathcal{K}_r{}^i) \in PT(E_i),$$

(PT 8) Φ *este o mulțime de aplicații ale lui* E_0 *în* E_1

ca (PT 8.1) $(\forall)$ $f \in \Phi$, $x_0 \in E_0$, $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{F}^0_{x_0}$:

$$f(\mathcal{F}_0) \in \mathcal{F}^1_{f(x_0)},$$

(PT 8.2) $(\forall) f \in \Phi$, $D_1 \in \mathcal{D}^1 : f^{-1}(D_1) \in \mathcal{D}^0$,

(PT 8.3) $(\forall) f \in \Phi$, $I_1 \in \mathcal{J}^1 : f^{-1}(I_1) \in \mathcal{J}^0$,

(PT 9) $\Phi_u \subseteq \Phi$ *ca*

(PT 9.1) $(\forall)$ $x_1 \in E_1 : (E_0 \ni x_0 \to x_1 \in E_1) \in \Phi_u$,

(PT 9.2) $(\forall) f \in \Phi_u$, $\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0 \in \mathcal{F}^0$, $R^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$:

$$f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0) \in \mathcal{F}^1, R^1(f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0)),$$

(PT 9.3) $(\forall) f \in \Phi_u$, $K_0 \in \mathcal{K}_r{}^0 : f(K_0) \in \mathcal{K}_r{}^1$.

Notăm cu $PT(E_0, E_1)$ mulțimea structurilor pseudotopologice pe (E_0, E_1).

Observația 2. Funcțiile din Φ și Φ_u generalizează funcțiile continue, respectiv uniform continue, definite pe E_0, cu valori în E_1 în cazul cînd pe E_0 și E_1 s-a definit cîte o structură uniformă Bourbaki. În cazul cînd pe E_0 sau E_1 nu s-a definit o structură uniformă ci doar o topologie Bourbaki, vom considera $\Phi = \Phi_u$ format numai din funcțiile continue.

3. Operatorii ν, $\varkappa$, π_0, π_1, u, $\nu\nu$

În considerațiile ulterioare ne vom folosi de următorii operatori definiți pe $PT(E)$ sau $PT(E_0, E_1)$:

Definiția 3. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $\Sigma = (\mathcal{F}, (\mathcal{F}_x \mid x \in E)\ R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathcal{K}_r) \in PT(E)$; *notăm* $\nu(\Sigma) = (\mathcal{F}, (\mathcal{F}_x \mid x \in E), R)$

și $\varkappa(\Sigma) = (\Sigma, \Sigma, \Phi_E, \Phi_{Eu})$,

unde $\Phi_E = \Phi_{Eu}$ *este format din toate aplicațiile constante ale lui* E *în* E.

Evident $\varkappa(\Sigma) \in PT(E, E)$.

Definiția 4. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$ *și*

$$\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u) \in PT(E_0, E_1);$$

notăm $\pi_0(\Theta) = \Sigma_0$, $\pi_1(\Theta) = \Sigma_1$.

Evident $\pi_0(\Theta) \in PT(E_0), \pi_1(\Theta) \in PT(E_1)$ *și* $\pi_0(\varkappa(\Sigma)) = \pi_1(\varkappa(\Sigma)) = \Sigma$.

Notăm $u(\Theta) = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi_u)$,

$\nu\nu(\Theta) = (\nu(\Sigma_0), \nu(\Sigma_1), \Phi, \Phi_u)$.

§ 2. COMPARAREA

1. În spațiile pseudotopologice

Definiția 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r)$, $\Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_x \mid x \in E), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_r') \in PT(E)$; *notăm* $\Sigma \leqslant \Sigma'$ *numai dacă*

1) $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{F}'$,
2) $(\forall)\, x \in E : \mathfrak{F}_x \supseteq \mathfrak{F}'_x$,
3) $(\forall)\, \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}', R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') : R(\mathcal{F}', \mathcal{G}')$,
4) $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$,
5) $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}'$,
6) $\mathfrak{K}_r \supseteq \mathfrak{K}_r'$.

Spunem în aceste condiții că Σ *este mai puțin fină decît* Σ' *sau că* Σ' *este mai fină decît* Σ.

Propoziția 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$. *Atunci relația* $\leqslant$ *este reflexivă și tranzitivă pe* $PT(E)$; *în plus, dacă* $\Sigma \leqslant \Sigma'$ *și* $\Sigma' \leqslant \Sigma$ *atunci avem* $\Sigma = \Sigma'$.

Demonstrația este imediată.

Introducem structura cea mai puțin fină, respectiv cea mai fină, din $PT(E)$.

Fie $\underline{\Sigma} = (\underline{\mathfrak{F}}, (\underline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \underline{R}, \underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{J}}, \underline{\mathfrak{K}_r})$,

unde

1) $(\forall)\, x \in E : \underline{\mathfrak{F}}_x = \underline{\mathfrak{F}} = \mathrm{FIL}(E)$,
2) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}} : \underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,
3) $\underline{\mathcal{D}} = \underline{\mathcal{J}} = \{\varnothing_E, E\}$,
4) $\underline{\mathfrak{K}_r} = \mathcal{P}(E)$;

fie și $\overline{\Sigma} = (\overline{\mathfrak{F}}, (\overline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \overline{R}, \overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathfrak{K}_r})$,

unde

5) $(\forall)\, x \in E : \overline{\mathfrak{F}}_x = \{\mathcal{U}_x\}$,
6) $\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup_{x \in E} \overline{\mathfrak{F}}_x$,
7) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \overline{\mathfrak{F}}$:

$$\overline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\, x \in E : \mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{U}_x,$$

8) $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(E)$,
9) $\overline{\mathfrak{K}_r} = \{K \subseteq E \mid K \text{ finită}\}$.

Propoziția 2. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$. *Atunci*:

1) $\underline{\Sigma}, \overline{\Sigma} \in PT(E)$,

2) $(\forall)\ \Sigma \in PT(E): \underline{\Sigma} \leqslant \Sigma \leqslant \overline{\Sigma}$.

Demonstrația este imediată.

2. În structurile pseudotopologice

Definiția 2. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$; $\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u)$, $\Theta' = (\Sigma_0', \Sigma_1', \Phi', \Phi_u') \in PT(E_0, E_1)$; *notăm* $\Theta \leqslant \Theta'$ *numai dacă*

1) $\Sigma_0 \leqslant \Sigma_0'$,
2) $\Sigma_1 \geqslant \Sigma_1'$,
3) $\Phi \subseteq \Phi'$,
4) $\Phi_u \subseteq \Phi_u'$.

Spunem în aceste condiții că Θ *este mai puțin fină decît* Θ' *sau că* Θ' *este mai fină decît* Θ.

Propoziția 3. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$; *atunci* $\leqslant$ *este o relație reflexivă și tranzitivă pe* $PT(E_0, E_1)$; *în plus, dacă* $\Theta \leqslant \Theta'$ *și* $\Theta' \leqslant \Theta$ *atunci* $\Theta = \Theta'$.

Demonstrația este imediată.

Introducem structura cea mai puțin fină respectiv cea mai fină din $PT(E_0, E_1)$.

Fie $\underline{\Theta} = (\underline{\Sigma}_0, \overline{\Sigma}_1, \underline{\Phi}, \underline{\Phi}_u)$, unde

1) $\underline{\Sigma}_0$ este cea mai puțin fină din $PT(E_0)$,

2) $\overline{\Sigma}_1$ este cea mai fină din $PT(E_1)$,

3) $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_u$ este format din aplicațiile constante a lui E_0 în E_1;

fie $\overline{\Theta} = (\overline{\Sigma}_0, \underline{\Sigma}_1, \overline{\Phi}, \overline{\Phi}_u)$, unde

4) $\overline{\Sigma}_0$ este cea mai fină din $PT(E_0)$,

5) $\underline{\Sigma}_1$ este cea mai puțin fină din $PT(E_1)$,

6) $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_u$ este format din toate aplicațiile lui E_0 în E_1.

Propoziția 4. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$; *atunci*

1) $\underline{\Theta}, \overline{\Theta} \in PT(E_0, E_1)$,

2 $(\forall)\ \Theta \in PT(E_0, E_1): \underline{\Theta} \leqslant \Theta \leqslant \overline{\Theta}$.

Demonstrația este imediată.

§ 3. PSEUDOTOPOLOGII MARGINE

1. În spații pseudotopologice

Definiția 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$ *și*

$$(\Sigma_\lambda = (\mathfrak{F}^\lambda, (\mathfrak{F}_x^\lambda \mid x \in E), R^\lambda, \mathcal{D}^\lambda, \mathcal{J}^\lambda, \mathfrak{K}_r^\lambda) \mid \lambda \in \Lambda),$$

unde $\Lambda \in \mathfrak{M}$, *o familie de spații pseudotopologice pe* E. *Definim*

$$\sup\,(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\overline{\mathfrak{F}}, (\overline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \overline{R}, \overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathfrak{K}_r})$$

ca 1) $\overline{\mathfrak{F}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}^\lambda$,

2) $(\forall)\, x \in E : \overline{\mathfrak{F}}_x = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_x^\lambda$,

3) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \overline{\mathfrak{F}}$:

$$\overline{R}\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\forall)\, \lambda \in \Lambda : R^\lambda\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

4) $\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^\lambda$, $\overline{\mathcal{J}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{J}^\lambda$,

5) $\overline{\mathfrak{K}_r} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{K}_r^\lambda$.

De asemenea, definim

$$\inf\,(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\underline{\mathfrak{F}}, (\underline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \underline{R}, \underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{J}}, \underline{\mathfrak{K}_r})$$

ca 6) $\underline{\mathfrak{F}} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}^\lambda$,

7) $(\forall)\ x \in E : \underline{\mathfrak{F}}_x = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{F}_x^\lambda$,

8) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}}$:

$$R\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \bigcap_{\mathcal{L} \in \mathfrak{L}} \mathcal{L},$$

unde

$$\mathfrak{L} = \left\{ \mathcal{L} \subseteq \underline{\mathfrak{F}} \times \underline{\mathfrak{F}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{I)}\ (\forall)\, \mathcal{F} \in \underline{\mathfrak{F}} : (\mathcal{F}, \mathcal{F}) \in \mathcal{L} \\ \text{II)}\ (\forall)\, (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L} : (\mathcal{G}, \mathcal{F}) \in \mathcal{L} \\ \text{III)}\ (\forall)\, \lambda \in \Lambda, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda,\ R^\lambda\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L} \\ \text{IV)}\ (\forall)\, x \in E, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}}_x : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L} \end{array} \right\}$$

9) $\underline{\mathcal{D}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}^\lambda$, $\underline{\mathcal{J}} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{J}^\lambda$,

10) $\underline{\mathfrak{K}_r} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{K}_r^\lambda$.

Observația 1. Este necesară această definiție relativ complicată pentru $\underline{R}$ deoarece altfel structura margine inferioară inf $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ nu ar verifica punctele 1), 2) și 3) ale teoremei de mai jos.

Totuși — după cum se va vedea la punctul 5) al teoremei menționate — în cazurile cele mai frecvente și anume cînd structura margine inferioară se obține dintr-o familie $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ dirijată $\geqslant$, definiția relației $\underline{R}$ se simplifică mult, luînd următoarea formă:

$$\underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

TEOREMA 1. *În condițiile definiției* 1 *avem*:

1) $\sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PT(E)$,

2) $(\forall)\, \mu \in \Lambda : \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \leqslant \Sigma_\mu \leqslant \sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

3) $(\forall)\, \Sigma \in PT(E)$:

3.1) $((\forall)\, \lambda \in \Lambda : \Sigma \leqslant \Sigma_\lambda) \Rightarrow \Sigma \leqslant \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

3.2) $((\forall)\, \lambda \in \Lambda : \Sigma_\lambda \leqslant \Sigma) \Rightarrow \Sigma \geqslant \sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

4) $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}} : ((\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \Rightarrow \underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,

5) *dacă* $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este dirijată* $\geqslant$ *atunci* $(\forall)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}}$:

$$\underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Demonstrație. Punctele 1), 2) și 3) se verifică ușor. Pentru a demonstra 4) trebuie să arătăm că $(\forall)\, \mathcal{L} \in \mathfrak{L} : (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L}$, dar acest fapt rezultă din condiția III) de la definiția lui $\mathfrak{L}$. Ținînd seama de 4), pentru a demonstra 5) este suficient să arătăm că

$$\underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow (\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Fie $\mathcal{L}_0 = \{(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \underline{\mathfrak{F}} \times \underline{\mathfrak{F}} \mid (\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G}, \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G})\}$;

atunci $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{L}$ deoarece condițiile I), II) și III) din definiția lui $\mathfrak{L}$ sînt evident verificate iar condiția IV) este de asemenea verificată întrucît: fie $x \in E$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}}_x$ atunci

$$(\exists)\, \mu, \nu \in \Lambda : \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x^\mu, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x^\nu ;$$

dar $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ este dirijată $\geqslant$ deci

$$(\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathfrak{F}_x^\mu, \mathfrak{F}_x^\nu \subseteq \mathfrak{F}_x^\lambda$$

de unde $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x^\lambda$ deci $R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ adică $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L}_0$. Din faptul că $\mathcal{L}_0 \in \mathfrak{L}$ rezultă că

$$\underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L}_0,$$

$$\text{însă } (\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow (\exists)\, \lambda \in \Lambda : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^\lambda, R^\lambda(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Observația 2. Din demonstrația pentru punctul 5) al teoremei 1 rezultă că nu este necesar ca însăși familia $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ să fie dirijată $\geqslant$ ci este suficient numai ca familia $(\mathfrak{F}_x^\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ a filtrelor convergente spre x să fie dirijată $\subseteq$ pentru orice $x \in E$.

2. În structuri pseudotopologice

Definiția 2. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$ *și*

$$(\Theta_\lambda = (\Sigma_{0\lambda}, \Sigma_{1\lambda}, \Phi_\lambda^-, \Phi_{\mu\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda),$$

unde $\Lambda \in \mathfrak{M}$, *o familie de structuri pseudotopologice pe* (E_0, E_λ). *Definim*

$$\sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\overline{\Sigma}_0, \overline{\Sigma}_1, \overline{\Phi}, \overline{\Phi}_u)$$

ca

1) $\overline{\Sigma}_0 = \sup(\Sigma_{0\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,
$\overline{\Sigma}_1 = \inf(\Sigma_{1\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

2) $\overline{\Phi} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$, $\overline{\Phi}_u = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{u\lambda}$;

definim de asemenea

$$\inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\underline{\Sigma}_0, \underline{\Sigma}_1, \underline{\Phi}, \underline{\Phi}_u)$$

ca

3) $\underline{\Sigma}_0 = \inf(\Sigma_{0\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,
$\underline{\Sigma}_1 = \sup(\Sigma_{1\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

4) $\underline{\Phi} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$, $\underline{\Phi}_u = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{u\lambda}$.

TEOREMA 2. *În condițiile definiției 2 avem*:

1) $\sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PT(E_0, E_1)$,
2) $(\forall)\, \mu \in \Lambda : \Theta_\mu \leqslant \sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,
3) $(\forall)\, \Theta \in PT(E_0, E_1)$:

$$((\forall)\, \lambda \in \Lambda : \Theta \geqslant \Theta_\lambda) \Rightarrow \Theta \geqslant \sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda).$$

Dacă

$$(\exists)\, \Sigma_0 \in PT(E_0) : (\forall)\, \lambda \in \Lambda : \pi_0(\Theta_\lambda) = \Sigma_{0\lambda} = \Sigma_0$$

sau dacă

$$(\exists)\, \Sigma_1 \in PT(E_1) : (\forall)\, \lambda \in \Lambda : \pi_1(\Theta_\lambda) = \Sigma_{1\lambda} = \Sigma_1$$

atunci

4) $\inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PT(E_0, E_1)$,
5) $(\forall)\, \mu \in \Lambda : \inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \leqslant \Theta_\mu$,
6) $(\forall)\, \Theta \in PT(E_0, E_1)$:
$((\forall)\, \lambda \in \Lambda : \Theta \leqslant \Theta_\lambda) \Rightarrow \Theta \leqslant \inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$.

Demonstrația este imediată.

§ 4. PSEUDOTOPOLOGII INDUSE ȘI IZOMORFE

1. Spații pseudotopologice induse și izomorfe

Definiția 1. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $f : E \to E'$, $g : E' \to E$,

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_\iota) \in PT(E).$$

Definim

$$\Sigma' = \sup\left\{ \Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E')R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_z') \in PT(E') \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}' \\ 2)\ (\forall)\ x \in E: \\ \quad f(\mathfrak{F}_x) \subseteq \mathfrak{F}'_{f(x)} \\ 3)\ (\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}: \\ \quad R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow R'(f(\mathcal{F}), f(\mathcal{G})) \\ 4)\ f^{-1}(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{D} \\ 5)\ f^{-1}(\mathcal{J}') \subseteq \mathcal{J} \\ 6)\ f(\mathfrak{K}_z) \subseteq \mathfrak{K}_z' \end{array} \right.$$

și

$$\Sigma_g = \inf\left\{ \Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E')R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_z') \in PT(E') \;\middle|\; \begin{array}{l} 1)\ g(\mathfrak{F}') \subseteq \mathfrak{F} \\ 2)\ (\forall)\ x' \in E': \\ \quad g(\mathfrak{F}'_{x'}) \subseteq \mathfrak{F}_{g(x')} \\ 3)\ (\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}': \\ \quad R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Rightarrow \\ \quad \Rightarrow R(g(\mathcal{F}'), g(\mathcal{G}')) \\ 4)\ g^{-1}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}' \\ 5)\ g^{-1}(\mathcal{J}) \subseteq \mathcal{J}' \\ 6)\ g(\mathfrak{K}_z') \subseteq \mathfrak{K}_z \end{array} \right.$$

Numim Σ' spațiu pseudotopologic indus pe E' prin aplicația f de Σ; numim Σ_g spațiu pseudotopologic indus pe E' prin aplicația g de către Σ.

Dacă $E' \subseteq E$ și g este aplicația identică a lui E' în E, notăm $\Sigma \mid_{E'} = \Sigma_g$ și-l numim spațiu pseudotopologic indus de Σ pe E'.

P r o p o z i ț i a 1. *În condițiile definiției* 1 *avem*

1) $\Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E'), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_z')$, *unde*

1.1) $\mathfrak{F}' = f(\mathfrak{F}) \cup \{\mathcal{U}_{x'} \mid x' \in E' - f(E)\}$,

1.2) $(\forall)\ x' \in E'$:

$$\mathfrak{F}'_{x'} = \begin{cases} \bigcup_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_x) \Leftarrow x' \in f(E), \\ \{\mathcal{U}_{x'},\} \Leftarrow x' \in E' - f(E), \end{cases}$$

1.3) $(\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'$:

$$R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1.3.1)\ (\exists)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \\ \qquad \mathcal{F}' = f(\mathcal{F}), \mathcal{G}' = f(\mathcal{G}) \\ \textit{sau} \\ 1.3.2)\ (\exists)\ x' \in E' : \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'_{x'} \end{pmatrix}$$

1.4) $\mathcal{D}' = \{D' \subseteq E' \mid f^{-1}(D') \in \mathcal{D}\}$,

1.5) $\mathcal{J}' = \{I' \subseteq E' \mid f^{-1}(I') \in \mathcal{J}\}$,

1.6) $\mathfrak{K}_z' = f(\mathfrak{K}_z) \cup \{K' \subseteq E' \mid K' \textit{ finită}\}$,

2) $\Sigma_g = (\mathfrak{F}'', (\mathfrak{F}''_{x'} \mid x' \in E'), R'', \mathcal{D}'', \mathcal{J}'', \mathfrak{K}_r'')$, *unde*

2.1) $\mathfrak{F}'' = \{\mathcal{F}'' \in \mathrm{FIL}(E') \mid g(\mathcal{F}'') \in \mathfrak{F}\}$,

2.2) $(\forall)\, x' \in E'$:

$\mathfrak{F}''_{x'} = \{\mathcal{F}'' \in \mathrm{FIL}(E') \mid g(\mathcal{F}'') \in \mathfrak{F}_{g(x')}\}$,

2.3) $(\forall)\, \mathcal{F}'', \mathcal{G}'' \in \mathfrak{F}''$:

$R''(\mathcal{F}'', \mathcal{G}'') \Leftrightarrow R(g(\mathcal{F}''), g(\mathcal{G}''))$,

2.4) $\mathcal{D}'' = g^{-1}(\mathcal{D})$,

2.5) $\mathcal{J}'' = g^{-1}(\mathcal{J})$,

2.6) $\mathfrak{K}_r'' = \{K'' \subseteq E' \mid g(K'') \in \mathfrak{K}_r\}$,

3) *dacă* $E' \subseteq E$ *atunci*

$$\Sigma|_{E'} = (\mathfrak{F}|_{E'}, (\mathfrak{F}_x|_{E'} \mid x \in E'), R|_{E'}, \mathcal{D}|_{E'}, \mathcal{J}|_{E'}, \mathfrak{K}_r|_{E'}),$$

unde

3.1) $\mathfrak{F}|_{E'} = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(E') \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}_{E'}(E)\}$,

3.2) $(\forall)\, x \in E'$:

$\mathfrak{F}_x|_{E'} = \{\mathcal{F} \cap \mathcal{P}(E') \mid \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \mathrm{FIL}_{E'}(E)\}$,

3.3) $(\forall)\, \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}|_{E'}$:

$R|_{E'}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow R(\mathrm{fil}_E \mathcal{F}', \mathrm{fil}_E \mathcal{G}')$,

3.4) $\mathcal{D}|_{E'} = \{D \cap E' \mid D \in \mathcal{D}\}$,

3.5) $\mathcal{J}|_{E'} = \{I \cap E' \mid I \in \mathcal{J}\}$,

3.6) $\mathfrak{K}_r|_{E'} = \mathfrak{K}_r \cap \mathcal{P}(E') = \{K \cap E' \mid K \in \mathfrak{K}_r\}$.

D e m o n s t r a ț i e. 1) Fie Σ' structura formată cu expresiile din membrul drept al celor șase relații de la punctul 1); avem $\Sigma' \in PT(E')$ deoarece (PT 1), (PT 2) și (PT 3) se verifică imediat;

(PT 4) se verifică întrucît

fie $D' \subseteq E'$ ca $f^{-1}(D') \in \mathcal{D}$

fie $x' \in E', \mathcal{F}' \in \mathfrak{F}'_{x'} \cap \underset{E'-D'}{\mathrm{FIL}}(E')$

dacă $x' \in E' - f(E)$

atunci $\mathcal{F}' = \mathcal{U}_{x'}$, deci $x' \in E' - D'$

dacă $x' \in f(E)$

atunci $(\exists)\, x \in f^{-1}(x'), \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x : \mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$

dar atunci $\mathcal{F} \in \underset{E-f^{-1}(D')}{\mathrm{FIL}}(E)$ deoarece

fie $F \in \mathcal{F}$ atunci $f(F) \in \mathcal{F}'$

deci $(\exists)\, F' \in \mathcal{F}' : F' \subseteq f(F) \cap (E' - D')$

fie $F_1 \in \mathcal{F}$ ca $f(F_1) \subseteq F'$

fie $F_2 = F \cap F_1$

atunci $F_2 \in \mathcal{F}, F_2 \subseteq F, f(F_2) \subseteq E' - D'$

deci $F_2 \subseteq f^{-1}(f(F_2)) \subseteq f^{-1}(E' - D') \subseteq E - f^{-1}(D')$;

deci $x \in E - f^{-1}(D')$ deoarece $f^{-1}(D') \in \mathcal{D}$
deci $x' = f(x) \notin D'$
deci $x' \in E' - D'$;
(PT 5) se verifică întrucît
fie $I' \subseteq E'$ ca $f^{-1}(I') \in \mathcal{J}$
fie $x' \in E'$, $\mathcal{F}' \in \mathfrak{F}'_{x'} \cap \underset{I'}{\mathrm{FIL}}(E')$
dacă $x' \in E' - f(E)$
atunci $\mathcal{F}' = \mathcal{U}_{x'}$ deci $x' \in I'$
dacă $x' \in f(E)$
atunci $(\exists)\, x \in f^{-1}(x'), \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x : \mathfrak{F}' = f(\mathcal{F})$
dar atunci $\mathcal{F} \in \underset{f^{-1}(I')}{\mathrm{FIL}}(E)$ căci
fie $F \in \mathcal{F}$ atunci $f(F) \in \mathcal{F}'$
deci $(\exists)\, F' \in \mathcal{F}' : F' \subseteq f(F) \cap I'$
fie $F_1 \in \mathcal{F}$ ca $f(F_1) \subseteq F'$
fie $F_2 = F \cap F_1$
atunci $F_2 \in \mathcal{F}, F_2 \subseteq F, f(F_2) \subseteq I'$
deci $F_2 \subseteq f^{-1}(f(F_2)) \subseteq f^{-1}(I')$;
deci $x \in f^{-1}(I')$ deoarece $f^{-1}(I') \in \mathcal{J}$
deci $x' = f(x) \in f(f^{-1}(I')) = I'$;
(PT 6) se verifică deoarece
fie $K \in \mathcal{K}_r$, $\mathcal{U}' \in U\,\mathrm{FIL}(f(K))$
atunci $f^{-1}(\mathcal{U}') \in \mathrm{FIL}(K)$
deci $(\exists)\, \mathcal{U} \in U\,\mathrm{FIL}(K) : f^{-1}(\mathcal{U}') \leqslant \mathcal{U}$
dar $\underset{E}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}$ căci $K \in \mathcal{K}_r$
deci $f(\underset{E}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}) \in f(\mathfrak{F})$
însă $f(\underset{E}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}) = \underset{E'}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}'$ căci
avem $f^{-1}(\mathcal{U}') \leqslant \mathcal{U}$
deci $f|_K(f^{-1}(\mathcal{U}')) \leqslant f|_K(\mathcal{U})$
deci $\mathcal{U}' \leqslant f|_K(\mathcal{U})$
deci $\mathcal{U}' = f|_K(\mathcal{U})$ căci $\mathcal{U}' \in U\,\mathrm{FIL}(f(K))$
de unde $\underset{E'}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}' = f(\underset{E}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U})$ căci
fie $u' \in \mathcal{U}'$ atunci $u' \in f|_K(\mathcal{U})$
deci $(\exists)\, u \in \mathcal{U} : f(u) \subseteq u'$;
fie $u \in \mathcal{U}$ atunci $f(u) \in \mathcal{U}'$,
deci $\mathrm{fil}_{E'}\, \mathcal{U}' \in f(\mathfrak{F})$.

Însă Σ' verifică condițiile 1) — 6) ale definiției lui Σ' deci $\Sigma' \leqslant \Sigma'$; totodată se vede simplu că pentru orice $\Sigma_1' \in PT(E')$ care verifică aceste condiții avem $\Sigma_1' \leqslant \Sigma'$; de unde $\Sigma' \leqslant \Sigma'$, deci în definitiv egalitatea lor.

2) Fie Σ'' structura formată cu expresiile din membrul drept al relațiilor de la punctul 2);

avem $\Sigma'' \in PT(E')$ deoarece

(PT 1), (PT 2) și (PT 3) se verifică imediat;

(PT 4) se verifică întrucît

fie $D \in \mathcal{D}$, $x' \in E'$, $\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}_{x'}'' \cap \underset{E'-g^{-1}(D)}{\mathrm{FIL}}(E')$

atunci $g(\mathcal{F}'') \in \mathfrak{F}_{g(x')}$

dar $g(\mathcal{F}'') \in \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}(E)$ căci

fie $F \in g(\mathcal{F}'')$ atunci $(\exists) F'' \in \mathcal{F}'' : g(F'') \subseteq F$

dar $(\exists) F_1'' \in \mathcal{F}'' : F_1'' \subseteq F'' \cap (E' - g^{-1}(D))$

deci $g(F_1'') \subseteq F \cap (E - D)$ căci

avem $F_1'' \subseteq E' - g^{-1}(D) \Rightarrow g(F_1'') \subseteq g(E' - g^{-1}(D)) \subseteq E - g(g^{-1}(D)) = E - D$

și $g(F_1'') \in g(\mathcal{F}'')$,

deci $g(x') \in E - D$ căci $D \in \mathcal{D}$

deci $g(x') \notin D$ de unde $x' \notin g^{-1}(D)$

deci $x' \in E' - g^{-1}(D)$;

(PT 5) se verifică deoarece

fie $I \in \mathcal{J}$, $x' \in E'$, $\mathcal{F}'' \in \mathfrak{F}_{x'}'' \cap \underset{g^{-1}(I)}{\mathrm{FIL}}(E')$

atunci $g(\mathcal{F}'') \in \mathfrak{F}_{g(x')}$

dar $g(\mathcal{F}'') \in \underset{I}{\mathrm{FIL}}(E)$ căci

fie $F \in g(\mathcal{F}'')$ atunci $(\exists) F'' \in \mathcal{F}'' : g(F'') \subseteq F$

dar $(\exists) F_1'' \in \mathcal{F}'' : F_1'' \subseteq F'' \cap g^{-1}(I)$

deci $g(F_1'') \subseteq F \cap I$ căci

avem $F_1'' \subseteq g^{-1}(I) \Rightarrow g(F_1'') \subseteq g(g^{-1}(I)) = I$

și $g(F_1'') \in g(\mathcal{F}'')$

deci $g(x') \in I$ căci $I \in \mathcal{J}$

de unde $x' \in g^{-1}(g(x')) \subseteq g^{-1}(I)$;

(PT 6) fie $K'' \subseteq E'$ ca $g(K'') \in \mathfrak{K}_r$

fie $\mathcal{U}'' \in U\,\mathrm{FIL}(K'')$

atunci $g|_{K''}(\mathcal{U}'') \in U\,\mathrm{FIL}(g(K''))$

deci $\underset{E}{\mathrm{fil}}\, g|_{K''}(\mathcal{U}'') \in \mathfrak{F}$

dar $\underset{E}{\mathrm{fil}}\, g|_{K''}(\mathcal{U}'') = g(\underset{E'}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}'')$

deci $g(\underset{E'}{\mathrm{fil}}\, \mathcal{U}'') \in \mathfrak{F}$.

Însă Σ'' verifică condițiile 1) – 6) ale definiției lui Σ_g deci $\Sigma_g \leqslant \Sigma''$, totodată se vede simplu că pentru orice $\Sigma_1'' \in PT(E')$ care verifică aceste condiții avem $\Sigma'' \leqslant \Sigma_1''$ de unde $\Sigma'' \leqslant \Sigma_g$ deci în definitiv $\Sigma_g = \Sigma''$.

3) fie $g : E' \to E$ ca $g(x) = x$

atunci $\Sigma|_{E'} = \Sigma_g$ deci conform cu punctul 2) rezultă că

$$\mathfrak{F}|_{E'} = \{\mathcal{F}' \in \mathrm{FIL}(E') \mid \operatorname{fil}_E \mathcal{F}' \in \mathfrak{F}\};$$

$$(\forall)\, x \in E' : \mathfrak{F}_x|_{E'} = \{\mathcal{F}' \in \mathrm{FIL}(E') \mid \operatorname{fil}_E \mathcal{F}' \in \mathfrak{F}_x\};$$

$$(\forall)\, \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}|_{E'} :$$

$$R|_{E'}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow R(\operatorname{fil}_E \mathcal{F}', \operatorname{fil}_E \mathcal{G}');$$

$$\mathcal{D}|_{E'} = \{D \cap E' \mid D \in \mathcal{D}\};$$

$$\mathcal{J}|_{E'} = \{I \cap E' \mid I \in \mathcal{J}\};$$

$$\mathfrak{K}_r|_{E'} = \{K' \subseteq E' \mid K' \in \mathfrak{K}_r\} = \mathfrak{K}_r \cap \mathcal{P}(E').$$

COROLARUL 1. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $\Sigma \in PT(E)$, $f : E \to E'$ *atunci* $\Sigma^{f_1} = \Sigma^f|_{f(E)}$, *unde* $f_1 : E \to f(E)$ *ca* $f_1(x) = f(x)$ *pentru* $x \in E$.

Demonstrație. Fie $\Sigma^f = (\mathfrak{F}^f, (\mathfrak{F}^f_{x'} \mid x' \in E'), R^f, \mathcal{D}^f, \mathcal{J}^f, \mathfrak{K}_r{}^f)$ și $\Sigma^f|_{f(E)} = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in f(E)), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_r')$.

Atunci din propoziția 1 (punctele 1) și 3)) rezultă că

$$\mathfrak{F}' = \{\mathcal{F}' \cap \mathcal{P}(f(E)) \mid \mathcal{F}' \in \mathfrak{F}^f \cap \mathrm{FIL}_{f(E)}(E')\} = f_1(\mathfrak{F})$$

și $(\forall)\ x' \in f(E)$:

$$\mathfrak{F}'_{x'} = \{\mathcal{F}' \cap \mathcal{P}(f(E)) \mid \mathcal{F}' \in \Big(\bigcup_{x \in f^{-1}(x')} f(\mathfrak{F}_x)\Big) \cap \mathrm{FIL}_{f(E)}(E')\} =$$

$$= \bigcup_{x \in f_1^{-1}(x')} f_1(\mathfrak{F}_x)$$

și $(\forall)\ \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'$:

$$R'(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \Leftrightarrow R^f(\operatorname{fil}_{E'} \mathcal{F}', \operatorname{fil}_{E'} \mathcal{G}') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\exists)\, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : \mathcal{F}' = f_1(\mathcal{F}), \mathcal{G}' = f_1(\mathcal{G}), R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \text{sau} \\ (\exists)\, x' \in f(E) : \mathcal{F}', \mathcal{G}' \in \mathfrak{F}'_{x'} \end{pmatrix}$$

iar $\mathcal{D}' = \{D' \cap f(E) \mid D' \in \mathcal{D}^f\} = \{D' \cap f(E) \mid f^{-1}(D') \in \mathcal{D}\} =$

$$= \{D' \subseteq f(E) \mid f_1^{-1}(D') \in \mathcal{D}\},$$

$$\mathcal{J}' = \{I' \cap f(E) \mid I' \in \mathcal{J}^f\} = \{I' \cap f(E) \mid f^{-1}(I') \in \mathcal{J}\} =$$

$$= \{I' \subseteq f(E) \mid f_1^{-1}(I') \in \mathcal{J}\},$$

$$\mathfrak{K}_r' = \mathfrak{K}_r{}^f \cap \mathcal{P}(f(E)) = f_1(\mathfrak{K}_r) \cup \{K' \subseteq f(E) \mid K' \text{ finită}\}.$$

De aici rezultă că

$$\Sigma^{f_1} = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in f(E)), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_r') \text{ adică } \Sigma^{f_1} = \Sigma^f|_{f(E)}.$$

Definiția 2. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $\Sigma \in PT(E)$, $\Sigma' \in PT(E')$.

Spunem că Σ *și* Σ' *sînt izomorfe numai dacă*

$$(\exists)\ f : E \to E' \text{ biunivocă, pe :}$$

$$\Sigma' = \Sigma^f.$$

În acest caz numim aplicația f *izomorfism între* Σ *și* Σ'.

Propoziția 2. *În condițiile definiției 2 dacă* f *este o aplicație biunivocă, pe, atunci*

1) $\Sigma^f = \Sigma_f^{-1} = (f(\mathfrak{F}), (f(\mathfrak{F}_x) \mid x \in E), R_0(f^{-1}, f^{-1}), f(\mathcal{D}), f(\mathcal{J}), f(\mathfrak{K}_r))$,

2) $\Sigma_f' = \Sigma'^{f^{-1}} = (f^{-1}(\mathfrak{F}'), (f^{-1}(\mathfrak{F}'_{x'}) \mid x' \in E'), R_0'(f,f), f^{-1}(\mathcal{D}'), f^{-1}(\mathcal{J}'),$
$f^{-1}(\mathfrak{K}_r'))$.

Demonstrația rezultă din punctele 1) și 2) ale propoziției 1.

Teorema 1. *În condițiile definiției 2, aplicația* f *este un izomorfism între* Σ *și* Σ' *numai dacă avem una din relațiile*

1) $\Sigma = \Sigma_f'$,

2) $\Sigma = \Sigma'^{f^{-1}}$,

3) $\Sigma' = \Sigma_{f^{-1}}$.

Demonstrația rezultă din propoziția 2.

Corolarul 2. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $\Sigma \in PT(E)$, $f : E \to E'$ *biunivocă. Atunci* Σ *și* $\Sigma^f \mid_{f(E)}$ *sînt izomorfe prin aplicația* $f_1 : E \to f(E)$, *unde* $f_1(x) = f(x)$ *pentru* $x \in E$.

Demonstrația rezultă din teorema 1 și corolarul 1.

Teorema 2. *Fie* $E, E' \in \mathfrak{M}$, $\Theta = (\Sigma, \Sigma', \Phi, \Phi_u) \in PT(E,E')$. *Atunci* $(\forall)\ f \in \Phi_u$:

$$\Sigma' \leqslant \Sigma^f$$

$$\Sigma_f' \leqslant \Sigma$$

Demonstrație. Fie $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r)$ și $\Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_{x'} \mid x' \in E'), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_r')$. Atunci $f(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}'$

$$\text{și } (\forall)\ x \in E : f(\mathfrak{F}_x) \subseteq \mathfrak{F}'_{f(x)}$$

$$\text{și } (\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow R'(f(\mathcal{F}), f(\mathcal{G}))$$

iar $f^{-1}(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{D}$

$f^{-1}(\mathcal{J}') \subseteq \mathcal{J}$

$f(\mathfrak{K}_r) \subseteq \mathfrak{K}_r'$;

de aici rezultă că $\Sigma' \leqslant \Sigma^f$ și de asemenea $\Sigma' \leqslant \Sigma$.

II. PSEUDOTOPOLOGII METRIZABILE

§ 1. DEFINIREA

1. Spații pseudotopologice metrizabile

Definiția 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$; *numim spațiu pseudotopologic metrizabil pe* E *orice spațiu pseudotopologic* $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{N}_r)$ pe E, care verifică

(PTM1) $(\forall)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F} : (\exists)\ \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F} \cap \mathrm{FIL}^\circ(E)$:

(PTM1.1) $\mathcal{F}_0 \leqslant \mathcal{F}$

(PTM1.2) $R(\mathcal{F}_0, \mathcal{F})$

(PTM2) $(\forall)\ x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x : (\exists)\ \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}_x \cap \mathrm{FIL}^\circ(E) : \mathcal{F}_0 \leqslant \mathcal{F}$.

Mulțimea spațiilor pseudotopologice metrizabile pe E le notăm cu $PTM(E)$. Notăm cu $PTM'(E)$ acele spații pseudotopologice pe E care verifică doar condiția (PTM1) și le numim semimetrizabile.

Observația 1. Este evident faptul că spațiile pseudotopologice metrizabile generalizează acele structuri uniforme care pot fi definite cu ajutorul unei semidistanțe.

2. Structuri pseudotopologice metrizabile

Definiția 2. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ cu $i = 0,1$; notăm cu $PTM(E_0, E_1)$ acele structuri pseudotopologice Θ pe (E_0, E_1) pentru care $\pi_0(\Theta) \in PTM(E_0)$ iar $\pi_1(\Theta) \in PTM(E_1)$ și le numim metrizabile; pe cele pentru care $\pi_0(\Theta) \in PTM'(E_0)$ sau $\pi_1(\Theta) \in PTM'(E_1)$ le numim semimetrizabile iar mulțimea lor o notăm cu $PTM'(E_0, E_1)$.

§ 2. STRUCTURI MARGINE

1. În spații pseudotopologice

TEOREMA 1. *Fie* $E \in \mathfrak{M}$, $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *o familie de spații pseudotopologice metrizabile (semimetrizabile) pe* E, *atunci* $\inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este un spațiu pseudotopologic metrizabil (semimetrizabil) pe* E.

Dacă Λ *este numerabilă și familia verifică condiția* (PTO) (*respectiv* (PTO')) *atunci* $\sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este un spațiu pseudotopologic metrizabil (semimetrizabil) pe* E, *unde prin condiția* (PTO) *înțelegem*

(PTO1) $(\forall)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{FIL}(E), \mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}$:

(PTO1.1) $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$

(PTO1.2) $R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

(PTO2) $(\forall)\ x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x, \mathcal{G} \in \mathrm{FIL}(E), \mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} : \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$

iar prin condiția (PTO') *înțelegem doar* (PTO1).

Demonstrație. Fie $\Sigma_\lambda=(\mathfrak{F}^\lambda,(\mathfrak{F}_x^\lambda \mid x\in E),R^\lambda,\mathcal{D}^\lambda,\mathcal{J}^\lambda,\mathfrak{K}_i^\lambda)$; atunci $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}^\lambda$ și $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda$ reprezintă filtrele Cauchy, respectiv convergente spre x, în spațiul inf $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$.

Fie $\mathcal{F}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}^\lambda$; atunci $(\exists)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}\in\mathfrak{F}^\lambda$ deci $(\exists)\ \mathcal{F}_0\in\mathfrak{F}^\lambda\cap \mathrm{FIL}^\circ(E) : \mathcal{F}_0\leqslant\mathcal{F}$, $R^\lambda(\mathcal{F}_0,\mathcal{F})$ dat fiind că $\Sigma_\lambda\in PTM'(E)$; dar conform cu punctul 4) al teoremei 1 de la capitolul I, § 3, 1, avem $\mathcal{F}_0,\mathcal{F}\in\mathfrak{F}^\lambda$, $R^\lambda(\mathcal{F}_0,\mathcal{F})\Rightarrow \underline{R}(\mathcal{F}_0,\mathcal{F})$, unde $\underline{R}$ este relația binară între filtrele Cauchy din inf $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$.

Deci inf $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ verifică (PTM1).

Fie $x\in E, \mathcal{F}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda$; atunci $(\exists)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}\in\mathfrak{F}_x^\lambda$

deci $(\exists)\ \mathcal{F}_0\in\mathfrak{F}_x^\lambda\cap \mathrm{FIL}^\circ(E) : \mathcal{F}_0\leqslant\mathcal{F}$ deoarece $\Sigma_\lambda\in PTM(E)$,

iar $\mathcal{F}_0\in\mathfrak{F}_x^\lambda\Rightarrow\mathcal{F}_0\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda$ deci inf $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ verifică condiția (PTM2).

Filtrele Cauchy, respectiv convergente spre x, în spațiul sup $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ sînt cele date de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}^\lambda$, respectiv $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda$.

Fie $\mathcal{F}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}^\lambda$; atunci $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : (\exists)\ \mathcal{F}_{0\lambda}\in\mathfrak{F}^\lambda\cap \mathrm{FIL}^\circ(E) : \mathcal{F}_{0\lambda}\leqslant\mathcal{F}$, $R^\lambda(\mathcal{F}_{0\lambda},\mathcal{F})$ deoarece $\Sigma_\lambda\in PTM'(E)$.

Fie $\mathcal{F}_0=\sup(\mathcal{F}_{0\lambda} \mid \lambda\in\Lambda)$. Acest superior există deoarece $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}_{0\lambda}\leqslant\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}\in\mathrm{FIL}(E)$. Din faptul că Λ este cel mult numărabilă și $\mathcal{F}_{0\lambda}\in\mathrm{FIL}^0(E)$ rezultă că $\mathcal{F}_0\in\mathrm{FIL}^\circ(E)$. Dar $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}_{0\lambda}\leqslant\mathcal{F}_0\leqslant\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_{0\lambda}\in\mathfrak{F}^\lambda$ deci $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}_0\in\mathfrak{F}^\lambda$, $R^\lambda(\mathcal{F}_0,\mathcal{F})$ dat fiind că Σ_λ verifică (PTO1) deci $\mathcal{F}_0\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}^\lambda\right)\cap\mathrm{FIL}^\circ(E)$ și $\overline{R}(\mathcal{F}_0\,\mathcal{F})$, unde prin $\overline{R}$ am notat relația binară dintre filtrele Cauchy în sup $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$. Rezultă că sup $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ verifică condiția (PTM1).

Fie $x\in E, \mathcal{F}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda$; atunci

$(\forall)\ \lambda\in\Lambda : (\exists)\ \mathcal{F}_{0\lambda}\in\mathfrak{F}_x^\lambda\cap\mathrm{FIL}^\circ(E) : \mathcal{F}_{0\lambda}\leqslant\mathcal{F}$ dat fiind că $\Sigma_\lambda\in PTM(E)$.

Fie $\mathcal{F}_0=\sup(\mathcal{F}_{0\lambda} \mid \lambda\in\Lambda)$; atunci ca și mai sus rezultă că $\mathcal{F}_0\in\mathrm{FIL}^\circ(E)$.

Dar $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}_{0\lambda}\leqslant\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_{0\lambda}\in\mathfrak{F}_x^\lambda$ deci $(\forall)\ \lambda\in\Lambda : \mathcal{F}_0\in\mathfrak{F}_x^\lambda$ deoarece Σ_λ verifică (PTO) deci $\mathcal{F}_0\in\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{F}_x^\lambda\right)\cap\mathrm{FIL}^0(E)$ și $\mathcal{F}_0\leqslant\mathcal{F}$, de unde rezultă că sup $(\Sigma_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ verifică condiția (PTM2).

2. În structuri pseudotopologice

Teorema 2. *Fie $E_i\in\mathfrak{M}$ cu $i=0,1$ și fie $(\Theta_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$, $(\Theta'_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ două familii de structuri pseudotopologice metrizabile (semimetrizabile) pe (E_0,E_1) astfel încît:*

1) $(\exists)\ \Sigma_1\in PT(E_1) : (\forall)\ \lambda\in\Lambda : \pi_1(\Theta_\lambda)=\Sigma_1$,

2) $(\exists)\ \Sigma_0\in PT(E_0) : (\forall)\ \lambda\in\Lambda : \pi_0(\Theta'_\lambda)=\Sigma_0$;

atunci inf $(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *și* sup $(\Theta'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *sînt metrizabile (semimetrizabile).*

Demonstrația rezultă din teorema 1.

TEOREMA 3. *Fie* $E_i \in \mathfrak{M}$ *cu* $i = 0,1$ *și* $(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *o familie numerabilă de structuri pseudotopologice metrizabile (semimetrizabile) pe* $(E_0\ E_1)$.

Dacă spațiile pseudotopologice $\pi_0\ (\Theta_\lambda)$ *cu* $\lambda \in \Lambda$ *verifică condiția* (PTO) *(respectiv* (PTO')*), atunci* sup $(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este o structură pseudotopologică metrizabilă (semimetrizabilă) pe* (E_0, E_1).

Dacă spațiile pseudotopologice $\pi_1(\Theta_\lambda)$ *cu* $\lambda \in \Lambda$ *verifică condiția* (PTO) *(respectiv* (PTO')*), atunci* inf $(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este metrizabilă (semimetrizabilă).*

Demonstrația rezultă din teorema 1.

III. PSEUDOTOPOLOGII ÎN SPAȚII VECTORIALE

§ 1. DEFINIREA

1. Spații vectoriale pseudotopologice

Definiția 1. *Fie* E *un spațiu vectorial peste corpul* K; *notăm cu* $PTV(E)$ *structurile de forma*

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r, \mathcal{M}),$$

unde

(PTV 1) $(\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r) \in PT\ (E)$ *ca*

(PTV1.1) $(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, \alpha, \beta \in K : \alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$,

(PTV1.2) $(\forall)\ x, y \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_y, \alpha, \beta \in K :$

$$\alpha\mathcal{F} + \beta\mathcal{G} \in \mathfrak{F}_{\alpha x + \beta y},$$

(PTV1.3) $(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}, \mathcal{F} - \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_0 : R\ (\mathcal{F}, \mathcal{G})$,

(PTV1.4) $\mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r$ *sînt omogene în* E[1]),

(PTV2) $\{M \subseteq E \mid M \text{ finită}\} \cup \{A \subseteq E \mid (\exists)\ M \in \mathcal{M} : A \subseteq M\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}\ (E)$ *ca*

(PTV2.1) $\mathcal{M}$ *este omogenă în* E,

(PTV2.2) $(\forall)\ M \in \mathcal{M}, \mathcal{F} \in \underset{M}{\mathrm{FIL}}\ (E), \varphi : E \to K :$

$$\lim_{\mathcal{F}} \varphi\ (x) = 0 \Rightarrow \varphi \cdot \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0\ ^2),$$

și le numim spații vectoriale pseudotopologice pe E.

---

[1]) Spunem că $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\ (E)$ este omogenă în E dacă 1) $(\forall)\ A \in \mathcal{A}, x \in E : x + A \in \mathcal{A}$; 2) $(\forall)\ A \in \mathcal{A}, \alpha \in K, \alpha \neq 0 : \alpha A \in \mathcal{A}$.

[2]) Prin $\varphi \cdot \mathcal{F}$ am notat filtrul pe E generat de

$$\{\{\varphi\ (x) \cdot x \mid x \in F\} \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

Observația 1. Mulțimile din $\mathcal{M}$ generalizează mulțimile mărginite din E.

Propoziția 1. *Avem*

1) $(\forall)\ x \in E : \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_0 + \mathcal{U}_x$, [1])

2) $(\forall)\ x, y \in E : \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y + \mathcal{U}_{x-y}$.

Demonstrație. 1) Incluziunea $\supseteq$ rezultă din (PTV1.2); fie $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_x$. Atunci $\mathcal{F} - \mathcal{U}_x \in \mathcal{F}_0$ dat fiind că (PTV1.2). Dar $\mathcal{F} = (\mathcal{F} - \mathcal{U}_x) + \mathcal{U}_x$ deci $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_0 + \mathcal{U}_x$.

2) se demonstrează analog cu 1).

2. Structuri vectoriale pseudotopologice

Definiția 2. *Fie E_i cu $i = 0,1$ spații vectoriale peste corpul K; notăm cu $PTV\ (E_0, E_1)$ structurile de forma*

$$((\mathcal{F}^0, (\mathcal{F}^0_{x_0} \mid x_0 \in E_0), R^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{J}^0, \mathcal{K}_r{}^0, \mathcal{M}^0), (\mathcal{F}^1, (\mathcal{F}^1_{x_1} \mid x_1 \in E_1), R^1, \mathcal{D}^1, \mathcal{J}^1, \mathcal{K}_r{}^1, \mathcal{M}^1), \Phi, \Phi_u),$$

unde

(PTV3) $(\mathcal{F}^i, (\mathcal{F}^i_{x_i} \mid x_i \in E_i), R^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{J}^i, \mathcal{K}_r{}^i, \mathcal{M}^i) \in PTV\ (E_i)$ *cu* $i = 0,1$,

(PTV4) $((\mathcal{F}^0, (\mathcal{F}^0_{x_0} \mid x_0 \in E_0), R^0, \mathcal{D}^0, \mathcal{J}^0, \mathcal{K}_r{}^0), (\mathcal{F}^1, (\mathcal{F}^1_{x_1} \mid x_1 \in E_1), R^1, \mathcal{D}^1, \mathcal{J}^1, \mathcal{K}_r{}^1), \Phi, \Phi_u) \in PT\ (E_0, E_1)$ *ca*

(PTV4.1) $(\forall)\ f, g \in \Phi, \alpha, \beta \in K : \alpha f + \beta g \in \Phi$,

(PTV4.2) $(\forall)\ f \in \Phi, M_0 \in \mathcal{M}^0 : f(M_0) \in \mathcal{M}^1$,

(PTV4.3) $(\forall)\ f, g \in \Phi_u, \alpha, \beta \in K : \alpha f + \beta g \in \Phi_u$,

și le numim structuri vectoriale pseudotopologice.

3. Operatorii π, $\varkappa V$, $\pi\pi$, πV_0, πV_1.

Definiția 3. *Fie E un spațiu vectorial peste corpul K și fie $\Sigma = (\mathcal{F}, (\mathcal{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathcal{K}_r, \mathcal{M}) \in PTV(E)$; notăm $\pi(\Sigma) = (\mathcal{F}, (\mathcal{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathcal{K}_r)$. Evident $\pi(\Sigma) \in PT(E)$. Notăm $\varkappa V(\Sigma) = (\Sigma, \Sigma, \Phi, \Phi_u)$, unde $\Phi = \Phi_u$ este format din toate aplicațiile constante ale lui E în E. Evident $\varkappa V(\Sigma) \in PTV\ (E,E)$.*

Definiția 4. *Fie E_i cu $i = 0,1$ spații vectoriale peste corpul K și fie $\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u) \in PTV(E_0, E_1)$; notăm $\pi\pi(\Theta) = (\pi(\Sigma_0), \pi(E_1), \Phi, \Phi_u)$.*

Evident $\pi\pi(\Theta) \in PT\ (E_0, E_1)$. Notăm $\pi V_0\ (\Theta) = \Sigma_0$ și $\pi V_1\ (\Theta) = \Sigma_1$. Evident $\pi V_0\ (\Theta) \in PTV(E_0)$ și $\pi V_1\ (\Theta) \in PTV(E_1)$ și $\pi V_0(\varkappa V\ (\Sigma)) = \pi V_1(\varkappa V(\Sigma)) = \Sigma$.

4. O clasă de pseudotopologii vectoriale

În aplicații se întîlnește des următoarea clasă de spații vectoriale, respectiv structuri vectoriale pseudotopologice :

---

[1]) Prin $\mathcal{F}_x + \mathcal{U}_y$ am notat filtrele de forma $\mathcal{F} + \mathcal{U}_y$, unde $\mathcal{F} \in \mathcal{F}_x$.

Definiția 5. *Fie E un spațiu vectorial peste corpul K; notăm cu $PTW(E)$ acele spații vectoriale pseudotopologice $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r, \mathcal{M}) \in PTV(E)$ pentru care*

$$(\text{PTW})\ (\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F} : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow \mathcal{F} - \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_0.$$

Propoziția 2. *Dacă $\Sigma \in PTW(E)$ atunci $(\forall)\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F} : \mathcal{F} - \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_0$.*

Demonstrația rezultă din faptul că Σ verifică condițiile (PTW) și (PT3).

Definiția 6. *Fie E_i cu $i = 0,1$ spații vectoriale peste corpul K; notăm cu $PTW(E_0, E_1)$ acele structuri vectoriale pseudotopologice $\Theta \in PTV(E_0, E_1)$ pentru care $\pi V_0(\Theta) \in PTW(E_0)$ și $\pi V_1(\Theta) \in PTW(E_1)$.*

§ 2. COMPARAREA

1. În spațiile vectoriale pseudotopologice

Definiția 1. *Fie E un spațiu vectorial peste corpul K și fie $\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r, \mathcal{M})$, $\Sigma' = (\mathfrak{F}', (\mathfrak{F}'_x \mid x \in E), R', \mathcal{D}', \mathcal{J}', \mathfrak{K}_r', \mathcal{M}') \in PTV(E)$;* notăm $\Sigma \leqslant \Sigma'$ numai dacă

1) $\pi(\Sigma) \leqslant \pi(\Sigma')$,

2) $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$.

Propoziția 1. *Relația $\leqslant$ este reflexivă și tranzitivă; dacă $\Sigma \leqslant \Sigma'$ și $\Sigma' \leqslant \Sigma$ atunci $\Sigma = \Sigma'$.*

Demonstrația este imediată.

Introducem structura cea mai puțin fină, respectiv cea mai fină, din $PTV(E)$.

Notăm $\underline{\Sigma} = (\underline{\mathfrak{F}}, (\underline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \underline{R}, \underline{\mathcal{D}}, \underline{\mathcal{J}}, \underline{\mathfrak{K}_r}, \underline{\mathcal{M}})$,

unde

1) $(\forall)\ x \in E : \underline{\mathfrak{F}}_x = \underline{\mathfrak{F}} = \text{FIL}(E)$,

2) $(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \underline{\mathfrak{F}} : \underline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,

3) $\underline{\mathcal{D}} = \underline{\mathcal{J}} = \{\varnothing_E E\}$,

4) $\underline{\mathfrak{K}_r} = \underline{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(E)$;

notăm de asemenea

$$\overline{\Sigma} = (\overline{\mathfrak{F}}, (\overline{\mathfrak{F}}_x \mid x \in E), \overline{R}, \overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{J}}, \overline{\mathfrak{K}_r}, \overline{\mathcal{M}}),$$

unde

5) $(\forall)\ x \in E : \overline{\mathfrak{F}}_x = \{\mathcal{U}_x\}$,

6) $\overline{\mathfrak{F}} = \bigcup_{x \in E} \overline{\mathfrak{F}}_x$,

7) $(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \overline{\mathfrak{F}} : \overline{R}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\ x \in E : \mathcal{F} = \mathcal{G} = \mathcal{U}_x$,

8) $\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(E)$,

9) $\overline{\mathfrak{K}_r} = \overline{\mathcal{M}} = \{A \subseteq E \mid A \text{ finită}\}$.

Propoziția 2. *Avem*

1) $\underline{\Sigma}, \overline{\Sigma} \in PTV(E)$,

2) $(\forall)\ \Sigma \in PTV(E)$: $\underline{\Sigma} \leqslant \Sigma \leqslant \overline{\Sigma}$,

3) $(\forall)\ \Sigma \in PT(E)$: $\pi(\underline{\Sigma}) \leqslant \Sigma \leqslant \pi(\overline{\Sigma})$.

Demonstrația este imediată.

2. În structurile vectoriale pseudotopologice

Definiția 2. *Fie* E_i *cu* $i = 0,1$ *spații vectoriale peste corpul* K *și fie* $\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u)$, $\Theta' = (\Sigma_0', \Sigma_1', \Phi', \Phi_u') \in PTV(E_0, E_1)$;

notăm $\Theta \leqslant \Theta'$ *numai dacă*

1) $\Sigma_0 \leqslant \Sigma_0'$,

2) $\Sigma_1 \geqslant \Sigma_1'$,

3) $\Phi \subseteq \Phi'$,

4) $\Phi_u \subseteq \Phi_u'$.

Propoziția 3. *Relația* $\leqslant$ *este reflexivă și tranzitivă pe* $PTV(E_0, E_1)$; *dacă* $\Theta \leqslant \Theta'$ *și* $\Theta' \leqslant \Theta$ *atunci* $\Theta = \Theta'$.

Demonstrația este imediată.

Introducem cea mai puțin fină și cea mai fină structură vectorială pseudotopologică din $PTV(E_0, E_1)$.

Notăm $\underline{\Theta} = (\underline{\Sigma}_0, \underline{\Sigma}_1, \underline{\Phi}, \underline{\Phi}_u)$,

unde

1) $\underline{\Sigma}_0$ este cea mai puțin fină din $PTV(E_0)$,

2) $\underline{\Sigma}_1$ este cea mai fină din $PTV(E_1)$,

3) $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}_u$ este format din funcțiile constante definite pe E_0 cu valori în E_1;

notăm de asemenea

$$\overline{\Theta} = (\overline{\Sigma}_0, \overline{\Sigma}_1, \overline{\Phi}, \overline{\Phi}_u),$$

unde

4) $\overline{\Sigma}_0$ este cea mai fină din $PTV(E_0)$,

5) $\overline{\Sigma}_1$ este cea mai puțin fină din $PTV(E_0)$,

6) $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_u$ este format din toate aplicațiile lui E_0 în E_1.

Propoziția 4. *Avem*

1) $\underline{\Theta}, \overline{\Theta} \in PTV(E_0, E_1)$,

2) $(\forall)\ \Theta \in PTV(E_0, E_1)$: $\underline{\Theta} \leqslant \Theta \leqslant \overline{\Theta}$,

3) $(\forall)\ \Theta \in PT(E_0, E_1)$: $\pi\pi(\underline{\Theta}) \leqslant \Theta \leqslant \pi\pi(\overline{\Theta})$.

Demonstrația este imediată.

§ 3. PSEUDOTOPOLOGII VECTORIALE MARGINE

1. În spații vectoriale pseudotopologice

D e f i n i ț i a 1. *Fie E un spațiu vectorial peste corpul K și fie*

$$(\Sigma_\lambda = (\mathfrak{F}^\lambda, (\mathfrak{F}^\lambda_x \mid x \in E), R^\lambda, \mathcal{D}^\lambda, \mathcal{J}^\lambda, \mathfrak{N}_\nu^\lambda, \mathcal{M}^\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$$

o familie de spații vectoriale pseudotopologice pe E.

Definim

$$\sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\sup(\pi(\Sigma_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda), \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}^\lambda),$$

$$\inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\inf(\pi(\Sigma_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda), \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{M}^\lambda).$$

TEOREMA 1. *În condițiile definiției* 1 *avem*

1) $\sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda), \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PTV(E)$,

2) $(\forall)\ \mu \in \Lambda : \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \leqslant \Sigma_\mu \leqslant \sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

3) $(\forall)\ \Sigma \in PTV(E)$:

3.1) $((\forall)\ \lambda \in \Lambda : \Sigma \leqslant \Sigma_\lambda) \Rightarrow \Sigma \leqslant \inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

3.2) $((\forall)\ \lambda \in \Lambda : \Sigma \geqslant \Sigma_\lambda) \Rightarrow \Sigma \geqslant \sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$.

Dacă $\Sigma_\lambda \in PTW(E)$ *cu* $\lambda \in \Lambda$ *atunci*

4) $\sup(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PTW(E)$,

5) *dacă* $(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ *este dirijată* $\geqslant$ *atunci* $\inf(\Sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PTW(E)$.

D e m o n s t r a ț i a rezultă din teorema 1 de la capitolul I, §3,1.

2. În structuri vectoriale pseudotopologice

D e f i n i ț i a 2. *Fie E_i cu $i = 0,1$ spații vectoriale peste corpul K și fie $(\Theta_\lambda = (\Sigma_{0\lambda}, \Sigma_{1\lambda}, \Phi_\lambda, \Phi_{u\lambda}) \mid \lambda \in \Lambda)$ o familie de structuri vectoriale pseudotopologice pe (E_0, E_1).*

Definim

$$\sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\overline{\Sigma}_0, \overline{\Sigma}_1, \overline{\Phi}, \overline{\Phi}_u),$$

unde

1) $\overline{\Sigma}_0 = \sup(\Sigma_{0\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

$\overline{\Sigma}_1 = \inf(\Sigma_{1\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

2) $\overline{\Phi} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$, $\overline{\Phi}_u = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{u\lambda}$;

de asemenea, definim

$$\inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) = (\underline{\Sigma}_0, \underline{\Sigma}_1, \underline{\Phi}, \underline{\Phi}_u),$$

unde

3) $\underline{\Sigma}_0 = \inf(\Sigma_{0\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

$\underline{\Sigma}_1 = \sup(\Sigma_{1\lambda} \mid \lambda \in \Lambda)$,

4) $\underline{\Phi} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Phi_\lambda$, $\underline{\Phi}_u = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{u\lambda}$.

TEOREMA 2. *În condițiile definiției 2 avem*

1) $\sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PTV(E_0, E_1)$,

2) $(\forall)\ \mu \in \Lambda : \Theta_\mu \leqslant \sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$,

3) $(\forall)\ \Theta \in PTV(E_0, E_1)$:

$$((\forall)\ \lambda \in \Lambda : \Theta \geqslant \Theta_\lambda) \Rightarrow \Theta \geqslant \sup(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda).$$

Dacă

$$(\exists)\ \Sigma_0 \in PTV(E_0) : (\forall)\ \lambda \in \Lambda : \pi V_0(\Theta_\lambda) = \Sigma_{0\lambda} = \Sigma_0$$

sau dacă

$$(\exists)\ \Sigma_1 \in PTV(E_1) : (\forall)\ \lambda \in \Lambda : \pi V_1(\Theta_\lambda) = \Sigma_{1\lambda} = \Sigma_1,$$

atunci

4) $\inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \in PTV(E_0, E_1)$,

5) $(\forall)\ \mu \in \Lambda : \inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda) \leqslant \Theta_\mu$,

6) $(\forall)\ \Theta \in PTV(E_0, E_1)$:

$$((\forall)\ \lambda \in \Lambda : \Theta \leqslant \Theta_\lambda) \Rightarrow \Theta \leqslant \inf(\Theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda).$$

Demonstrația rezultă din teorema 2 de la capitolul I, § 3,2.

OBSERVAȚII

Într-o lucrare ulterioară se vor expune construcțiile de separare completare și separarea completatului unei structuri pseudotopologice de asemenea și unele aplicații.

În privința axiomelor de compatibilitate pe care le satisfac noțiunile topologice din cadrul unei structuri pseudotopologice, poate avea loc una din următoarele două situații :

a) există un minim (nebanal) de legături pe care le verifică majoritatea, dacă nu chiar toate, procesele topologice cunoscute ;

b) nu are loc situația de la *a*.

În al doilea caz rămîne ca pentru fiecare tip de legături să se edifice o teorie proprie.

Deci în cazul în care sistemul de legături folosit în lucrare nu ar satisface condiția *a* de sus, ar urma ca construcția propusă în lucrare să constituie una din teoriile topologice posibile.

Primită la redacție la 14 noiembrie 1962

ПСЕВДОТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

РЕЗЮМЕ

В работе предлагается псевдотопологическая структура, не связанная с векторными пространствами, с целью избежать следующие два недостатка обычных топологий:

1) неудовлетворительное включение некоторых процессов топологической природы,

2) трудности при нижнем и верхнем граничных переходах.

Основная идея предлагаемого построения состоит в определении псевдотопологической структуры как комплекса топологических понятий, относительно независимых, в том смысле, что

1 — связь между топологическими понятиями не является крайне жесткой, как в обычной топологии, где одно основное топологическое понятие — понятие открытого множества или другое эквивалентное — определяет единственным образом все остальные понятия, а эта связь проявляется только в том, что топологические понятия удовлетворяют некоторым аксиомам совместимости;

2 — существует группа топологических понятий первостепенной важности: фильтр Коши, сходящийся фильтр и топологическая эквивалентность фильтров Коши, причем последнее свойственно предлагаемому построению.

Отметим, что совокупность псевдотопологий в смысле настоящей работы образует более широкую категорию, чем категория, определенная Эйленбергом — Мак Лейном.

Прежде чем определить псевдотопологическую структуру, определяется понятие псевдотопологического пространства над непустым множеством E как структура вида

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r),$$

где $\mathfrak{F}$ представляет фильтры Коши, $\mathfrak{F}_x$ — сходящиеся к x фильтры, R — топологическая эквивалентность фильтров Коши, $\mathcal{D}$ — „открытые" множества, $\mathcal{J}$ — „закрытые" множества, а $\mathfrak{K}_r$ — относительно компактные множества. Если над E определялась обыкновенная неравномерная топология, то будем считать

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{F}_x,$$

а для $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathfrak{F}$

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\, x \in E : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x$$

будем считать $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ обычным образом, а $\mathfrak{K}_r$ — образованным из частей E, на которых любой ультрафильтр сходится.

Аксиомы совместимости, которым по определению удовлетворяют топологические понятия из Σ — следующие:

(PT1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}(E)$;

(PT2) $(\forall)\, x \in E : \mathcal{U}_x \in \mathfrak{F}_x \subseteq \mathfrak{F}$;

(PT3) R возвратная, симметричная, и

$(\forall)\, x \in E, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x : R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$;

(PT4) $\{\Phi_E, E\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ как

$(\forall)\, D \in \mathcal{D}, x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \bigcap_{E-D} \mathrm{FIL}(E) : x \in E - D$;

(PT5) $\{\Phi_E, E\} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ как

$$(\forall)\ I \in \mathcal{J},\ x \in E,\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \bigcap_I \mathrm{FIL}\,(E) : x \in I;$$

(PT6) $\{K \subseteq E \mid K \text{ конечная}\} \subseteq \mathfrak{K}_r \subseteq \mathcal{P}(E)$ как

$$(\forall)\ K \in \mathfrak{K}_r,\ \mathcal{F} \in U_E \mathrm{FIL}\,(K) : \mathrm{fil}\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}.$$

Множество псевдотопологических пространств над E обозначается через $PT\,(E)$

В том случае, если E — векторное пространство, в состав Σ вводится еще и понятие „ограниченного" множества, а к аксиомам о связи добавляются аксиомы, специфические для векторных топологий.

Псевдотопологическая структура определяется над парой (E_0, E_1) непустых множеств как любая структура вида

$$\Theta = (\Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \Phi,\ \Phi_u),$$

где $\Sigma_0 \in PT\,(E_0)$, $\Sigma_1 \in PT\,(E_1)$, Φ представляет собой множество непрерывных функций, а Φ_u — множество „равномерно непрерывных" функций, определенных на E_0 и со значениями в E_1. В том случае, если над E_0 или E_1 определялась обыкновенная неравномерная топология, будем считать $\Phi = \Phi_u$.

Аксиомами совместимости являются:

(PT7) $\Sigma_0 \in PT\,(E_0),\ \Sigma_1 \in PT\,(E_1)$;

(PT8) Φ — подмножество множества приложений E_0 в E_1, так что

(PT8.1) $(\forall)\ f \in \Phi,\ x_0 \in E_0,\ \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}^0_{x_0} : f\,(\mathcal{F}_0) \in \mathfrak{F}^1_{f(x_0)}$,

(PT8.2) $(\forall)\ f \in \Phi,\ D_1 \in \mathcal{D}^1 : f^{-1}\,(D_1) \in \mathcal{D}^0$,

(PT8.3) $(\forall)\ f \in \Phi,\ I_1 \in \mathcal{J}^1 : f^{-1}\,(I_1) \in \mathcal{J}^0$;

(PT9) $\Phi_u \subseteq \Phi$ как

(PT9.1) постоянные приложения принадлежат Φ_u,

(PT9.2) $(\forall)\ f \in \Phi_u,\ \mathcal{F}_0,\ \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}^0,\ R^0\,(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0) :$
$f\,(\mathcal{F}_0), f\,(\mathcal{G}_0) \in \mathfrak{F}^1,\ R^1\,(f\,(\mathcal{F}_0), f\,(\mathcal{G}_0))$,

(PT9.3) $(\forall)\ f \in \Phi_u,\ K_0 \in \mathfrak{K}_r{}^0 : f\,(K_0) \in \mathfrak{K}_r{}^1$.

Множество псевдотопологических структур над парой (E_0, E_1) обозначается через $PT\,(E_0, E_1)$.

Сравнение псевдотопологических пространств определяется так: пусть $\Sigma_i = (\mathfrak{F}^i, (\mathfrak{F}^i_x \mid x \in E), R^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{J}^i, \mathfrak{K}_r{}^i) \in PT\,(E)$ при $i = 0,1$; пишем $\Sigma_0 \leqslant \Sigma_1$ только, если

1) $\mathfrak{F}^0 \supseteq \mathfrak{F}^1$,
2) $(\forall)\ x \in E : \mathfrak{F}^0_x \supseteq \mathfrak{F}^1_x$,
3) $(\forall)\ \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^1 : R^1\,(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow R^0\,(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,
4) $\mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}^1$,
5) $\mathcal{J}^0 \subseteq \mathcal{J}^1$,
6) $\mathfrak{K}_r{}^0 \supseteq \mathfrak{K}_r{}^1$.

Сравнение псевдотопологических структур определяется так: пусть $\Theta_i = (\Sigma_{0i}, \Sigma_{1i}, \Phi_i, \Phi_{ui}) \in PT(E_0, E_1)$ при $i = 0,1$; пишем $\Theta_0 \leqslant \Theta_1$ только, если

1) $\Sigma_{00} \leqslant \Sigma_{01}$,
2) $\Sigma_{10} \geqslant \Sigma_{11}$,
3) $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$,
4) $\Phi_{u0} \subseteq \Phi_{u1}$.

STRUCTURES PSEUDOTOPOLOGIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur propose une structure pseudotopologique non liée aux espaces vectoriels, afin d'éliminer les deux déficiences suivantes des topologies habituelles :

1. le non-encadrement satisfaisant de certains processus de nature topologique ;

2. le comportement difficile par rapport au passage aux limites supérieure et inférieure.

L'idée fondamentale de la construction proposée consiste dans la définition de la structure pseudotopologique comme un complexe de notions topologiques relativement indépendantes dans le sens que :

1. la liaison entre les notions topologiques n'est plus extrêmement rigide comme dans la topologie ordinaire où une seule notion topologique fondamentale — celle d'ensemble ouvert ou une autre équivalente — détermine d'une manière unique toutes les autres notions, mais cette liaison ne se manifeste que par le fait que les notions topologiques vérifient certains axiomes de compatibilité ;

2. il existe un groupe de notions topologiques de première importance : le filtre de Cauchy, le filtre convergent et l'équivalence topologique des filtres de Cauchy, cette dernière étant propre à la construction proposée.

Nous devons mentionner que la totalité des pseudotopologies, au sens de ce travail, forme une catégorie plus large que la catégorie définie par Eilenberg — Mac Lane.

Avant de définir la structur epseudotopologique, l'auteur définit la notion d'espace pseudotopologique sur un ensemble non vide E comme étant une structure de la forme

$$\Sigma = (\mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_x \mid x \in E), R, \mathcal{D}, \mathcal{J}, \mathfrak{K}_r),$$

où $\mathfrak{F}$ représente les filtres de Cauchy, $\mathfrak{F}_x$ les filtres « convergeant vers x », R l'équivalence topologique des filtres de Cauchy, $\mathcal{D}$ les ensembles « ouverts », $\mathcal{J}$ les ensembles « fermés » et $\mathfrak{K}_r$ les ensembles «relativement

compacts ». Si sur E a été définie une topologie ordinaire non uniforme, nous considérons

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{x \in E} \mathfrak{F}_x ,$$

tandis que pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}$

$$R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Leftrightarrow (\exists)\, x \in E : \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x ;$$

nous considérerons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}$ de la manière ordinaire et $\mathfrak{K}_r$ formé de parties de E, sur lequel tout ultrafiltre est convergent.

Les axiomes de compatibilité que vérifient, par définition, les notions topologiques contenues dans Σ, sont

(PT1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{FIL}\,(E)$;

(PT2) $(\forall)\, x \in E : \mathcal{U}_x \in \mathfrak{F}_x \subseteq \mathfrak{F}$;

(PT3) R est réflexif, symétrique et

$$(\forall)\, x \in E, \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_x : R(\mathcal{F}, \mathcal{G}) ;$$

(PT4) $\{\Phi_E, E\} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(E)$ comme

$$(\forall)\, D \in \mathcal{D}, x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{E-D}{\mathrm{FIL}}\,(E) : x \in E - D ;$$

(PT5) $\{\Phi_E, E\} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ comme

$$(\forall)\, I \in \mathcal{J}, x \in E, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_x \cap \underset{I}{\mathrm{FIL}}\,(E) : x \in I ;$$

(PT6) $\{K \subseteq E \mid K \text{ finie}\} \subseteq \mathfrak{K}_r \subseteq \mathcal{P}(E)$ comme

$$(\forall)\, K \in \mathfrak{K}_r, \mathcal{F} \in U\ \mathrm{FIL}\,(K) : \underset{E}{\mathrm{fil}}\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}.$$

L'ensemble des espaces pseudotopologiques sur E sera noté par $PT(E)$.

Si E est un espace vectoriel, on introduit aussi dans la composition de Σ la notion d'ensemble « borné », et on ajoute aux axiomes de liaison des axiomes spécifiques des topologies vectorielles.

La structure pseudotopologique est définie, sur une paire (E_0, E_1) d'ensembles non vides, comme étant toute structure de la forme

$$\Theta = (\Sigma_0, \Sigma_1, \Phi, \Phi_u),$$

où $\Sigma_0 \in PT(E_0)$, $\Sigma_1 \in PT(E_1)$, Φ représentent l'ensemble des fonctions « continues » et Φ_u l'ensemble des fonctions « uniformément continues» définies sur E_0 et ayant des valeurs dans E_1. Lorsque sur E_0 ou E_1 on a défini une topologie ordinaire, non uniforme, nous considérerons $\Phi = \Phi_u$.

Les axiomes de compatibilité sont

(PT7) $\Sigma_0 \in PT(E_0)$, $\Sigma_1 \in PT(E_1)$;

(PT8) est un sous-ensemble de l'ensemble des applications de E_0 dans E_1, de sorte que

(PT8.1) $(\forall)\, f \in \Phi, x_0 \in E_0, \mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}^0_{x_0} : f(\mathcal{F}_0) \in \mathfrak{F}^1_{f(x_0)}$,

(PT8.2) $(\forall)\, f \in \Phi, D_1 \in \mathcal{D}^1 : f^{-1}(D_1)\ \mathcal{D}^0$,

(PT8.3) $(\forall)\, f \in \Phi, I_1 \in \mathcal{J}^1 : f^{-1}(I_1) \in \mathcal{J}^0$;

(PT9) $\Phi_u \subseteq \Phi$ comme

(PT9.1) les applications constantes appartiennent à

(PT9.2) $(\forall) f \in \Phi_u, \mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0 \in \mathfrak{F}^0, R^0(\mathcal{F}_0, \mathcal{G}_0)$:

$$f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0) \in \mathfrak{F}^1, R^1(f(\mathcal{F}_0), f(\mathcal{G}_0)),$$

(PT9.3) $(\forall) f \in \Phi_u, K_0 \in \mathfrak{K}_r^0 : f(K_0) \in \mathfrak{K}_r^1$.

L'ensemble des structures pseudotopologiques sur la paire (E_0, E_1) sont notées avec $PT(E_0, E_1)$.

La comparaison des espaces pseudotopologiques est définie ainsi : soit $\Sigma_i = (\mathfrak{F}^i, (\mathfrak{F}_x^i \mid x \in E), R^i, \mathcal{D}^i, \mathcal{J}^i, \mathfrak{K}_r^i) \in PT(E)$ avec $i = 0, 1$; nous ne noterons $\Sigma_0 \leqslant \Sigma_1$ que si

1) $\mathfrak{F}^0 \supseteq \mathfrak{F}^1$,
2) $(\forall) x \in E : \mathfrak{F}_x^0 \supseteq \mathfrak{F}_x^1$,
3) $(\forall) \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}^1 : R^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \Rightarrow R^0(\mathcal{F}, \mathcal{G})$,
4) $\mathcal{D}^0 \subseteq \mathcal{D}^1$,
5) $\mathcal{J}^0 \subseteq \mathcal{J}^1$,
6) $\mathfrak{K}_r^0 \supseteq \mathfrak{K}_r^1$.

La comparaison des structures pseudotopologiques se définit ainsi : soit $\Theta_i = (\Sigma_{0i}, \Sigma_{1i}, \Phi_i \Phi_{ui}) \in PT(E_0, E_1)$ avec $i = 0, 1$; nous noterons $\Theta_0 \leqslant \Theta_1$ seulement si

1) $\Sigma_{00} \leqslant \Sigma_{01}$,
2) $\Sigma_{10} \geqslant \Sigma_{11}$,
3) $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$,
4) $\Phi_{u0} \subseteq \Phi_{u1}$.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Bourbaki, *Topologie générale*. Paris, 1940, **II, III, IX, X**.
2. — *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, 1953, **I**.
3. R. Cristescu, *Spaţii liniare ordonate*. Bucureşti, 1959.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*. Москва, 1958, **II**.
5. Gh. Marinescu, *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*. Bucureşti, 1959.
6. I. Mikusinski, *Calcul operaţional*. Varşovia, 1957.
7. M. Nicolescu, *Analiză matematică*. Bucureşti, 1958, **II, III**.
8. E. Rosinger, *Definirea spaţiului distribuţiilor $\mathcal{D}'$ prin completarea unui spaţiu de funcţii continue*. Com. Acad. R.P.R., *6*, 641–651 (1962).
9. L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Paris, 1950, **I, II**.
10. Б. З. Вулих, *Введение в теорию полупорядоченных пространств*. Москва, 1961.

O MIȘCARE PLANĂ CU VÎRTEJ CONSTANT PENTRU UN FLUID PERFECT INCOMPRESIBIL[1]

DE

ION I. CRISTEA

I. CONSIDERAȚII GENERALE

1. DEFINIȚIE

Avînd la bază metoda *semiinversă* pusă în evidență de noi în [2], vom considera cazul particular al mișcărilor fluide pentru care viteza $\vec{v}$ a unei particule fluide se poate reprezenta sub forma

$$\vec{v} = \nabla \varphi + ax \nabla y, \tag{1}$$

unde a este o constantă a cărei semnificație se va vedea imediat, x, y, z sînt coordonatele curente carteziene ce caracterizează la momentul t_0 particula fluidă, iar $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ o funcție necunoscută de x, y, z, t.

Să notăm cu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ versorii axelor de coordonate Ox, Oy, Oz față de care s-au definit coordonatele x, y, z. Avem

$$\vec{v} = \nabla \varphi + ax \vec{j}$$

astfel că componentele vectorului viteză $\vec{v}$ pe axele de coordonate sînt

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + ax, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{2}$$

---

[1]) Această lucrare este reluarea comunicării *Mișcări fluide cu vîrtej constant*, ținută de autor la 5 mai 1962 în cadrul „Conferinței științifice a cadrelor didactice din Facultatea de matematică și mecanică a Universității din București".

Din (1) rezultă

$$\text{rot } \vec{v} = a \nabla x \times \nabla y = a \vec{i} \times \vec{j}.$$

Deci, mișcările fluide pentru care cîmpul vitezelor $\vec{v}$ se poate reprezenta sub forma (1) au vectorul turbion rot $\vec{v}$ de direcție și mărime constantă. Dacă $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ formează un triedru trirectangular drept, atunci

$$\text{rot } \vec{v} = a\vec{k} \tag{3}$$

și deci scalarul a reprezintă mărimea vectorului rot $\vec{v}$, direcția sa fiind aceea a versorului $\vec{k}$. Componentele pe axe ale lui rot $\vec{v}$ sînt

$$\xi_x = 0, \qquad \xi_y = 0, \qquad \xi_z = a. \tag{3'}$$

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Mișcarea generală a unui fluid perfect incompresibil este caracterizată de ecuațiile

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \nabla B, \qquad B = U - \frac{V}{\rho} - \frac{1}{2} V^2, \tag{4}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0, \tag{5}$$

unde notațiile sînt cele consacrate. Necunoscutele problemei sînt $\vec{v}$ și p. Ele trebuie determinate așa fel ca să fie satisfăcute condițiile inițiale, la limită și eventual la mari distanțe ale problemei respective.

Substituind expresia (3) a lui rot $\vec{v}$ în ecuația de mișcare (4) și proiectînd această ecuație pe axele de coordonate, obținem

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - a v_y = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} + a v_x = \frac{\partial B}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial z},$$

ecuații care conform cu (2) se transcriu

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial y} + a^2 x = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad a \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{6}$$

unde s-a pus

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - U. \tag{7}$$

Din a treia ecuație (6) rezultă că

$$H = H(x, y, t),$$

astfel că la orice moment t suprafețele

$$H = \text{const.} \tag{8}$$

sînt *suprafețe de vîrtej*. Cum primele două ecuații (6) se mai scriu

$$a\, v_y = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad a\, v_x = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{6'}$$

se observă că suprafețele (8) la orice moment t dat sînt și *suprafețe de curent*. Prin urmare, suprafețele (8) extind în cazul mișcărilor nepermanente cu vîrtej constant cunoscutele suprafețe $B = \text{const.}$ ale lui Bernoulli-Vâlcovici.

Din ecuațiile (6') rezultă în plus că

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

astfel că ecuația de continuitate (5) atrage că

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Din primele două ecuații (6) pe baza faptului că H nu depinde de z, că v_z satisface acestei ultime ecuații și conform cu (2) rezultă că funcția φ este de forma

$$\varphi = \Phi(x, y, t) + \varphi_0(t) \cdot z,$$

astfel că

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + ax, \quad v_z = \varphi_0(t). \tag{2'}$$

Primele două ecuații (6) se transcriu

$$a\frac{\partial \Phi}{\partial y} + a^2 x = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad a\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{6''}$$

Din aceste ecuații rezultă

$$\underset{(x,y)}{\Delta}\, \Phi = 0, \quad \underset{(x,y)}{\Delta}\, H = 0,$$

unde $\underset{(x,y)}{\Delta}$ este operatorul lui Laplace luat în raport cu variabilele x și y. În raport cu aceste variabile funcția $\Phi = \Phi(x, y, t)$ fiind armonică, fie $\Psi = \Psi(x,y,t)$ funcția armonic conjugată funcției Φ în raport cu variabilele x și y :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Din (6'') rezultă, abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, că

$$H = \frac{1}{2} a^2 x^2 - a \Psi. \tag{9}$$

Pentru ca variabila z să nu apară efectiv în raționamente este necesar ca la momentul inițial

$$\begin{gathered} v_x |_{t=t_0} = v^0(x, y), \quad v_y |_{t=t_0} = v_y^0(x, y), \\ v_z |_{t=t_0} = v_z^0 \\ p |_{t=t_0} = p^0(x, y) \end{gathered} \tag{10}$$

iar suprafețele frontieră pentru care se scriu condițiile la limită să fie suprafețe cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz, în aceste condiții la limită variabila z de asemenea netrebuind să apară.

În cazul cînd fluidul este în contact cu o astfel de suprafață, fie ea (S), prin care nu avem transfer de fluid (de exemplu, impermeabilă), punînd condiția ca fluidul să alunece pe această suprafață, în orice punct al acestei suprafețe avem

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_t \cdot \vec{n}, \tag{11}$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața (S) orientat spre domeniul ocupat de fluid iar $\vec{v}_t$ viteza de transport a unui punct solidar legat de porțiunea suprafeței (S) infinit vecine punctului de pe (S) în care este scrisă condiția la limită (11).

Să notăm cu (C) urma pe care o lasă suprafața (S) pe un plan paralel la planul xOy (deci, pe un plan $z = \text{const.}$). Fie $\vec{\tau}$ versorul tangentei la curba (C) care lasă domeniul ocupat de fluid la dreapta. Între componentele versorilor $\vec{n}$ și $\vec{\tau}$ avem relațiile :

$$\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds}.$$

În baza acestor relații și ținînd cont de ecuațiile (6'), condiția la limită (11) pe suprafața (S) revine la următoarea condiție la limită pe curba (C) :

$$\frac{dH}{ds} = -a \vec{v}_t \cdot \vec{n}. \tag{11'}$$

Din punct de vedere matematic, problema revine deci la determinarea funcției $H = H(x, y, t)$ pentru care în domeniul ocupat de fluid

$$\underset{(x,y)}{\Delta} H = -a^2$$

pe conturul (C) este îndeplinită condiția la limită (11'), iar la momentul inițial

$$\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{t=t_0} = a\, v_y^0(x, y), \quad \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{t=t_0} = -a\, v_x^0(x, y).$$

În baza relației (9), această problemă la limită este echivalentă cu următoarea : să se determine funcția $\Psi = \Psi(x, y, t)$ armonică în domeniul ocupat de fluid

$$\underset{(x,y)}{\Delta}\, \Psi = 0$$

astfel ca pe conturul frontieră (C)

$$\frac{d\Psi}{ds} = ax\frac{dx}{ds} + \vec{v}_t \cdot \vec{n} \tag{11''}$$

iar la momentul inițial

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right|_{t=t_0} = -v_y^0(x, y) + ax, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{t=t_0} = v_x^0(x, y).$$

În cazul cînd domeniul ocupat de fluid este nemărginit se adaugă și condiții suplimentare la mari distanțe. Aspectul acestor condiții este variat și va fi precizat în unele cazuri particulare în paragrafele următoare.

Una din funcțiile H sau Ψ fiind determinată, conform cu (9) se determină și cealaltă și prin urmare abstracție de o funcție aditivă depinzînd de timpul t se determină și funcția Φ armonic conjugată funcției Ψ în raport cu x și y. Apoi, din (6') și (2') avînd

$$V^2 = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] + \varphi_0^2(t),$$

cu aproximația unei funcții aditive depinzînd de timpul t se determină și modulul V al vitezei $\vec{v}$. Din (7) avem

$$\frac{p}{\rho} = H - \frac{1}{2a^2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - z\cdot\varphi_0'(t) - \frac{1}{2}\varphi_0^2(t) + U.$$

Cum însă la momentul inițial am admis că presiunea p nu depinde de variabila z, $p(x, y, z, t_0) \equiv p^0(x, y)$, urmează că funcția $U - z\cdot\varphi_0'(t)$ de asemenea nu depinde de z oricare ar fi momentul $t > t_0$ următor. Se observă că condiția ca funcția de forță U să se scrie sub forma

$$U = U^*(x, y, t) + z\cdot\varphi_0'(t)$$

este nu numai necesară dar și suficientă pentru ca la oricare moment $t > t_0$ presiunea p să fie independentă de z.

Admiţînd în particular că funcţia de forţă U nu depinde de z, adică

$$U = U(x, y, t), \tag{12}$$

urmează că neapărat $\varphi_0'(t) = 0$, adică $\varphi_0(t) = b$, unde b este o constantă. Această constantă este tocmai valoarea lui v_z la momentul iniţial : $b = v_z^0$. Expresiile lui V^2 şi $\frac{p}{\rho}$ se reduc în acest caz la

$$V^2 = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] + (v_z^0)^2,$$

$$\frac{p}{\rho} = H - \frac{1}{2a^2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(v_z^0)^2 + U.$$

Aşadar, problema revine la a studia mişcările fluide incompresibile pentru care reprezentarea (1) se reduce la

$$v = \nabla \Phi + ax\vec{j} + b\vec{k}. \tag{1'}$$

Această reprezentare poate fi admisă numai în cazul ipotezelor (10) şi (12), că suprafaţa (S) este un cilindru cu generatoarele paralele cu axa Oz, iar cînd domeniul ocupat de fluid este nemărginit, în condiţiile la mari distanţe variabila z nu apare.

3. CAZUL MIŞCĂRII PERMANENTE

În acest caz particular variabila t nu apare în mod explicit. Astfel :

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + ax, \quad v_z = b,$$

unde $\Phi = \Phi(x, y)$ este o funcţie armonică în raport cu x şi y iar b o constantă. Apoi

$$H = -B = \frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} - U \tag{7'}$$

şi deci ecuaţia (8) se reduce la

$$B = a\Psi - \frac{1}{2}a^2x^2, \tag{9'}$$

unde $\Psi = \Psi(x, y)$ este funcţia armonic conjugată funcţiei Φ în raport cu x şi y. Condiţia la limită (11') pe curba (C) se reduce la

$$\frac{dB}{ds} = a\vec{v}_t \cdot \vec{n}.$$

O dată funcția $B = B(x, y)$ determinată, în orice punct cunoaștem vectorul viteză $\vec{v}$:

$$v_x = \frac{1}{a}\frac{\partial B}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{1}{a}\frac{\partial B}{\partial x}, \quad v_z = b.$$

Acest vector $\vec{v}$ este vizibil tangent la suprafețele Bernoulli-Vâlcovici

$$B(x, y) = \text{const.} \tag{8'}$$

Modulul V al vitezei $\vec{v}$ este dat de

$$V^2 = \frac{1}{a^2}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2\right] + b^2$$

astfel că din ecuația

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{1}{2a^2}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{2}b^2 - B$$

se determină presiunea p în orice punct al domeniului ocupat de fluid.

4. UTILIZAREA VARIABILEI COMPLEXE

Vom pune $\zeta = x + iy$. Cum funcțiile $\Phi = \Phi(x, y, t)$ și $\Psi = \Psi(x, y, t)$ sînt funcții armonic conjugate în raport cu variabilele x și y, urmează că funcția $F = F(\zeta, t)$ definită prin

$$F(\zeta, t) = \Phi(x, y, t) + i\Psi(x, y, t)$$

este o funcție complexă olomorfă de variabila complexă ζ. Această funcție F, analog ca în cazul mișcării irotaționale, se va numi *potențialul complex al mișcării.*

Pentru potențialul complex F pe curba (C) avem condiția

$$\frac{d}{ds}\{\mathcal{I}m\, F(\zeta, t)\} = ax\frac{dx}{ds} + \vec{v}_t \cdot \vec{n}$$

iar la momentul inițial

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right|_{t=t_0} = w^0(\zeta) + aix,$$

unde am pus $w^0(\zeta) = v_x^0(x, y) - iv_y^0(x, y)$.

Apoi, de asemenea analog ca în cazul mișcării irotaționale plane, expresia

$$w(\zeta, t) = v_x(x, y, t) - iv_y(x, y, t)$$

se va numi *viteză complexă* [1]). Vizibil

$$w = \frac{\partial F}{\partial \zeta} - aix. \tag{13}$$

În cazul mișcării permanente potențialul complex $F = F(\zeta)$ va fi definit prin

$$F(\zeta) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

iar viteza complexă va avea expresia

$$w = \frac{dF}{d\zeta} - aix. \tag{13'}$$

Presupunînd potențialul complex $F(\zeta,t)$ cunoscut, la orice moment t dat suprafața

$$\Psi(x, y, t) - a\frac{x^2}{2} = \text{const.}$$

va fi o suprafață de curent. Urmele acestor suprafețe de curent pe fiecare plan $z = \text{const.}$ vor defini proiecțiile liniilor de curent ale mișcării pe aceste plane.

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc simplu jordanian situat într-un plan $z = \text{const.}$ La orice moment t fixat avem

$$\Gamma + iQ = \int_{\overset{\frown}{AB}} w\, d\bar{\zeta}, \tag{14}$$

unde Γ este circulația vitezei $\vec{v}$ de-a lungul arcului $\overset{\frown}{AB}$ iar Q fluxul vitezei $\vec{v}$ prin acest arc.

În baza expresiei (13) a vitezei complexe putem scrie

$$\Gamma + iQ = \left(F - ai\frac{x^2}{2}\right)\Big|_A^B + a\int_{\overset{\frown}{AB}} x\, dy$$

astfel că

$$\Gamma = \Phi\Big|_A^B + a\int_{\overset{\frown}{AB}} x\, dy,$$

$$Q = \left(\Psi - a\frac{x^2}{2}\right)\Big|_A^B.$$

Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ este proiecția pe un plan $z = \text{const.}$ a unui arc al unei linii de curent, în baza lui (14) rezultă că $Q = 0$ și deci fluxul printr-o curbă care este proiecția pe un plan $z = \text{const.}$ a unei linii de curent este nul.

[1]) De fapt potențialul complex și viteza complexă astfel definite se referă la proiecția pe fiecare plan $z = \text{const.}$ a mișcării pe care o studiem.

În cazul cînd am fi avut o curbă simplă închisă (C^*) situată într-un plan $z = \text{const.}$, expresia circulației Γ de-a lungul acestei curbe devine

$$\Gamma = \Phi|_{(C^*)} + a\,\mathcal{A},$$

unde $\mathcal{A}$ este aria limitată, în planul $z = \text{const.}$ considerat, de conturul (C^*).

II. CAZUL FLUIDULUI ÎN CONTACT CU O SUPRAFAȚĂ CILINDRICĂ RIGIDĂ

5. MIȘCAREA RELATIVĂ ÎN RAPORT CU O SUPRAFAȚĂ RIGIDĂ

Suprafața (S) fiind rigidă, fie $O'x'y'z'$ un triedru trirectangular drept solidar legat de această suprafață, avînd axa $O'z'$ paralelă cu axa Oz.

Mișcarea fluidului se poate caracteriza fie în raport cu axele fixe $Oxyz$ obținînd mișcarea absolută a fluidului, fie în raport cu axele mobile $O'x'y'z'$ obținînd mișcarea sa relativă.

La orice moment t, legătura între coordonatele absolute x, y, z și coordonatele relative x', y', z' ale unei particule fluide va fi dată de relațiile :

$$\begin{aligned} x &= x_{o'} + x' \cos\theta(t) - y' \sin\theta(t), \\ y &= y_{o'} + x' \sin\theta(t) + y' \cos\theta(t), \\ z &= z_{o'} + z', \end{aligned} \tag{15}$$

unde $x_{o'}$, $y_{o'}$, $z_{o'}$ sînt coordonatele punctului O' în raport cu axele fixe, iar $\theta = \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$, unde $\omega = \omega(t)$ este viteza unghiulară instantanee de rotație a triedrului mobil $O'x'y'z'$ în jurul lui $O'z'$.

Punînd $\zeta_{o'} = x_{o'} + iy_{o'}$ și $\zeta' = x' + iy'$, legătura între variabila complexă absolută ζ și variabila complexă relativă ζ' este dată de relația

$$\zeta = \zeta_{o'} + e^{i\theta(t)}\,\zeta'. \tag{15'}$$

Conform cu (15) și (15') vom pune

$$H(x, y, t) = H'(x', y', t),$$

$$\Phi(x, y, t) = \Phi'(x', y', t), \qquad \Psi(x, y, t) = \Psi'(x', y', t),$$

$$F(\zeta, t) = F'(\zeta', t).$$

În baza relațiilor (15) este vizibil că funcțiile $\Phi'(x', y', t)$ și $\Psi'(x', y', t)$ sînt de asemenea armonic conjugate în raport cu variabilele x' și y', ceea ce atrage că funcția $F'(\zeta', t)$ este o funcție olomorfă în raport cu variabila complexă ζ'. Această ultimă concluzie rezulta direct și din (15').

Să notăm cu v_x, v_y, v_z componentele vitezei absolute $\vec{v}$ față de axele fixe, iar cu $v_{x'}$, $v_{y'}$, $v_{z'}$, componentele acestei viteze $\vec{v}$ față de axele mobile.

Notații analoge vom face pentru viteza $\vec{v}_{o'}$ în raport cu triedrul fix, a originii O' a triedrului mobil. Conform cu (15′) avem

$$w = v_x - \mathrm{i}v_y = \frac{\partial F}{\partial \zeta} - ai x = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\frac{\partial F'}{\partial \zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x.$$

Or, cum între componentele pe axele fixe și componentele pe axele mobile ale vectorului $\vec{v}$ avem relațiile

$$v_x - \mathrm{i}v_y = (v_{x'} - \mathrm{i}v_{y'})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},$$

$$v_z = v_{z'},$$

rezultă că

$$w' = v_{x'} - \mathrm{i}v_{y'} = \frac{\partial F'}{\partial \zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

$$v_{z'} = b. \tag{16}$$

Să considerăm apoi viteza de transport $\vec{v}_t$ în raport cu triedrul fix $Oxyz$ a unui punct de pe suprafața (S), deci solidar legat de triedrul mobil $O'x'y'z'$. Componentele lui $\vec{v}_t$ pe axele mobile vor fi:

$$v_{tx'} = v_{o'x'} - \omega y', \quad v_{ty'} = v_{o'y'} + \omega x',$$

$$v_{tz'} = v_{o'z'},$$

astfel că punînd $w_t' = v_{tx'} - \mathrm{i}v_{ty'}$ și $w_{o'}' = v_{o'x'} - \mathrm{i}v_{o'y'}$,

$$w_t' = w_{o'}' - \mathrm{i}\omega\bar{\zeta}'. \tag{17}$$

Fie apoi $\vec{v}_r$ viteza relativă a unei particule fluide în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$, iar $v_{rx'}$, $v_{ry'}$, $v_{rz'}$ componentele acestei viteze pe axele mobile. Avînd

$$v_{x'} = v_{rx'} + v_{tx'}, \quad v_{y'} = v_{ry'} + v_{ty'},$$

$$v_{z'} = v_{rz'} + v_{tz'}$$

și punînd $w_r' = v_{rx'} - \mathrm{i}v_{ry'}$, rezultă

$$w' = w_r' + w_{o'}' - \mathrm{i}\omega\bar{\zeta}'$$

și conform cu (16)

$$w_r' = \frac{\partial F'}{\partial \zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - w_{o'}' + \mathrm{i}\omega\bar{\zeta}'. \tag{18}$$

6. CONDIȚII LA LIMITĂ

Potențialele complexe $F(\zeta, t)$ sau $F'(\zeta', t)$ sînt funcții olomorfe în raport cu variabilele complexe ζ și respectiv ζ'. Pentru determinarea acestor funcții olomorfe trebuie scrise condițiile la limită pe suprafața (S), condițiile la momentul inițial $t = t_0$ și condițiile la mari distanțe.

Ne vom ocupa în acest paragraf de condițiile la limită pe suprafața (S), adică pe curba (C), suprafața (S) fiind presupusă impermeabilă. Aceste condiții se pot exprima în două moduri, după cum avem în vedere determinarea potențialului $F(\zeta, t)$ sau a potențialului $F'(\zeta', t)$.

Să observăm că dacă $\vec{\omega} = \omega(t)\cdot\vec{k}$ este vectorul ce definește rotația triedrului mobil $O'x'y'z'$ în raport cu triedrul fix $Oxyz$, atunci $-\vec{\omega}$ este vectorul ce definește rotația triedrului $Oxyz$ în raport cu triedrul $O'x'y'z'$. Apoi [3], dacă $\vec{v}_t$ este viteza de transport în raport cu triedrul fix $Oxyz$ a unui punct solidar legat de triedrul mobil $O'x'y'z'$, atunci $-\vec{v}_t$ este viteza de transport în raport cu triedrul $O'x'y'z'$ a unui punct solidar legat de triedrul $Oxyz$. Prin urmare, componentele pe axele absolute ale vectorului $-\vec{v}_t$ vor avea expresiile :

$$-v_{tx} = v_{ox} + \omega y, \qquad -v_{ty} = v_{oy} - \omega x,$$

$$-v_{tz} = v_{oz},$$

unde v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} sînt componentele pe axele absolute ale vitezei $\vec{v}_o$ a punctului O în raport cu triedrul $O'x'y'z'$.

Așadar,

$$-\vec{v}_t \cdot \vec{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[v_{ox}\cdot y - v_{oy}\cdot x + \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)\right]$$

astfel încît condiția la limită (11′) pe curba (C) devine

$$H = a\left[v_{ox}\cdot y - v_{oy}\cdot x + \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2)\right] - a\,h(t), \tag{19}$$

unde $h(t)$ este o funcție oarecare de timpul t. Cum însă H este determinat abstracție de o funcție arbitrară depinzînd de timpul t, funcția $h(t)$ poate fi inclusă în expresia lui H și prin urmare în membrul doi al condiției la limită (19) $h(t)$ poate fi luată o constantă pură : $h = \text{const.}$

Conform cu (9) condiția la limită (19) pe curba (C) se mai poate folosi sub forma

$$\Psi + v_{ox}\cdot y - v_{oy}\cdot x + \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}x^2 = h(t) \tag{19′}$$

sau, ceea ce este același lucru,

$$\mathcal{I}m\left\{F(\zeta, t) + w_o\cdot\zeta + \mathrm{i}\frac{\omega}{2}\zeta\cdot\bar{\zeta} - \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}\right)^2\right\} = h(t), \tag{19″}$$

unde am pus $w_o = v_{ox} - \mathrm{i}\,v_{oy}$.

Dacă vrem să transcriem condiția la limită (11′) pe curba (C) așa fel ca să apară potențialul complex $F'(\zeta', t)$ vom observa că

$$\vec{v}_t \cdot \vec{n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[v_{o'x'} \cdot y' - v_{o'y'} \cdot x' - \frac{\omega}{2}(x'^2 + y'^2)\right]$$

și deci pe curba (C)

$$H' = -a\left[v_{o'x'} \cdot y' - v_{o'y'} \cdot x' - \frac{\omega}{2}(x'^2 + y'^2)\right] - a\,h(t), \tag{20}$$

unde de asemenea $h(t)$ este o funcție arbitrară de t care din același motiv ca mai înainte poate fi luată și o constantă pură.

Conform cu (9) și (15) această condiție la limită se mai scrie

$$\Psi' - v_{o'x'} \cdot y' + v_{o'y'} \cdot x' + \frac{\omega}{2}(x'^2 + y'^2) -$$

$$-\frac{a}{2}(x_{o'} + x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 = h(t) \tag{20′}$$

sau încă

$$\mathcal{I}m\left\{F'(\zeta' t) - w'_{o'} \cdot \zeta' + \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta' \cdot \bar{\zeta}' -\right.$$

$$\left. -\,\mathrm{i}\frac{a}{2}\left(x_{o'} + \frac{\zeta' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \bar{\zeta}' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2\right\} = h(t). \tag{20″}$$

La ultima formă (20″) a condiției la limită pe curba (C) am fi ajuns dacă am fi pornit și de la expresia (18) a vitezei relative complexe w'_r și am fi impus condiția ca $\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0$ pe (S), ceea ce cu ajutorul lui w'_r se scria

$$\mathcal{R}e\left\{w'_r \frac{\mathrm{d}\zeta'}{\mathrm{d}n}\right\} = 0.$$

Este necesar, pentru aplicații, a scrie ce devin condițiile la limită (19), (19′), (19″) sau (20), (20′), (20″) în cazurile cînd mișcarea suprafeței (S) nu este cea mai generală.

Astfel, în cazul cînd suprafața (S) este fixă, avînd $w_o = w_{o'} = 0$ și $\omega = 0$, condiția la limită pe curba (C) ia una din formele echivalente extrem de simple

$$H = -ah(t), \tag{21}$$

$$\Psi - \frac{a}{2}x^2 = h(t), \tag{21′}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F(\zeta, t) - \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}\right)^2\right\} = h(t). \tag{21″}$$

Pe condiția la limită (21) se citește că suprafețele fixe, cu care fluidul este în contact sînt suprafețe Bernoulli-Vâlcovici, adică sînt și suprafețe de curent și suprafețe de vîrtej.

Dacă suprafața (S) are o mișcare de translație pură, avînd $\omega = 0$ și luînd $\theta_0 = 0$, rezultă $w_o + w_{o'} = 0$ și $\zeta = \zeta_{o'} + \zeta'$, astfel încît pe curba (C)

$$H = a\,(v_{ox}\,y - v_{oy}\,x) - ah\,(t), \tag{22}$$

$$\Psi + v_{ox}\,y - v_{oy}\,x - \frac{a}{2}\,x^2 = h\,(t), \tag{22'}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F(\zeta, t) + w_{e}\,\zeta - \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}\right)^2\right\} = h\,(t), \tag{22''}$$

sau

$$H' = -\,a\,(v_{o'x'}\,y' - v_{o'y'}\,x') - ah\,(t), \tag{23}$$

$$\Psi' - v_{o'x'}\,y' + v_{o'y'}\,x' - \frac{a}{2}\,(x_{o'} + x')^2 = h\,(t), \tag{23'}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F'(\zeta', t) - w'_{o'}\,\zeta' - \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(x_{e'} + \frac{\zeta' + \bar{\zeta}'}{2}\right)^2\right\} = h\,(t). \tag{23''}$$

Dacă suprafața (S) are o mișcare de rotație pură în jurul unei axe fixe paralele la generatoarele sale, adică $w_o = w_{o'} = 0$, luînd $O \equiv O'$ condiția la limită pe curba (C) ia formele

$$H = a\,\frac{\omega}{2}\,(x^2 + y^2) - ah\,(t), \tag{24}$$

$$\Psi + \frac{\omega}{2}\,(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}\,x^2 = h\,(t), \tag{24'}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F\,(\zeta, t) + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{2}\,\zeta \cdot \bar{\zeta} - \mathrm{i}\,\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}\right)^2\right\} = h\,(t), \tag{24''}$$

sau

$$H' = a\,\frac{\omega}{2}\,(x'^2 + y'^2) - ah(t), \tag{25}$$

$$\Psi' + \frac{\omega}{2}\,(x'^2 + y'^2) - \frac{a}{2}\,(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 = h\,(t), \tag{25'}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F'\,(\zeta', t) + \mathrm{i}\,\frac{\omega}{2}\,\zeta' \cdot \bar{\zeta}' - \mathrm{i}\,\frac{a}{2}\left(\frac{\zeta'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \bar{\zeta}'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2\right\} = h(t). \tag{25''}$$

Apare de asemenea interesant cazul în care suprafața (S) are o mișcare de rototranslație rigidă așa fel ca $\omega = \frac{a}{2}$. În acest caz, condițiile la limită (19′) și (19″) în raport cu triedrul fix iau forma

$$\Psi + v_{ox}\, y - v_{oy}\, x - \frac{\omega}{2}(x^2 - y^2) = h(t), \tag{26}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F(\zeta, t) + w_o\, \zeta - \mathrm{i}\frac{\omega}{2}\zeta^2\right\} = h(t). \tag{26'}$$

7. INTRODUCEREA POTENȚIALULUI COMPLEX RELATIV

Pentru viteza complexă relativă w_r' a particulelor fluide în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$ am găsit expresia (18). Vom arăta că această expresie (18) se poate pune sub o formă analogă cu expresia (13) pe care o are viteza complexă absolută w. Cu alte cuvinte, se poate defini o funcție $F_r'(\zeta', t) = \Phi_r'(x', y', t) + \mathrm{i}\,\Psi_r'(x', y', t)$ olomorfă în domeniul ocupat de fluid, așa fel ca

$$w_r' = \frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'. \tag{27}$$

Această relație (27) are sens, deoarece avînd $\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\vec{v}_r + 2\vec{\omega}$, rezultă $\operatorname{rot}\vec{v}_r = (a - 2\omega)\vec{k}'$, adică vîrtejul relativ în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$ are direcția axei $O'z'$ și mărimea $a' = a - 2\omega$. Aceasta atrage că mișcarea fluidului în raport cu triedrul mobil este guvernată de reprezentarea

$$\vec{v}_r = \underset{(x',y',z')}{\nabla}\Phi_r' + a'\,x'\,\vec{j}' + b'\,\vec{k}' \tag{1''}$$

analogă reprezentării (1′) ce caracterizează mișcarea absolută a fluidului. Cu $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ s-au notat versorii axelor $O'x', O'y', O'z'$ iar cu b' o constantă dată.

Legătura între funcțiile $F'(\zeta', t)$ și $F_r'(\zeta', t)$ este dată de relația

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - w_t' = \frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'. \tag{28}$$

Cum $\omega = \frac{1}{2}(a - a')$, această relație se mai scrie

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta'} = \frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} + w_{o'}' + \mathrm{i}\omega\zeta' + a\,\mathrm{i}\,(x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - x').$$

În baza lui (15) însă

$$x\,e^{i\theta} - x' = (x_{o'} + i \sin\theta \cdot \zeta')\, e^{i\theta},$$

astfel că

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta'} = \frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} + w'_{o'} - i\frac{a'}{2}\zeta' + i a x_{o'} e^{i\theta} + i\frac{a}{2}(1 + 2i \sin\theta\, e^{i\theta})\,\zeta'$$

sau încă

$$\frac{\partial F'}{\partial \zeta'} = \frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} + w'_{o'} + i a x_{o'} e^{i\theta} + \frac{1}{2} i\,(a\, e^{2i\theta} - a')\,\zeta'.$$

Prin urmare, abstracție de o funcție complexă depinzînd de t, avem

$$F'(\zeta', t) = F'_r(\zeta', t) + (w'_{o'} + i a x_{o'} e^{i\theta})\,\zeta' + \frac{i}{4}(a\, e^{2i\theta} - a')\,\zeta'^2. \quad (29)$$

Separînd partea reală și partea imaginară în ambii membri ai acestei ultime relații, obținem

$$\Phi' = \Phi'_r + (v_{o'x'} - a x_{o'} \sin\theta)\, x' + (v_{o'y'} - a x_{o'} \cos\theta)\, y' -$$

$$- \frac{a}{4} \sin 2\theta\,(x'^2 - y'^2) - \frac{1}{2}(a \cos 2\theta - a')\, x' y',$$

$$\Psi' = \Psi'_r + (v_{o'x'} - a x_{o'} \sin\theta)\, y' - (v_{o'y'} - a x_{o'} \cos\theta)\, x' +$$

$$+ \frac{1}{4}(a \cos 2\theta - a')\,(x'^2 - y'^2) - \frac{a}{2} \sin 2\theta \cdot x' y',$$

sau aranjînd convenabil termenii

$$\Phi' = \Phi'_r + (v_{o'x'} x' + v_{o'y'} y') -$$

$$- \frac{a}{2}(x' \sin\theta + y' \cos\theta)\,(2x_{o'} + x' \cos\theta - y' \sin\theta) + \frac{a'}{2} x' y', \quad (30)$$

$$\Psi' = \Psi'_r + (v_{o'x'} y' - v_{o'y'} x') -$$

$$- \frac{\omega}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{a}{2}(x_{o'} + x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 - \frac{a'}{2} x'^2 - \frac{a}{2} x_{o'}^2.$$

Definind atunci hamiltonianul relativ $H'_r = H'_r(x', y', t)$, conform relației

$$H'_r = \frac{1}{2} a'^2 x'^2 - a' \Psi'_r \quad (31)$$

legătura între hamiltonianul absolut H' și hamiltonianul relativ H'_r este

$$H' = H'_r - a'\left[v_{o'x'} y' - v_{o'y'} x' - \frac{\omega}{2}(x'^2 + y'^2)\right] + \frac{aa'}{2} x_{o'}^2. \quad (32)$$

În felul acesta, punînd $h'(t) = h(t) + \frac{a}{2} x_{o'}^2$, condițiile la limită (20), (20'), (20'') pe suprafața mobilă (S) se transcriu respectiv sub forma

$$H_r' = -a' h'(t), \tag{33}$$

$$\Psi_r' - \frac{a'}{2} x'^2 = h'(t), \tag{33'}$$

$$\mathcal{I}m\left\{F_r'(\zeta', t) - \mathrm{i}\frac{a'}{2}\left(\frac{\zeta' + \bar{\zeta}'}{2}\right)^2\right\} = h'(t). \tag{33''}$$

Aceste condiții la limită (31), (31'), (31'') pe suprafața (S) se aseamănă perfect cu condițiile la limită (21), (21'), (21'') pe care le satisfac funcțiile H, Ψ, respectiv $F(\zeta, t)$ în cazul cînd suprafața (S) este fixă.

Definind funcția $F_r'(\zeta', t)$ conform cu relația (29), cum avem relația (27) și condițiile la limită (33), (33'), (33'') pe suprafața (S), această funcție $F_r'(\zeta', t)$ se poate numi *potențial complex relativ* în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$, spre deosebire de $F(\zeta, t) = F'(\zeta', t)$ care este un *potențial complex absolut.*

De asemenea, funcția

$$F_t'(\zeta', t) = (w_{o'}' + \mathrm{i}\, a\, x_{o'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\zeta' + \frac{\mathrm{i}}{4}(a\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - a')\,\zeta'^2 \tag{34}$$

se poate numi *potențial complex de transport.* În felul acesta formula (29) se mai scrie

$$F'(\zeta', t) = F_r'(\zeta', t) + F_t'(\zeta', t). \tag{29'}$$

Cum în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$ suprafața (S) este în repaus, din punct de vedere matematic problema determinării mișcării absolute, caracterizate de (1'), în jurul unui obstacol mobil, s-a redus la rezolvarea unei probleme de același tip, induse de reprezentarea (1''), dar în prezența unui obstacol fix. Cu alte cuvinte este suficient să se determine mișcarea fluidului în jurul unui obstacol cilindric fix, pentru ca în baza formulei (29) să se poată determina mișcarea fluidului în jurul unui obstacol identic mobil.

În particular, dacă obstacolul (S) are doar o mișcare de translație pură în raport cu triedrul fix $Oxyz$, adică $\omega = 0$, luînd axele triedrelor $Oxyz$ și $O'x'y'z'$ paralele ($\theta_0 = 0$) avem $\zeta = \zeta_{o'} + \zeta'$ și deci formula (29) ce leagă potențialul complex absolut de potențialul complex relativ devine

$$F'(\zeta', t) = F_r'(\zeta', t) + (w_{o'}' + a i x_{o'})\,\zeta'. \tag{35}$$

De asemenea, fie cazul unui obstacol (S) care are o mișcare de rotație pură în jurul unei axe fixe Oz paralelă cu generatoarele cilindrului. Alegînd axele triedrului mobil $Oxyz$ ca în figura 1, cum

$$x_{o'} = -r_0 \sin\theta \quad \text{și} \quad y_{o'} = r_0 \cos\theta$$

avem

$$\zeta = (\zeta' + \mathrm{i}\, r_0)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad \text{unde } r_0 = OO'.$$

Apoi

$$v_{o'x'} = -\, r_0\, \dot{\theta} = -\, r_0\, \omega \qquad \text{și} \qquad v_{o'y'} = 0.$$

Deci, făcînd abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, formula (29) atrage că

$$F'(\zeta', t) = F_r'(\zeta', t) + \frac{\mathrm{i}}{4}(a\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - a')\ (\zeta' + \mathrm{i} r_0)^2. \tag{36}$$

Formula (29) în cazul cînd mișcarea absolută este irotațională ($a = 0$) se reduce la

$$F'(\zeta', t) = F_r'(\zeta', t) + w_{o'}'\, \zeta' - \mathrm{i}\frac{a'}{4}\zeta'^2 \tag{37}$$

mișcarea relativă comportîndu-se conform cu (1''), unde $a' = -\,2\omega$.

Dacă mișcarea relativă este irotațională ($a' = 0$), atunci $a = 2\omega$ și avem

$$F'(\zeta', t) = F_r'(\zeta', t) + (w_{o'}' + 2\,\mathrm{i}\,\omega\, x_{o'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\ \zeta' + \mathrm{i}\frac{\omega}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\zeta'^2. \tag{38}$$

Or, cum $w_{o'}' = w_{o'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $(w_{o'} = v_{o'x} - \mathrm{i} v_{o'y})$, conform cu (15') și punînd $F_r(\zeta, t) = F_r'(\zeta', t)$, rezultă

$$F(\zeta, t) = F_r(\zeta, t) + (w_{o'}' + 2\,\mathrm{i}\,\omega\, x_{o'})\ (\zeta - \zeta_{o'}) + \\ + \mathrm{i}\frac{\omega}{2}(\zeta - \zeta_{o'})^2$$

sau, făcînd abstracție de o funcție depinzînd de t,

$$F(\zeta, t) = F_r(\zeta, t) + (w_{o'} + \mathrm{i}\,\omega\, \bar{\zeta}_{o'})\ \zeta + \mathrm{i}\frac{\omega}{2}\zeta^2.$$

Observînd că $w_{o'} + \mathrm{i}\,\omega\,\bar{\zeta}_{o'} = -\,w_o$, unde $w_o = v_{ox} - \mathrm{i}\, v_{oy}$ este viteza originii O a triedrului fix în raport cu triedrul mobil $O'\,x'\,y'\,z'$ putem scrie

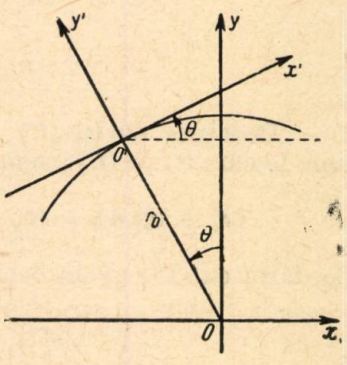


Fig. 1

$$F_r(\zeta, t) = F(\zeta, t) + w_o\, \zeta - \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta^2 \tag{38'}$$

formulă care este identică cu formula (37), rolul triedrelor $O\,x\,y\,z$ și $O'x'y'z'$ însă schimbîndu-se.

8. ACȚIUNEA FLUIDULUI ASUPRA UNUI PERETE FIX

Să notăm cu $\mathcal{R}_x$ și $\mathcal{R}_y$ componentele rezultantei presiunilor pe axele Ox și Oy, iar cu $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}_{oz}$ momentul rezultant al acestor presiuni cînd avem în vedere doar presiunea fluidului asupra suprafeței (S)[1]). Avem

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = -\mathrm{i}\int_{(C)} p\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}, \qquad \mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} p\,\zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}\right\},$$

unde sensul de parcurgere al curbei (C) este cel trigonometric, adică cel care lasă interiorul curbei (C) la stînga.

Din (7) avem

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right) + \left(H - \frac{1}{2}b^2\right)$$

așa încît

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}(v_x^2 + v_y^2)\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} + \mathrm{i}\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right)\mathrm{d}\bar{\zeta} -$$

$$- \mathrm{i}\rho\int_{(C)}\left(H - \frac{1}{2}b^2\right)\mathrm{d}\bar{\zeta},$$

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}(v_x^2 + v_y^2)\,\zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} - \rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right)\zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} +\right.$$

$$\left. + \rho\int_{(C)}\left(H - \frac{1}{2}b^2\right)\zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}\right\}.$$

Deoarece curba (C) este proiecția pe un plan $z = \text{const.}$ a unei linii de curent, pe (C) avem $v_x\mathrm{d}y - v_y\mathrm{d}x = 0$ și deci $\bar{w}\,\mathrm{d}\bar{\zeta} = w\,\mathrm{d}\zeta$, astfel că

$$(v_x^2 + v_y^2)\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} = (v_x + \mathrm{i}\,v_y)\,(v_x - \mathrm{i}\,v_y)\,(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) = w^2\,\mathrm{d}\zeta.$$

Conform cu (13) avem deci

$$\int_{(C)}(v_x^2 + v_y^2)\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} = \int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \mathrm{d}\zeta,$$

$$\int_{(C)}(v_x^2 + v_y^2)\,\zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta} = \int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \zeta\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}.$$

---

[1]) Aceste presiuni fiind normale pe snprafața (S) avem $\mathcal{R}_z = 0$ și $\mathcal{M}_{ox} = \mathcal{M}_{oy} = 0$.

Apoi, în virtutea condiției la limită (21),

$$\int_{(C)} \left(H - \frac{1}{2} b^2\right) \mathrm{d}\bar{\zeta} = 0, \quad \mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} \left(H - \frac{1}{2} b^2\right) \zeta \, \mathrm{d}\,\bar{\zeta}\right\} = 0.$$

În consecință, formulele care dau pe $\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y$ și pe $\mathcal{M}_o$ devin

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \mathrm{d}\zeta + \mathrm{i}\rho\int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right) \mathrm{d}\,\bar{\zeta}, \quad (39)$$

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)} \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \zeta \, \mathrm{d}\,\bar{\zeta} - \rho\int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right) \zeta \, \mathrm{d}\,\bar{\zeta}\right\}. \quad (40)$$

Mai departe avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \overline{\frac{\partial F}{\partial t}} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

iar în baza condiției la limită (21′), pe curba (C)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = h,$$

unde h reprezintă derivata în raport cu timpul t a funcției $h = h\,(t)$.

Să notăm apoi cu (D) domeniul interior curbei (C) situat într-un plan $z = \text{const.}$, cu $\mathcal{A}$ aria acestui domeniu, cu $\zeta_G = x_G + \mathrm{i}\,y_G$ afixa centrului de greutate al domeniului (D), iar cu I_{xx}, I_{xy}, I_{yy} componentele tensorului de inerție al domeniului (D) în raport cu niște axe paralele la axele Ox și Oy, trecînd prin Oz și situate în planul domeniului (D). Presupunînd că domeniul (D) este simplu conex, prin aplicarea formulei lui Green avem

$$\int_{(C)} \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} \mathrm{d}\,\bar{\zeta} = 0$$

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} \mathrm{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial t} \zeta \, \mathrm{d}\,\bar{\zeta}\right\} = h\int_{(C)} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\,h\,\mathcal{A},$$

astfel că

$$\int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right) \mathrm{d}\,\bar{\zeta} = \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} - U\right) \mathrm{d}\zeta}$$

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - U\right) \zeta \, \mathrm{d}\,\bar{\zeta} = \mathcal{R}e\left\{\overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F}{\partial t} - U\right) \bar{\zeta} \, \mathrm{d}\zeta}\right\} + 2\,h\,\mathcal{A}.\right.$$

Formulele (39) şi (40) devin

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \mathrm{d}\zeta + \mathrm{i}\,\rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - U\right)\mathrm{d}\zeta}, \tag{39'}$$

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \zeta\,\mathrm{d}\zeta - \rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - U\right)\bar{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta}\right\} - \tag{40'}$$

$$- 2\,h\,\mathcal{A}.$$

Dacă funcţia $F(\zeta,t)$ se determină aşa fel ca pe conturul (C) în condiţiile la limită (21), (21′), (21″) funcţia $h = h(t)$ să se reducă la o constantă pură ($h = 0$), în ultima formulă (40′) ultimul termen dispare, astfel că formula (40′) se reduce la

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \zeta\,\mathrm{d}\zeta - \rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F}{\partial t} - U\right)\bar{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta}\right\}. \tag{40''}$$

Dacă mişcarea este permanentă iar forţele de masă lipsesc sau sînt neglijabile, formulele (39′) şi (40′) iau forma şi mai simplă

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \mathrm{d}\zeta, \tag{39''}$$

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta} - a\,\mathrm{i}\,x\right)^2 \zeta\,\mathrm{d}\zeta\right\}. \tag{40'''}$$

Formulele (39)—(39″) şi (40)—(40‴) corespund în cazul mişcărilor guvernate de reprezentarea (1′) cunoscutelor formule ale lui Blasius şi Ciaplîghin din cazul mişcărilor plane irotaţionale. Formule oarecum analoge cu formulele precedente au fost obţinute pentru mişcările permanente cu vîrtej constant şi de către Y. H. Kuo [8] în 1943. Pentru diverse cazuri particulare astfel de formule au mai fost date de către K. V. Sanden [9] în 1912, V. Vâlcovici [11] în 1913, [12], [13] în 1914, [19] în 1952, N. S. Tsien [10] în 1943, C. Iacob [4], [5] în 1954 şi alţii.

Formulele precedente se mai pot pune şi sub alte forme care uneori sînt utile în aplicaţii. De exemplu, formulele (39″) şi (40‴), cum pe (C) avem $\mathrm{d}\,\Psi = a\,x\,\mathrm{d}\,x$, se mai scriu

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_y = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2 \mathrm{d}\zeta + \rho a\int_{(C)} x\,\mathrm{d}\Phi + \frac{\rho}{2}a^2\int_{(C)} x^2\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathcal{M}_o = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 \zeta\, d\zeta\right\} - \rho a\int_{(C)} xy\, d\Phi - \frac{\rho}{2}a^2\int_{(C)} x^2 y\, dx.$$

Or, din aceleași motive

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} \zeta\, dF\right\} = \int_{(C)} x\, d\Phi - a\int_{(C)} xy\, dx = \int_{(C)} x\, d\Phi + \frac{a}{2}\int_{(C)} x^2\, dy,$$

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{i}{2}\int_{(C)} \zeta^2\, dF\right\} = -\int_{(C)} xy\, d\Phi + \frac{a}{2}\int_{(C)} x\, y^2\, dx =$$

$$= -\int_{(C)} xy\, d\Phi - \frac{a}{2}\int_{(C)} x^2\, y\, dx,$$

astfel că avem formulele :

$$\mathcal{R}_x - i\,\mathcal{R}_y = i\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 d\zeta + \rho\, a\cdot\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)}\frac{dF}{d\zeta}\,\zeta\, d\zeta\right\}, \qquad (41)$$

$$\mathcal{M}_o = -\frac{\rho}{2}\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)}\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 \zeta\, d\zeta - ai\int_{(C)}\frac{dF}{d\zeta}\,\zeta^2\, d\zeta\right\}. \qquad (42)$$

9. ACȚIUNEA FLUIDULUI ASUPRA UNUI OBSTACOL MOBIL

Formulele (39)—(39″) și (40)—(40‴) se pot generaliza în cazul cînd suprafața (S) nu mai este fixă ci mobilă. Se pot obține astfel două categorii de formule, după cum avem în vedere considerarea mișcării absolute a fluidului sau mișcarea sa relativă în raport cu suprafața (S). Vom prezenta doar formulele scrise în raport cu triedrul mobil $O'x'y'z'$, deci în care apar $F'(\zeta', t)$ sau $F'_r(\zeta', t)$.

Să notăm cu $\mathcal{R}_{x'}$ și $\mathcal{R}_{y'}$ componentele pe axele mobile $O'x'$ și $O'y'$ ale rezultantei presiunilor datorită acțiunii particulelor fluide asupra pereților cilindrului (S), iar cu $\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{M}_{o'z'}$ momentul rezultant al acelorași presiuni în raport cu $O'z'$. Analog avem

$$\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'} = -i\int_{(C)} p\, d\bar{\zeta}', \qquad \mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} p\,\zeta'\, d\bar{\zeta}'\right\}.$$

Cum $\Phi(x,y,t) = \Phi'(x', y', t)$, avînd

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi'}{\partial t} - v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} - v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'},$$

relația (7) va da

$$\frac{p}{\rho} = -\left[\frac{1}{2}(v_{x'}^2 + v_{y'}^2) - v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} - v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right] - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t} - U\right) + \left(H' - \frac{1}{2}b^2\right),$$

astfel încît

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\rho\int_{(C)}\left[\frac{1}{2}(v_{x'}^2 + v_{y'}^2) - v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} - v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right]\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' +$$

$$+ \mathrm{i}\,\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t} - U\right)\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' - \mathrm{i}\rho\int_{(C)}\left(H' - \frac{1}{2}b^2\right)\mathrm{d}\,\bar{\zeta}',$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\rho\int_{(C)}\left[\frac{1}{2}(v_{x'}^2 + v_{y'}^2) - v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} - v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right]\zeta'\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' -\right.$$

$$\left. - \rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t} - U\right)\zeta'\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' + \rho\int_{(C)}\left(H' - \frac{1}{2}b^2\right)\zeta'\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}'\right\}.$$

Conform cu (16) însă putem scrie

$$(v_{x'}^2 + v_{y'}^2)\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' = \left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(\frac{\overline{\partial F'}}{\partial\zeta'} + a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' =$$

$$= \left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)(\mathrm{d}F' - 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\,\Psi' + a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\,\bar{\zeta}') =$$

$$= \left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\mathrm{d}\zeta' + 2\,\mathrm{i}\left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - \mathrm{i}\,a\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)(a\,x\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\Psi).$$

Or, în baza lui (9), la un moment t fixat

$$a\,(a\,x\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,\Psi') = \mathrm{d}\,H'$$

iar datorită condiției (20) pe curba (C)

$$\mathrm{d}\,H' = -\,a\,[v_{o'x'}\,\mathrm{d}y' - v_{o'y'}\,\mathrm{d}x' - \omega\,(x'\,\mathrm{d}x' + y'\,\mathrm{d}y')] =$$

$$= -\,a\,(v_{tx'}\,\mathrm{d}y' - v_{ty'}\,\mathrm{d}x'),$$

astfel că pe (C)

$$a\,x\,\mathrm{d}\,x - \mathrm{d}\,\Psi' = -\,(v_{tx'}\,\mathrm{d}y' - v_{ty'}\,\mathrm{d}x').$$

Observînd și că

$$\mathrm{i}\frac{\partial F'}{\partial\zeta'}(v_{tx'}\,\mathrm{d}y' - v_{ty'}\,\mathrm{d}x') + \left(v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} + v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right)\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' =$$

$$= w_t'\,\mathrm{d}\Phi' = w_t'\,(\mathrm{d}F' - \mathrm{i}\,\mathrm{d}\Psi'),$$

rezultă

$$\left[\frac{1}{2}(v_{x'}^2 + v_{y'}^2) - v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'} - v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial y'}\right]\mathrm{d}\,\bar{\zeta}' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\mathrm{d}\zeta' - w_t'\left(\frac{\partial F'}{\partial\zeta'} - a\,\mathrm{i}\,x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{d}\zeta' + \mathrm{i}\,w'\,\mathrm{d}\,\Psi' -$$

$$-a\,i\,x\,e^{i\theta}\,(v_{tx'}\,dx'+v_{ty'}\,dy')=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F'}{\partial \zeta'}-a\,i\,x\,e^{i\theta}-w_t'\right)^2 d\zeta'-$$

$$-\frac{1}{2}\,(v_{tx'}^2+v_{ty'}^2)\,d\bar{\zeta}'+a\,x\,(v_{tx'}\sin\theta+v_{ty'}\cos\theta)\,d\zeta'$$

sau în virtutea lui (28)

$$\left[\frac{1}{2}\,(v_{x'}^2+v_{y'}^2)-v_{tx'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}-v_{ty'}\frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\right]d\zeta'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial\zeta'}-a'\,i\,x'\right)^2 d\zeta'-\frac{1}{2}(v_{tx'}^2+v_{ty'}^2)d\bar{\zeta}'+ax\,(v_{tx'}\sin\theta+v_{ty'}\cos\theta)\,d\zeta'.$$

Să notăm cu $\zeta_G'=x_G'+iy_G'$ afixa centrului de greutate al domeniului (D) în raport cu axele $O'x'$ și $O'y'$, iar cu $I_{x'x'}$, $I_{x'y'}$, $I_{y'y'}$ componentele tensorului de inerție al domeniului (D) în raport cu niște axe trecînd prin $O'z'$, paralele cu $O'x'$ și $O'y'$ și situate în planul domeniului (D). În raport cu axele fixe se vor face notații analoge.

Cum

$$v_{tx'}^2+v_{ty'}^2=(v_{o'x'}^2+v_{o'y'}^2)-2\,\omega\,(v_{o'x'}\,y'-v_{o'y'}\,x')+\omega^2\,(x'^2+y'^2)$$

$$v_{tx'}\sin\theta+v_{ty'}\cos\theta=(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)+\omega\,(x-x_{o'})$$

și presupunînd domeniul (D) de asemenea simplu conex, prin aplicarea formulei lui Green avem:

$$\int_{(C)}\frac{1}{2}\,(v_{tx'}^2+v_{ty'}^2)\,d\bar{\zeta}'=-\omega\int_{(C)}(v_{o'x'}\,y'-v_{o'y'}\,x')\,d\bar{\zeta}'+\frac{\omega^2}{2}\int_{(C)}(x'^2+y'^2)\,d\bar{\zeta}'=$$

$$=-\omega\,(w_{o'}'-i\,\omega\zeta_G')\,\mathcal{A},$$

$$\int_{(C)}x\,(v_{tx'}\sin\theta+v_{ty'}\cos\theta)\,d\bar{\zeta}'=(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)\int_{(C)}x\,d\bar{\zeta}'+$$

$$+\omega\int_{(C)}x(x-x_{o'})\,d\bar{\zeta}'=-(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)\,i\,e^{i\theta}\mathcal{A}-$$

$$-i\,\omega\,(2\,x_G-x_{o'})\,e^{i\theta}\mathcal{A}$$

și

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)}\frac{1}{2}(v_{tx'}^2+v_{ty'}^2)\,\zeta'\,d\bar{\zeta}'\right\}=-\omega\int_{(C)}(v_{o'x'}\,y'-v_{o'y'}\,x')\,(x'\,dx'+y'\,dy')=$$

$$=\omega\,(v_{o'x'}\,x_G'+v_{o'y'}\,y_G')\,\mathcal{A}=\mathcal{R}e\,\{\omega\,w_o'\,\zeta_G'\,\mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)}x\,(v_{tx'}\sin\theta+v_{ty'}\cos\theta)\,\zeta'\,d\bar{\zeta}'\right\}=(v_{o'x'}\sin\theta+$$

$$+v_{o'y'}\cos\theta)\int_{(C)}x\,(x'\,dx'+y'\,dy')+\omega\int_{(C)}x\,(x-x_{o'})\,(x'\,dx'+y'\,dy')=$$

$$=(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)(y_G-y_{o'})\,\mathcal{A}+\omega(2I_{xy}-x_{o'}\,y_G\,\mathcal{A}-2x_G\,y_{o'}\,\mathcal{A}+x_{o'}\,y_{o'}\,\mathcal{A}).$$

Cum jacobianul transformării (15) este egal cu unitatea, s-a ținut cont că între elementele de arie $dx'dy'$ și $dx\,dy$ avem egalitate.

În baza condiției la limită (20) pe curba (C), avem apoi

$$\int_{(C)}\left(H'-\frac{1}{2}b^2\right)d\bar{\zeta}'=-a\int_{(C)}(v_{o'x'}y'-v_{o'y'}x')\,d\bar{\zeta}'+$$

$$+a\frac{\omega}{2}\int_{(C)}(x'^2+y'^2)\,d\bar{\zeta}'=a(w'_{o'}-i\omega\bar{\zeta}'_{\delta G})\mathcal{A}$$

și

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)}\left(H'-\frac{1}{2}b^2\right)\zeta'\,d\bar{\zeta}'\right\}=-a\int_{(C)}(v_{o'x'}y'-v_{o'y'}x')(x'\,dx'+y'\,dy')=$$

$$=\mathcal{R}e\{a\,w'_{o'}\,\zeta'_{\delta G}\mathcal{A}\}.$$

Prin urmare, expresiile lui $\mathcal{R}_{x'}-i\,\mathcal{R}_{y'}$ și $\mathcal{M}_{o'}$ devin

$$\mathcal{R}_{x'}-i\,\mathcal{R}_{y'}=i\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial\zeta'}-a'i\,x'\right)^2d\,\zeta'+i\,\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial\,\Phi'}{\partial t}-U'\right)d\bar{\zeta}'-$$

$$-i\,\rho\,(\omega+a)\,(w'_{o'}-i\,\omega\,\bar{\zeta}'_{\delta G})\mathcal{A}+ \tag{43}$$

$$+\rho\,a\,[(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)+\omega\,(2\,x_G-x_{o'})]\,e^{i\theta}\mathcal{A},$$

$$\mathcal{M}_{o'}=\mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\frac{\partial F'_r}{\partial\zeta'}-a'\,i\,x'\right)^2\zeta'\,d\,\zeta'-\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}-U\right)\zeta'\,d\bar{\zeta}'+$$

$$+\rho\,(\omega+a)\,w'_{o'}\,\zeta'_{\delta G}\mathcal{A}+ \tag{44}$$

$$+\rho\,a\,i\,[(v_{o'x'}\sin\theta+v_{o'y'}\cos\theta)+\omega\,(2\,x_G-x_{o'})]\,\zeta'_{\delta G}\,e^{i\theta}\mathcal{A}\Big\}-$$

$$-2\,\rho\,a\,\omega\,I^G_{xy}.$$

S-a ținut seamă de (15′) și de faptul că $I_{xy}=I^G_{xy}+x_G\,y_G\,\mathcal{A}$, unde I^G_{xy} este produsul de inerție relativ la două axe trecînd prin centrul de greutate G al domeniului (D), paralele cu axele absolute Ox și Oy și situate în planul domeniului (D).

Separînd apoi partea reală în formula (29′)

$$\Phi'=\Phi'_r+\Phi'_t,$$

avem

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=\frac{\partial\Phi'_r}{\partial t}+\frac{\partial\Phi'_t}{\partial t}.$$

Prin urmare,

$$\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t}-U\right)d\bar{\zeta}'=\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'_r}{\partial t}-U\right)d\bar{\zeta}'+\int_{(C)}\frac{\partial\Phi'_t}{\partial t}d\bar{\zeta}',$$

$$\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial t'}-U\right)\zeta'\,d\,\bar{\zeta}'=\int_{(C)}\left(\frac{\partial\Phi'_r}{\partial t}-U\right)\zeta'\,d\,\bar{\zeta}'+\int_{(C)}\frac{\partial\Phi'_t}{\partial t}\zeta'\,d\,\bar{\zeta}'.$$

Însă, în virtutea formulei lui Green,

$$\int_{(C)} \frac{\partial \Phi_t'}{\partial t}\, d\bar{\zeta}' = -i \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right) dx'dy',$$

$$\mathcal{R}e\left\{\int_{(C)} \frac{\partial \Phi_t'}{\partial t}\, \zeta'\, d\bar{\zeta}'\right\} = \mathcal{R}e\left\{-i \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right) \zeta' dx'dy'\right\}.$$

Formulele (43) şi (44) vor deveni atunci

$$\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'} = i\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\, i\, x'\right)^2 d\zeta' + i\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi_r'}{\partial t} - U'\right) d\bar{\zeta}' +$$

$$+ \rho \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right) dx'dy' - \tag{43'}$$

$$- i\rho\,(\omega + a)\,(w_{o'}' - i\,\omega \bar{\zeta}_G')\,\mathcal{A} +$$

$$+ \rho a\,[(v_{o'x'} \sin\theta + v_{o'y'} \cos\theta) + \omega\,(2\,x_G - x_{o'})]\, e^{i\theta}\,\mathcal{A},$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\, i\, x'\right)\zeta'\, d\zeta' - \rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi_r'}{\partial t} - U'\right)\zeta'\, d\bar{\zeta}' +\right.$$

$$+ i\,\rho \iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right)\zeta'\, dx'\, dy' + \tag{44'}$$

$$+ \rho\,(\omega + a)\, w_{o'}'\, \zeta_G'\, \mathcal{A} +$$

$$\left. + i\,\rho\, a\,[(v_{o'x'} \sin\theta + v_{o'y'} \cos\theta) + \omega\,(2\,x_G - x_{o'})]\,\zeta_G' e^{i\theta}\,\mathcal{A}\right\} -$$

$$- 2\,\rho a\,\omega\, I_{xy}^G.$$

Notăm $\dot{\vec{u}}$ derivata unui vector oarecare $\vec{u} = \vec{u}(t)$ în raport cu timpul t cînd ne raportăm la triedrul mobil $O'x'y'z'$ [1]). Observăm că

$$v_{o'x'} \sin\theta + v_{o'y'} \cos\theta = v_{o'y}, \quad \text{iar} \quad v_{o'y} = \dot{y}_{o'} + \omega\, x.$$

Să notăm apoi cu $[\Lambda]_G$ valoarea unei funcţii oarecare $\Lambda = \Lambda(\zeta', \bar{\zeta}', t)$ pentru $\zeta' = \zeta_G'$. Cum

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right) = \frac{d}{dt}(w_{o'}' + ia x_{o'} e^{i\theta}) + \frac{i}{2}\frac{d}{dt}(a e^{2i\theta} - a').\zeta'$$

este o funcţie liniară de ζ', avem

$$\iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right) dx'\, dy' = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right)\right]_G \mathcal{A},$$

$$\iint_{(D)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right)\zeta'\, dx'\, dy' = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \zeta'}\right)\zeta'\right]_G \mathcal{A} + \frac{i}{2}\frac{d}{dt}(a e^{2i\theta} - a') \times$$

$$\times \left[\iint_{(D)} \zeta'^2\, dx'\, dy' - \zeta_G'^2 \mathcal{A}\right].$$

---

[1]) Cum vectorii $\vec{\omega}$, $\vec{a}$, $\vec{a}'$ sînt paraleli cu Oz şi $O'z'$, vectorii $\dot{\vec{\omega}}$, $\dot{\vec{a}}$, $\dot{\vec{a}}'$ reprezintă derivata lor în raport cu timpul t cînd ne raportăm şi la triedrul fix $O'x'y'z'$.

Or, $\dot{a} = 0$, astfel că

$$\mathcal{R}e\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - a')\left[\iint_{(D)} \delta'^2\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' - \delta_G'^2\,\mathcal{A}\right]\right\} = \mathcal{R}e\left\{[\,2\mathrm{i}a\omega\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - \dot{a}'] \times \right.$$

$$\left. \times \iint_{(D)} (\delta' - \delta_G')^2\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\right\} =$$

$$= \mathcal{R}e\left\{ 2\,\mathrm{i}\,a\,\omega \iint_{(D)} (\delta - \delta_G)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \dot{a}' \iint_{(D)} (\delta' - \delta_G')^2\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\right\} =$$

$$= 4\,a\omega\,I_{xy}^G - \dot{a}'\,(I_{y'y'}^G - I_{x'x'}^G),$$

unde $I_{x'x'}^G$ și $I_{y'y'}^G$ au semnificații analoge cu I_{xy}^G.

Formulele (43′) și (44′) se transcriu astfel sub forma

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \delta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \mathrm{d}\delta' + \mathrm{i}\,\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi_r'}{\partial t} - U'\right)\mathrm{d}\bar{\delta}' +$$

$$+ \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \delta'}\right)\right]_G \mathcal{A} - \tag{43″}$$

$$- \mathrm{i}\rho\,(\omega + a)\,[w_t']_G\,\mathcal{A} + \rho a\,[\dot{y}_{o'} + 2\,\omega\,x]_G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathcal{A},$$

$$\mathcal{M}_{G'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \delta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \delta'\,\mathrm{d}\delta' - \rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi_r'}{\partial t} - U\right)\delta'\mathrm{d}\bar{\delta}' + \right.$$

$$+ \mathrm{i}\,\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \delta'}\right)\delta'\right]_G \mathcal{A} + \tag{44″}$$

$$\left. + \rho\,(\omega + a)\,[w_t'\,\delta']_G\,\mathcal{A} + \mathrm{i}\,\rho\,a\,[\,(\dot{y}_{o'} + 2\,\omega\,x)\,\delta']_G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathcal{A}\right\} -$$

$$- \rho\frac{\dot{a}'}{2}\,(I_{y'y'}^G - I_{x'x'}^G).$$

Se observă că în aceste ultime două formule, (43″) și (44″), apar expresiile $\rho\,[\mathcal{E}]_G\,\mathcal{A}$ și $\mathrm{i}\rho[\mathcal{E}\delta']_G\,\mathcal{A}$, unde prin $\mathcal{E} = \mathcal{E}\,(\delta', \bar{\delta}', t)$ s-a notat funcția

$$\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \delta'}\right) - \mathrm{i}\,(\omega + a)\,(w_{o'}' - \mathrm{i}\,\omega\,\bar{\delta}') + a\,(\dot{y}_{o'} + 2\,\omega\,x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Cum însă

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_t'}{\partial \delta'}\right) = [\dot{w}_{o'} + (\mathrm{i}\,a\,\dot{x}_{o'} - a\,\omega\,x_{o'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] + \frac{\mathrm{i}}{2}[2\,\mathrm{i}\,a\omega\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} - \dot{a}']\delta',$$

ținînd cont că $w_{o'}' = w_{o'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, expresia lui $\mathcal{E}$ devine

$$\mathcal{E} = (\dot{w}_{o'}' - \mathrm{i}\,\omega\,w_{o'}') - \mathrm{i}\,a\,(w_{o'} - \dot{\bar{\delta}}_{o'})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} -$$

$$- \mathrm{i}\frac{\dot{a}'}{2}\,\delta' - \omega\,(\omega + a)\,\bar{\delta}' + a\,\omega\,(2\,x - x_{o'} - \delta'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Apoi,

$$v_{o'x} = \dot{x}_{o'} - \omega\, y_{o'}, \quad v_{o'y} = \dot{y}_{o'} + \omega\, x_{o'}$$

astfel că

$$w_{o'} = \dot{\bar{\delta}}_{o'} - i\,\omega\,\bar{\delta}_{o'}.$$

Bazîndu-ne apoi și pe (15′), expresia lui $\mathcal{E}$ se transcrie mai departe sub forma

$$\mathcal{E} = (\dot{w}'_{o'} - i\,\omega\, w'_{o'}) - (i\,\dot{\omega} + \omega^2)\,\bar{\delta}' + 2\,i\,\dot{\omega}\,x' + i\,a\,\omega\, y_{o'}\, e^{i\theta}$$

căci $\dot{a}' = \dot{a} - 2\,\dot{\omega} = -2\,\dot{\omega}$.

Fie $\vec{g}_{o'}$ accelerația originii O' a triedrului mobil în raport cu triedrul fix $O\,x\,y\,z$, iar $g_{o'x'}$, $g_{o'y'}$, $g_{o'z'}$ componentele lui $\vec{g}_{o'}$ pe axele mobile. Cum avem

$$g_{o'x'} = \dot{v}_{o'x'} - \omega\, v_{o'y'}, \quad g_{o'y'} = \dot{v}_{o'y'} + \omega\, v_{o'x'},$$

$$g_{o'z'} = \dot{v}_{o'z'},$$

punînd $\gamma'_{o'} = g_{o'x'} - i\, g_{o'y'}$ urmează că

$$\gamma'_{o'} = \dot{w}'_{o'} - i\,\omega\, w'_{o'}.$$

Fie apoi $\vec{g}_t$ accelerația de transport, în raport cu triedrul fix $Ox\,y\,z$ pe care o are un punct solidar legat de triedrul mobil $O'x'y'z'$. Componentele pe axele mobile ale lui $\vec{g}_t$ sînt

$$g_{tx'} = g_{o'x'} - \dot{\omega}\, y' - \omega^2\, x', \quad g_{ty'} = g_{o'y'} + \dot{\omega}\, x - \omega^2\, y,$$

$$g_{tz'} = g_{o'z'},$$

astfel că introducînd accelerația complexă de transport $\gamma'_t = g_{tx'} - i g_{ty'}$, avem

$$\gamma'_t = \gamma'_{o'} - (i\,\dot{\omega} + \omega^2)\,\bar{\delta}'.$$

Cu aceste notații expresia lui $\mathcal{E}$ ia forma mai simplă

$$\mathcal{E} = \gamma'_t + 2\,i\,\dot{\omega}\,x' + i\,a\,\omega\, y_{o'}\, e^{i\theta}.$$

În sfîrșit, cum $M = \rho\,\mathcal{A}$ reprezintă masa fluidului dislocuit de obstacolul (S), pentru $\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'}$ și $\mathcal{M}_{o'}$ se obțin formulele :

$$\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'} = i\,\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \delta'} - a'\,i\,x'\right)^2 d\delta' + i\,\rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi'_r}{\partial t} - U'\right) d\,\bar{\delta}' +$$

$$+ M\,[\gamma'_t]_G + i\,M\,a\,\omega\, y_{o'}\, e^{i\theta} + 2\,i\,M\,\dot{\omega}\, x'_G, \tag{45}$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \delta'} - a'\,i\,x'\right)^2 \delta'\, d\,\delta' - \rho\int_{(C)}\left(\frac{\partial \Phi'_r}{\partial t} - U'\right)\delta'\, d\,\bar{\delta}' +\right.$$

$$\left. + i\,M\,[\gamma'_t\,\delta']_G - M\,a\,\omega\, y_{o'}\,\delta'_G\, e^{i\theta} - 2\,M\,\dot{\omega}\, x'_G\,\delta'_G\right\} + \tag{46}$$

$$+ \rho\, \dot{\omega}\, (I^G_{y'y'} - I^G_{x'x'}).$$

Pentru funcția Ψ'_r având condiția la limită (33'), analog ca în cazul obstacolului fix avem

$$\int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi'_r}{\partial \zeta'} - U' \right) \mathrm{d}\, \bar{\zeta}' = \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - U' \right) \mathrm{d}\, \zeta'} - 2\, \dot{\omega}\, x'_G\, \mathcal{A},$$

$$\mathcal{R}e \left\{ \int_{(C)} \left(\frac{\partial \Phi'_r}{\partial t} - U' \right) \zeta'\, \mathrm{d}\, \bar{\zeta}' \right\} = \mathcal{R}e \left\{ \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U' \right) \bar{\zeta}'\, \mathrm{d}\, \zeta'} \right\} -$$

$$- 4\, \dot{\omega}\, I_{y'y'} + 2\, h\, \mathcal{A}.$$

Formulele (45) și (46) se mai scriu :

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\, \mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\, \frac{\rho}{2} \int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a' \mathrm{i}\, x' \right)^2 \mathrm{d}\, \zeta' + \mathrm{i}\, \rho\, \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U' \right) \mathrm{d}\, \zeta'} +$$

$$+ M\, [\gamma'_t]_G + \mathrm{i}\, M\, a\, \omega\, y_{o'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{45'}$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e \left\{ -\frac{\rho}{2} \int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_t}{\partial \zeta'} - a' \mathrm{i}\, x' \right)^2 \zeta' \mathrm{d}\, \zeta' - \rho\, \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U' \right) \bar{\zeta}'\, \mathrm{d}\, \zeta'} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{i}\, M\, [\gamma'_t\, \zeta']_G - M\, a\, \omega\, y_{o'}\, \zeta'_G\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \right\} + \tag{46'}$$

$$+ \rho\, \dot{\omega}\, (5\, I^G_{y'y'} - I^G_{x'x'} + 2\, x'^2_G\, \mathcal{A}) - 2\, M\, h.$$

Dacă axele mobile sînt alese convenabil, aceste formule se pot pune sub o formă mai simplă.

Astfel, să presupunem că $O' \equiv G$, adică axele triedrului mobil $O'x'y'z'$ sînt axe centrale pentru obstacolul (S). În raport cu aceste axe având $\zeta'_G = x'_G + \mathrm{i}\, y'_G = 0$, rezultă $\zeta_G = \zeta_{o'}$ și $[\gamma'_t]_G = \gamma'_{o'} = \gamma'_G$. Presupunînd în plus că Ψ'_r s-a determinat așa fel ca în condiția la limită (33') h să fie o constantă pură ($h = 0$), formulele (45') și (46') se reduc la

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\, \mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\, \frac{\rho}{2} \int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a' \mathrm{i}\, x' \right)^2 \mathrm{d}\, \zeta' + \mathrm{i}\, \rho\, \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U' \right) \mathrm{d}\, \zeta'} +$$

$$+ M\, \gamma'_{o'} + \mathrm{i}\, M\, a\, \omega\, y_{o'}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{45''}$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e \left\{ -\frac{\rho}{2} \int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a' \mathrm{i}\, x' \right)^2 \zeta'\, \mathrm{d}\, \zeta' - \rho\, \overline{\int_{(C)} \left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U' \right) \bar{\zeta}'\, \mathrm{d}\, \zeta'} \right\} + \tag{46''}$$

$$+ \rho\, \dot{\omega}\, (5\, I^G_{y'y'} - I^G_{x'x'}).$$

Să admitem în particular că mișcarea fluidului este cu vîrtej constant atît în raport cu triedrul fix ($\dot{a} = 0$) cît și în raport cu triedrul mobil ($\dot{a}' = 0$). Această presupunere are sens dacă viteza unghiulară instantanee de rotație ω este constantă ($\dot{\omega} = 0$). Luînd pentru simplificare axele mobile așa fel ca la momentul inițial $\theta_0 = 0$, rezultă că $\theta = \omega t$. Formulele (45'') și (46'') în acest caz particular iau forma

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial t} - U'\right)\mathrm{d}\,\zeta'} + \tag{47}$$

$$+ M\,\gamma_{o'}' + \mathrm{i}\,M\,a\,\omega\,y_{o'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \zeta'\,\mathrm{d}\,\zeta' + \rho\overline{\int_{(C)}\frac{\partial F_r'}{\partial t} - U'\Big)\bar{\zeta}'\,\mathrm{d}\,\zeta'}\right\}. \tag{48}$$

Se observă în acest caz că momentul rezultant $\mathcal{M}_{o'} \equiv \mathcal{M}_G$ în raport cu o axă paralelă la Oz și trecînd prin centrul de greutate G al obstacolului (S) are aceeași expresie ca și cînd obstacolul (S) ar fi fost fix. Se observă de asemenea că expresia pe care o are $\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'}$ în acest caz este formată din expresia pe care ar avea-o $\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'}$ cînd obstacolul (S) ar fi fost fix, la care se adaugă în plus suma

$$M\,\gamma_{o'}' + \mathrm{i}\,M\,a\,\omega\,y_{o'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \equiv M\,\gamma_G' + \mathrm{i}\,M\,a\,\omega\,y_G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Termenul $M\gamma_G'$ reprezintă forța de inerție pe care ar avea-o centrul de greutate G al obstacolului (S) dacă în G am avea concentrată toată masa M a fluidului dislocuit de obstacolul (S). Termenul $-\mathrm{i}\,M\,a\,\omega\,y_G\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ reprezintă o forță de natura unei forțe centrifuge.

Să particularizăm și mai mult formulele precedente.

Dacă mișcarea absolută a fluidului în jurul obstacolului (S) este irotațională, adică $a = 0$, acțiunea hidrodinamică a fluidului asupra obstacolului (S) va fi caracterizată de formulele :

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial t} - U'\right)\mathrm{d}\,\zeta'} + \tag{47'}$$

$$+ M\,\gamma_{o'}',$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \zeta'\,\mathrm{d}\,\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F_r'}{\partial t} - U'\right)\bar{\zeta}'\,\mathrm{d}\,\zeta'}\right\}. \tag{48'}$$

În acest caz, la acțiunea hidrodinamică pe care ar avea-o fluidul cînd obstacolul (S) ar fi fost fix, fluidul fiind însă în mișcare rotațională cu vîrtej constant ($a' = -2\,\omega$), se adaugă o forță de inerție trecînd prin G egală cu forța de inerție totală pe care ar da-o masa de lichid dislocuit de obstacolul (S).

Un rezultat analog, însă particular, a fost obținut de V. Vâlcovici [14] în 1914 presupunînd că obstacolul (S) are o mișcare de translație neuniformă ($\omega = 0$ și $\gamma'_{o'} \neq 0$).

Să admitem acum că mișcarea relativă a fluidului în raport cu obstacolul (S) este irotațională, adică $a' = 0$. Cum $a = 2\,\omega$, de data aceasta vom avea

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'}\right)^2 \mathrm{d}\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\mathrm{d}\zeta' + \tag{47''}$$

$$+ M\gamma'_{o'} + 2\,\mathrm{i}\,M\,\omega^2\,y_{o'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'}\right)^2 \zeta'\,\mathrm{d}\zeta' - \rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\bar{\zeta}'\,\mathrm{d}\zeta'\right\}. \tag{48''}$$

Termenul $-2\,\mathrm{i}\,M\,\omega^2\,y_{o'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ corespunde unei forțe avînd direcția și sensul axei fixe Oy, mărimea $2\,M\,\omega^2\,y_{o'}$ și trecînd prin G. Vizibil, această forță este dublul proiecției pe axa Oy a forței centrifuge $M\,\omega^2\,\overrightarrow{OG}$.

Să presupunem acum că $O' \equiv O$, adică cilindrul (S) are o mișcare de rotație sau revoluție în jurul lui Oz, după cum Oz este situată în interiorul cilindrului (S) sau în afara lui. Avînd $\zeta_{o'} = x_{o'} + \mathrm{i}\,y_{o'} = 0$, rezultă $\zeta = \zeta'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ și $y'_{o'} = 0$. Formulele (45′) și (46′), pentru $h = 0$, devin

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\mathrm{d}\,\zeta' - \tag{45'''}$$

$$- M\,(\mathrm{i}\,\dot{\omega} + \omega^2)\,\bar{\zeta}'_G,$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \zeta'\,\mathrm{d}\,\zeta' - \rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\bar{\zeta}\,\mathrm{d}\,\zeta' - \right.$$

$$\left. - \mathrm{i}\,M\,(\mathrm{i}\,\dot{\omega} + \omega^2)\,\bar{\zeta}'_G\,\zeta'_G\right\} + \tag{46'''}$$

$$+ \rho\,\dot{\omega}(5\,I^G_{y'y'} - I^G_{x'x'} + 2\,x'^2_G\,\mathcal{A}).$$

Admițînd în particular și că $\dot{a}' = 0$, deci că $\dot{\omega} = 0$, formulele precedente se reduc la

$$\mathcal{R}_{x'} - \mathrm{i}\,\mathcal{R}_{y'} = \mathrm{i}\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \mathrm{d}\,\zeta' + \mathrm{i}\,\rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\mathrm{d}\,\zeta' - \tag{49}$$

$$- M\,\omega^2\,\bar{\zeta}'_G,$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,\mathrm{i}\,x'\right)^2 \zeta'\,\mathrm{d}\,\zeta' - \rho\int_{(C)}\overline{\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)}\,\bar{\zeta}'\,\mathrm{d}\,\zeta'\right\}. \tag{50}$$

Regăsim astfel, în cazul mișcărilor cu vîrtej constant, aceeași concluzie la care a ajuns V. Vâlcovici [16] în 1920 în legătură cu schimbarea acțiunii hidrodinamice a fluidului asupra unui obstacol fix, cînd mișcarea fluidului se înlocuiește cu o nouă mișcare diferind de prima printr-o rotație uniformă dată întregului spațiu. Cu alte cuvinte, sistemul de forțe exercitate asupra unui solid (S) de către un fluid incompresibil ce are o mișcare cu vîrtej constant ($\dot{a} = 0$), obstacolul (S) rotindu-se în jurul lui Oz cu o viteză unghiulară constantă ($\dot{\omega} = 0$), este echivalent cu sistemul de forțe exercitate asupra solidului (S) presupus fix, fluidul fiind de asemenea în mișcare rotațională cu vîrtej constant ($\dot{a}' = 0$ și $a' = 2\ \omega - a$), la care se adaugă forța centripetă a centrului de greutate G al solidului (S) în care se presupune că ar fi concentrată toată masa M a fluidului dislocuit de (S).

Dacă admitem în plus că $G \equiv O' \equiv O$, adică axa $O'z'$ este axă centrală fixă pentru cilindrul (S), avînd și $\zeta'_G = x'_G + iy'_G = 0$, formulele (45‴) și (46‴), sau (49) și (50), conduc la

$$\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'} = i\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,i\,x'\right)^2 d\zeta' + i\,\rho\,\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)d\zeta'}, \quad (51)$$

$$\mathcal{M}_{o'} = \mathcal{R}e\left\{-\frac{\rho}{2}\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial \zeta'} - a'\,i\,x'\right)^2 \zeta'\,d\zeta' - \rho\,\overline{\int_{(C)}\left(\frac{\partial F'_r}{\partial t} - U'\right)\bar{\zeta}'\,d\zeta'}\right\}. \quad (52)$$

Așadar, acțiunea hidrodinamică a unui fluid incompresibil asupra unui obstacol cilindric (S) ce se rotește uniform în jurul axei sale centrale paralelă la generatoare, este dată de aceleași formule ca și cînd obstacolul ar fi fix iar fluidul ar avea o mișcare rotațională cu vîrtej constant de intensitate a'. După cum se vede din (45″) și (46″), formulele (51) și (52) rămîn valabile dacă avem doar $y_{o'} = 0$, $\gamma'_{o'} = 0$ și de asemenea $\dot{a} = \dot{a}' = \dot{\omega} = 0$. Altfel spus, formulele (51) și (52) se mențin sub aceeași formă dacă centrul de greutate G al obstacolului (S) este situat în planul xOz, proiecția sa pe axa Ox mișcîndu-se uniform ($\dot{x}_{o'} = 0$), iar cilindrul (S) se rotește în jurul lui $Gz' \equiv O'z'$ cu viteza unghiulară constantă ($\dot{\omega} = 0$).

Formule pentru $\mathcal{R}_{x'} - i\,\mathcal{R}_{y'}$ și $\mathcal{M}_{o'}$ cu o structură diferită de formulele date de noi în acest paragraf a obținut și C. Iacob [4] în cazul particular cînd la mari distanțe distribuția de viteze este dată de

$$\lim_{x \to \pm\infty} w = V_0(t) - a\,y.$$

III. EXEMPLE

10. MIȘCĂRI ÎN ABSENȚA OBSTACOLELOR

Analog ca în cazul mișcării plane irotaționale se poate folosi o metodă inversă pentru obținerea de mișcări fluide incompresibile bidimensionale cu vîrtej constant ($a = \text{const.}$) pentru care să fie valabilă reprezentarea (1′).

Fie astfel $F = F(\zeta, t)$ o funcție olomorfă oarecare. Această funcție poate fi privită ca potențialul complex al unei anumite mișcări fluide

incompresibile pentru care avem reprezentarea (1′). Separînd partea imaginară a funcției $F(\zeta, t)$, conform cu (8) și (9), la orice moment t fixat se pot pune în evidență suprafețele de curent ale acestor mișcări

$$\Psi - \frac{1}{2} a x^2 = \text{const.} \tag{53}$$

Aplicînd metoda solidificării suprafețelor de curent se pot obține mișcări și în prezența unor pereți.

Pentru a se ilustra mai ușor exemplele ce se vor da în acest capitol, vom presupune de acum încolo că $v_z^0 = b = 0$, adică reprezentarea (1′) se reduce la

$$\vec{v} = \nabla \Phi + a x \vec{j}. \tag{1‴}$$

În acest fel, orice plan $z = \text{const.}$ este un plan de curent, încît în (53) avem ecuația unei linii de curent a mișcării.

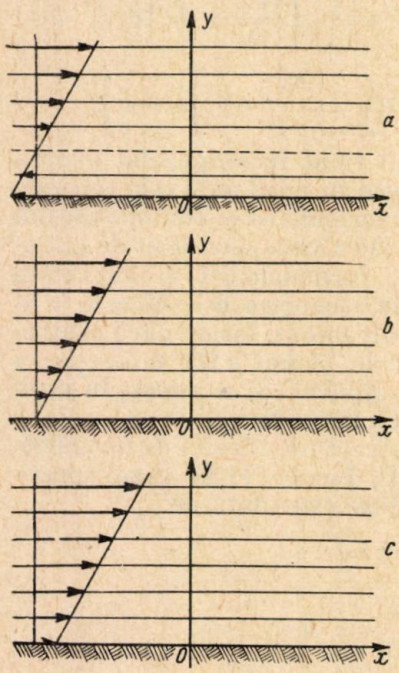


Fig. 2

Să considerăm cîteva din cele mai banale mișcări fluide guvernate de reprezentarea (1‴) ce se pot pune în evidență pe această cale inversă.

a) Fie potențialul complex

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i} \frac{a}{2} \zeta^2 + V_0 \zeta, \tag{54}$$

unde a este o constantă iar $V_0 = V_0(t)$ o funcție reală de timpul t.

Avem

$$\Psi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2) + V_0 y.$$

Deci, la un moment t dat, ecuațiile liniilor de curent sînt

$$-\frac{a}{2} y^2 + V_0 y = \text{const.}$$

astfel că aceste linii de curent sînt dreptele paralele la axa Ox.

Viteza complexă are expresia

$$w = V_0 - a y,$$

încît viteza fluidului este dirijată paralel cu axa Ox, fiind constantă de-a lungul fiecărei linii de curent (adică pe paralelele la Ox) și variind liniar cu distanța y la axa Ox.

Solidificînd axa Ox, mișcarea ce apare în semiplanul superior ($y > 0$) se prezintă ca în figura 2. În figura 2,*a* se observă că există o linie de curent

$\left(y = \frac{V_0}{a}\right)$ pe care particulele de fluid rămîn în repaus. În figura 2,*b* această linie de curent este chiar axa Ox.

Cum pentru $a \to 0$ potențialul $F(\zeta,t)$ devine

$$f(\zeta, t) = V_0 \zeta, \tag{55}$$

în (54) avem o generalizare la cazul mișcărilor guvernate de (1‴) a mișcării irotaționale plane de translație rigidă a fluidului cu viteza V_0 paralelă cu axa Ox.

Într-o primă aproximație, astfel de mișcări apar în legătură cu mișcarea aluviunilor [19], unde vitezele particulelor fluide pot fi considerate paralele cu fundul rîului și depinzînd liniar de distanța lor la fundul rîului. De asemenea, în aerodinamică se presupune uneori [9] că la mari distanțe fluidul are o comportare de felul celei caracterizate de potențialul (54) și reprezentarea (1‴).

b) Să considerăm și potențialul complex

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}(\zeta - \zeta_0)^2, \tag{56}$$

unde a este o constantă iar $\zeta_0 = \zeta_0(t) = x_0(t) + i\,y_0(t)$ afixa unui punct mobil din planul xOy.

Separînd partea imaginară a lui $F(\zeta,t)$ avem

$$\Psi = \frac{a}{4}[(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2],$$

încît la momentul t ecuațiile liniilor de curent sînt

$$|\zeta + \bar{\zeta}_0|^2 \equiv (x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \text{const.}$$

Aceste linii de curent sînt deci cercuri concentrice cu centrul în punctul de afixă $-\bar{\zeta}_0 = -x_0 + \mathrm{i}\,y_0$.

Viteza complexă este

$$w = -\mathrm{i}\frac{a}{2}(\bar{\zeta} + \zeta_0),$$

încît

$$v_x = -\frac{a}{2}(y - y_0), \quad v_y = \frac{a}{2}(x + x_0),$$

$$V = \frac{|a|}{2}\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

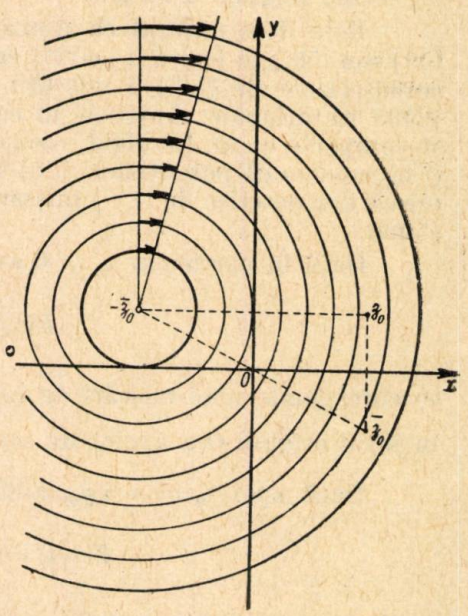


Fig. 3

Se observă că la orice moment t fixat, modulul V al vitezei $\vec{v}$ este constant în lungul fiecărui cerc de curent și variază proporțional cu raza acestui cerc (fig. 3).

Avem deci de-a face cu o mișcare de rotație a unui fluid în jurul punctului O cu viteza unghiulară $\omega = \frac{a}{2}$, în această mișcare fluidul comportîndu-se ca un tot rigid. Materializînd unul sau mai multe din cercurile de curent $(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \text{const.}$ se poate considera mișcarea fluidă într-unul din domeniile limitate de aceste cercuri.

Cum $F(\zeta, t)$ este determinat abstracție de o funcție aditivă depinzînd de timpul t, în locul expresiei (56) a lui $F(\zeta, t)$ se poate considera și expresia

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}\zeta^2 - \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta_0\,\zeta. \tag{56'}$$

Punînd $\zeta_0 = \mathrm{i}\, r_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, pe această ultimă expresie a lui $F(\zeta, t)$ se citește că dacă $a \to 0$ și $r_0 \to \infty$ așa fel ca $ar_0 = 2V_0$, la limită se obține potențialul

$$f(\zeta, t) = V_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\,\zeta \tag{55'}$$

ce corespunde mișcării plane irotaționale de translație rigidă cu viteza V_0 făcînd unghiul α cu axa Ox.

Este deci natural ca mișcarea definită de potențialele complexe (56) sau (56') să poată fi privită ca o altă generalizare la cazul mișcărilor caracterizate de (1''') a mișcării de translație rigidă din cazul mișcării plane irotaționale. Întrucît în cazul potențialelor (56) sau (56') fluidul se comportă ca un tot rigid, ceea ce nu se întîmplă în cazul potențialului (54), credem că potențialele (56) sau (56') generalizează mai bine la cazul mișcărilor descrise de (1''') mișcarea de translație rigidă din cazul irotațional.

Dacă în particular $\zeta_0 = 0$ avem potențialul

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}\zeta^2 \tag{57}$$

ce corespunde unei mișcări de rotație rigidă a unui fluid incompresibil în jurul originii O a axelor de coordonate cu viteza unghiulară $\omega = \frac{a}{2}$.

Dacă apoi $\zeta_0 = -\mathrm{i}\, y_0$, adică

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}(\zeta + \mathrm{i}\, y_0)^2, \tag{58}$$

liniile de curent ale mișcării se prezintă ca în figura 4. În acest caz, făcînd $a \to 0$ și $y_0 \to \infty$ astfel ca $a\, y_0 = -2\, V_0$, la limită se obține potențialul (55).

Într-o primă aproximație, într-un plan paralel la planul ecuatorului terestru, luînd originea O în acest plan pe axa polilor, mișcarea hidrosferei și aerosferei poate fi privită ca o mișcare pentru care avem repre-

zentarea (1′′′) iar ca potențial complex pe (57). Acesta este un caz în care domeniul ocupat de fluid este situat în afara cercului de curent solidificat.

Să considerăm un vas cilindric circular care se rotește în jurul axei sale cu o viteză unghiulară constantă ω, în vas găsindu-se un lichid care se mișcă o dată cu vasul. Într-un plan perpendicular pe axa de rotație a vasului, luînd originea O pe această axă, mișcarea fluidului este de asemenea caracterizată de reprezentarea (1′′′) și de potențialul (57). Această mișcare corespunde cazului cînd solidificînd un cerc de curent se presupune că fluidul se găsește în interiorul acestui cerc.

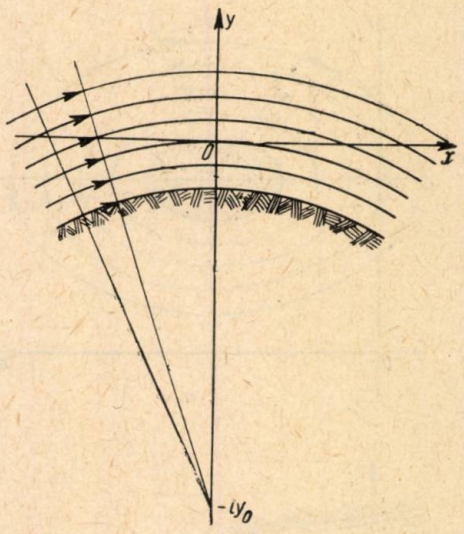


Fig. 4

În sfîrșit, să considerăm un „tunel aerodinamic" de forma unui cilindru cu generatoarele infinite paralele cu axa Oz avînd secțiunile paralele la planul xOy coroane circulare cu centrul pe axa de simetrie Oz. Dacă mișcarea fluidului se efectuează în planele paralele la planul xOy, această mișcare este de asemenea descrisă de reprezentarea (1′′′) și de potențialul (57). În acest caz, în planul xOy se solidifică două cercuri de curent și se admite că fluidul este situat în coroana circulară mărginită de cele două cercuri de curent.

c) Fie acum potențialul complex

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{\lambda}{2} a\,(\zeta - \zeta_0)^2, \tag{59}$$

unde λ și ζ_0 depind de t, iar $\lambda \neq 0$.

Partea imaginară a lui $F(\zeta, t)$ este

$$\Psi = \frac{\lambda}{2} a\,[(x - x_0)^2 - (y_0 - y_0)^2],$$

încît la momentul t familia liniilor de curent va fi caracterizată de ecuațiile

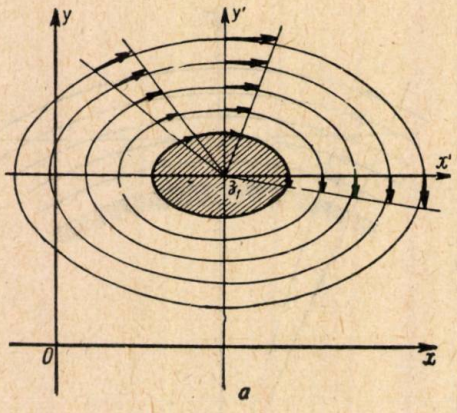
$$\frac{\lambda - 1}{2} x^2 - \lambda x_0 x - \frac{\lambda}{2}(y - y_0)^2 = \text{const.}$$

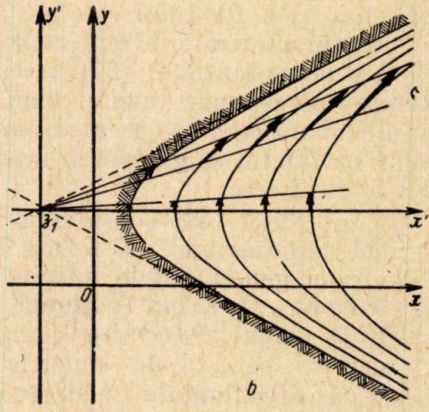
Aceste linii de curent sînt conice care după cum $\lambda \neq 1$ sau $\lambda = 1$ au centrul de simetrie la distanță finită sau nu.

Pentru $\lambda \neq 1$ ecuația liniilor de curent se scrie

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{\lambda - 1} x_0\right)^2 - (y - y_0)^2 = \text{const.}$$

Aceste linii de curent sînt deci, în acest caz, conice concentrice omotetice, centrul lor de simetrie şi omotetie fiind punctul de afixă $\zeta_1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} x_0 + iy_0$, iar axele lor de simetrie avînd direcţia axelor





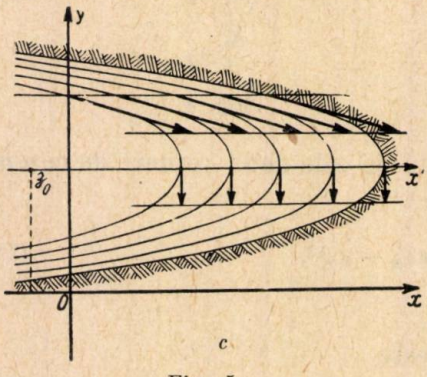


Fig. 5

Ox şi Oy. După cum $\frac{\lambda - 1}{\lambda} < 0$ sau $\frac{\lambda - 1}{\lambda} > 0$, adică după cum $\lambda \in (0,1)$ sau $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ aceste conice de curent sînt elipse, respectiv hiperbole.

Dacă $\lambda = 1$, ecuaţia liniilor de curent se scrie

$$(y - y_0)^2 = -2x_0 x + \text{const.},$$

avînd de-a face cu parabole egale care au dreapta $y = y_0$ ca axă de simetrie comună. Aceste parabole se obţin una dintr-alta prin efectuarea unei translaţii paralele cu axa Ox.

Dacă λ este o constantă pură, adică nu depinde de t ($\dot{\lambda} = 0$), solidificînd una din liniile de curent puse în evidenţă de potenţialul (59) se pot obţine mişcări cu aspectul celor din figurile 5*a*, 5*b*, 5*c*. Materializînd două linii de curent se pot obţine mişcări în diverse „suflerii" cilindrice cu generatoarele infinite şi paralele cu Oz, în secţiunile paralele la planul xOy domeniul ocupat de fluid fiind limitat de două conice de curent de aceeaşi natură. În figura 6 este prezentată o secţiune într-un plan $z = \text{const.}$ într-un astfel de „tunel aerodinamic" eliptic. În cazul cînd liniile de curent sînt hiperbole, solidificînd eventual şi una sau ambele lor asimptote avem mişcări şi de tipul celor din figura 7.

Viteza complexă este

$$w = \mathrm{i}\, a\, [\lambda\, (\zeta - \zeta_0) - \bar{\zeta}].$$

În cazul cînd $\lambda \neq 1$ componentele lui $\vec{v}$ pe axe sînt

$$v_x = -\lambda a\, (y - y_0), \quad v_y = -\,(\lambda - 1)\, a \left(x - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\, x_0 \right),$$

încît modulul V al vitezei $\vec{v}$ are expresia

$$V = |a|\, \sqrt{(\lambda - 1)^2 \left(x - \frac{\lambda}{\lambda - 1}\, x_0 \right)^2 + \lambda^2\, (y - y_0)^2}.$$

Se observă că locul geometric al particulelor fluide care la momentul t au aceeaşi viteză V este o elipsă cu acelaşi centru de simetrie ζ_1 şi axe de simetrie paralele cu Ox şi Oy. Diversele elipse în lungul cărora viteza V este aceeaşi sînt de asemenea concentrice şi omotetice.

Considerînd apoi particulele fluide care la momentul t se află pe o dreaptă ce trece prin punctul de afixă ζ_1, adică prin centrul de omotetie al conicelor de curent, se observă şi faptul că viteza acestor particule este direct proporţională cu distanţa lor la punctul ζ_1 (fig. 5*a*, 5*b* şi 6).

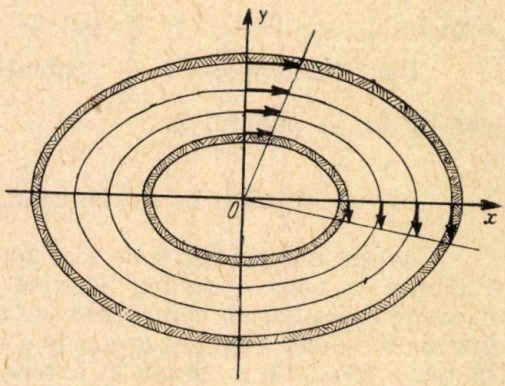


Fig. 6

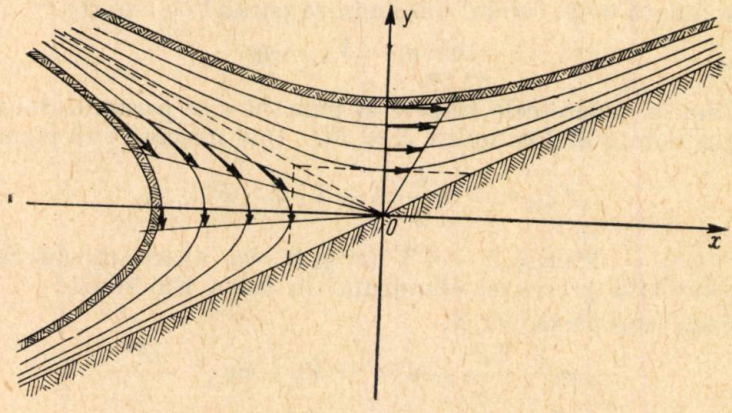


Fig. 7

Dacă apoi $\lambda = 1$, cum

$$v_x = -\,a\, (y - y_0), \quad v_y = a x_0,$$

avem

$$V = |a| \sqrt{(y - y_0)^2 + x_0^2}.$$

Se observă în acest caz că particulele fluide care la momentul t se află pe o paralelă la Ox au viteze egale. În figura 5*c* este arătat și felul cum variază viteza V în lungul axei Oy.

Cum, abstracție de o funcție aditivă depinzînd de t, potențialul complex (59) se mai scrie sub forma

$$F(\zeta, t) = i\frac{\lambda}{2} a\zeta^2 - i\lambda a \zeta_0 \zeta, \tag{59'}$$

dacă $\lambda = 1$ și luăm în particular $-ia\zeta_0 = V_0$, adică $x_0 = 0$ și $y_0 = \frac{V_0}{a}$, regăsim potențialul (54) studiat la punctul *a*.

Dacă luăm apoi $\lambda = \frac{1}{2}$, potențialul (59) se reduce la potențialul (56) considerat la punctul *b*.

11. MIȘCĂRI ÎN JURUL UNUI CILINDRU CIRCULAR FIX

Aceste mișcări pot fi de mai multe feluri, depinzînd de comportarea fluidului la mari distanțe. Ne vom ocupa de cazurile în care la mari distanțe fluidul are o comportare de tipul celor puse în evidență în paragraful precedent. Vom presupune în acest paragraf că fluidul este nelimitat în toate direcțiile și situat în exteriorul unui cilindru circular drept cu generatoarele infinite.

a) Să luăm mai întîi cazul unui fluid nelimitat situat în exteriorul cercului $|\zeta| = R$, pentru care la mari distanțe distribuția vitezelor este o funcție liniară de y, fluidul mișcîndu-se paralel cu axa Ox :

$$\lim_{x \to \pm\infty} w = V_0 - ay. \tag{60}$$

Avînd în vedere cele tratate la punctul *a* al paragrafului precedent, vom căuta potențialul complex $F = F(\zeta, t)$ al mișcării sub forma

$$F(\zeta, t) = i\frac{a}{2}\zeta^2 + V_0 \zeta + F^*(\zeta, t), \tag{61}$$

unde $F^*(\zeta, t) = \Phi^*(x, y, t) + i\Psi^*(x, y, t)$ va apare ca un termen de corecție datorită prezenței cilindrului în calea fluidului.

Viteza complexă va fi

$$w = \frac{\partial F}{\partial z} - ai x = V_0 - ay + \frac{\partial F^*}{\partial \zeta}$$

astfel că condiția (60) la mari distanțe revine la faptul că

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \zeta} = 0. \tag{60'}$$

Cum cercul $|\zeta| = R$ trebuie să fie o linie de curent, adică

$$\Psi|_{|\zeta|=R} = \frac{a}{2} x^2 + h(t), \tag{62}$$

rezultă că

$$\Psi^*|_{|\zeta|=R} = \frac{a}{2} y^2 - V_0 y + h(t). \tag{62'}$$

Deci, partea imaginară a lui $F^*(\zeta, t)$ pe cercul $|\zeta| = R$ este un polinom de gradul doi în y. Utilizînd metoda directă indicată de C. Iacob [7] relativ la rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru cerc și pentru ecuația lui Laplace cînd datele la limită pe cerc sînt funcții raționale de coordonatele x și y, vom obține

$$F^*(\zeta, t) = -\mathrm{i}\frac{a}{4}\frac{R^4}{\zeta^2} + V_0\frac{R^2}{\zeta}.$$

S-a luat $h(t) = -\frac{a}{4}R^2$ și s-a făcut abstracție de o funcție reală depinzînd de t. Prin urmare,

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(\zeta^2 - \frac{R^4}{2\zeta^2}\right) + V_0\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right). \tag{63}$$

Punînd $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și separînd partea imaginară a lui $F(\zeta, t)$ găsim

$$\Psi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)\left(1 - \frac{R^4}{2r^4}\right) + V_0 y\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Familia liniilor de curent va fi dată de ecuația

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left[\frac{1}{2}y^2\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - y_0 y - \frac{R^2}{4}\right] = k(t), \tag{64}$$

unde s-a notat $y_0 = \frac{V_0}{a}$. Se observă că pe paralela $y = y_0$ la axa Ox, la mari distanțe fluidul este în repaus.

Pentru $k(t) \equiv 0$ linia de curent corespunzătoare degenerează în curbele

$$r = R,$$

$$\frac{1}{2}y^2\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - y_0 y - \frac{R^2}{4} = 0, \tag{64'}$$

regăsindu-se faptul că cercul $x^2 + y^2 = R^2$ este o linie de curent.

Făcînd $r = R$ în a doua ecuație (64′) obținem

$$y^2 - y_0 y - \frac{R^2}{4} = 0, \tag{65}$$

ecuație care are totdeauna rădăcini reale și distincte, fie ele y_1 și y_2, iar $y_1 < y_2$. Din studiul ecuației (65) rezultă tabloul 1 de repartiție a

Dacă	Atunci	
y_0	y_1	y_2
$\left(-\infty, -\frac{3R}{4}\right)$	$(-\infty, -R)$	$\left(0, +\frac{R}{4}\right)$
$-\frac{3R}{4}$	$-R$	$+\frac{R}{4}$
$\left(-\frac{3R}{4}, 0\right)$	$\left(-R, -\frac{R}{2}\right)$	$\left(+\frac{R}{4}, +\frac{R}{2}\right)$
0	$-\frac{R}{2}$	$+\frac{R}{2}$
$\left(0, +\frac{3R}{4}\right)$	$\left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{4}\right)$	$\left(+\frac{R}{2}, +R\right)$
$+\frac{3R}{4}$	$-\frac{R}{4}$	$+R$
$\left(+\frac{3R}{4}, +\infty\right)$	$\left(-\frac{R}{4}, 0\right)$	$(+R, +\infty)$

Tabloul 1

Dacă	Atunci	
y_0	y_3	y_4
$\left(-\infty, -\frac{R}{4}\right)$	$(-\infty, -R)$	$\left(0, +\frac{R}{2}\right)$
$-\frac{R}{4}$	$-R$	$+\frac{R}{2}$
$\left(-\frac{R}{4}, 0\right)$	$\left(-R, -\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(+\frac{R}{2}, +\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$
0	$-\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{R\sqrt{2}}{2}$
$\left(0, +\frac{R}{4}\right)$	$\left(-\frac{R\sqrt{2}}{2}, -\frac{R}{2}\right)$	$\left(+\frac{R\sqrt{2}}{2}, +R\right)$
$+\frac{R}{4}$	$-\frac{R}{2}$	$+R$
$\left(+\frac{R}{4}, +\infty\right)$	$\left(-\frac{R}{2}, 0\right)$	$(+R, +\infty)$

Tabloul 2

rădăcinilor y_1 și y_2 în funcție de y_0. Cum pe cercul $|\delta| = R$ avem $|y| \leqslant R$, citind acest tablou se observă că pentru $|y_0| > \frac{3R}{4}$ curbele de curent (64′) se intersectează în două puncte reale așezate simetric față de axa Oy. Pentru $|y_0| < \frac{3R}{4}$ însă, liniile de curent (64′) se intersectează în patru puncte, de asemenea două cîte două simetric așezate față de Oy. În cazul cînd $y_0 = \pm \frac{3R}{4}$ două din cele patru puncte de intersecție ale curbelor (64′) se confundă într-un punct situat pe axa Oy.

Făcînd acum pe $x \to \pm \infty$ în a doua ecuație (64′) se obține

$$y^2 - 2 y_0 y - \frac{R^2}{2} = 0. \tag{66}$$

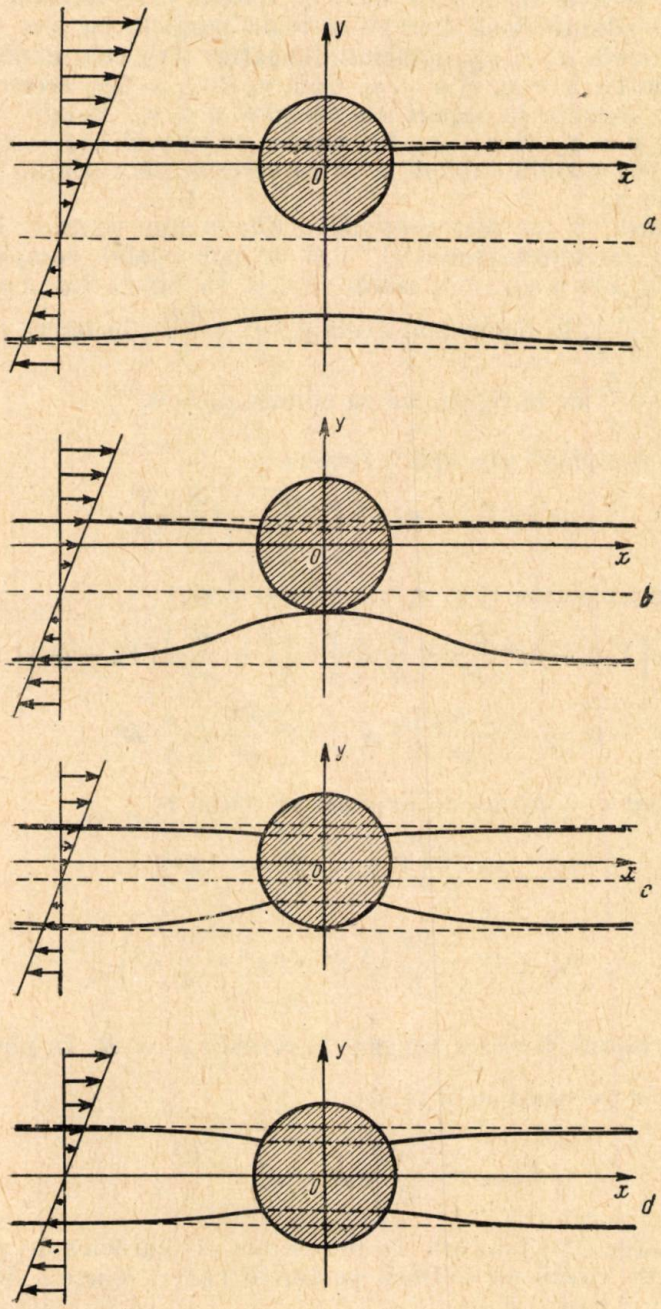


Fig. 8

Din această ecuație rezultă că linia de curent caracterizată de a doua ecuație (64′) admite două asimptote reale paralele cu axa Ox. Notînd cu y_3 și y_4, unde $y_3 < y_4$, rădăcinile ecuației (66) cele două asimptote vor avea ecuațiile $y = y_3$ și $y = y_4$. Cum $y_3 + y_4 = 2y_0$, aceste asimptote sînt simetric așezate în raport cu dreapta $y = y_0$. Relativ la plasarea asimptotelor $y = y_2$ și $y = y_4$ în raport cu cercul $|\zeta| = R$, conform cu ecuația (66) rezultă tabloul 2 ce caracterizează variația lui y_3 și y_4 în funcție de y_0.

În figurile 8 au fost prezentate cîteva din tipurile de mișcări caracterizate de reprezentarea (1‴) și de potențialul complex (63) în cazul cînd $V_0 \geqslant 0$ iar $a < 0$, adică $y_0 \leqslant 0$. În figura 8,a s-a luat $y_0 \in \left(-\infty, -\frac{3R}{4}\right)$, în figura 8,$b$ avem $y_0 = -\frac{3R}{4}$, în figura 8,c se consideră $y_0 = -\frac{R}{4}$ iar în figura 8,d se admite $y_0 = 0$.

Viteza complexă are apoi expresia

$$w = V_0 - ay - V_0 \frac{R^2}{\zeta^2} + \mathrm{i}\frac{a}{2}\frac{R^4}{\zeta^3},$$

astfel că componentele v_x și v_y ale vitezei $\vec{v}$ sînt

$$v_x = \frac{R^2 y}{r^4}\left(V_0 y - ay^2\frac{R^2}{r^2} + \frac{a}{4}R^2\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left[V_0 - ay\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\right],$$

$$v_y = -\frac{2R^2 x}{r^4}\left(V_0 y - ay^2\frac{R^2}{r^2} + \frac{a}{4}R^2\right).$$

Pe cercul $r = R$, aceste expresii se reduc la

$$v_x|_{r=R} = \frac{2y}{R}\left(V_0 y - ay^2 + \frac{a}{4}R^2\right),$$

$$v_y|_{r=R} = -\frac{2x}{R}\left(V_0 y - ay^2 + \frac{a}{4}R^2\right),$$

regăsindu-se faptul că $\vec{v}$ este tangent la cercul $|\zeta| = R$. În plus, modulul V al vitezei $\vec{v}$ pe acest cerc fiind

$$V|_{r=R} = \frac{2|a|}{R}\left|y_0 y - y^2 + \frac{R^2}{4}\right|,$$

conform ecuației (65) punctele de intersecție ale curbelor de curent (64′) sînt puncte de viteză nulă. Deci, pe cercul $|\zeta| = R$ avem două puncte de oprire dacă $\left|\frac{V_0}{a}\right| > \frac{3R}{4}$, trei puncte de oprire (din care cel de pe Oy

este un punct dublu) dacă $\frac{V_0}{a} = \pm\frac{3R}{4}$ și patru puncte de oprire dacă $\left|\frac{V_0}{a}\right| < \frac{3R}{4}$.

Luînd acum cazul particular al mișcării permanente ($\dot{V}_0 = 0$), cum

$$\frac{dF}{d\zeta} = ia\zeta + V_0 - V_0\frac{R^2}{\zeta^2} + i\frac{a}{2}\frac{R^4}{\zeta^3},$$

$$\left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 = -a^2\zeta^2 + 2iaV_0\,\zeta + V_0^2 - 2ia\frac{R^2}{\zeta} - 2\left(V_0^2 + \frac{a^2}{2}R^2\right)\frac{R^2}{\zeta^2} + \ldots,$$

în baza formulelor (41) și (42), în absența forțelor de masă, rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x - i\mathcal{R}_y &= 2\pi i \rho a V_0 R^2, \\ \mathcal{M}_o &= 0. \end{aligned} \tag{67}$$

Așadar, torsorul presiunilor fluidului pe suprafața cilindrului $|\zeta| = R$ se reduce la o rezultantă al cărei suport este axa Oy. Cum $\mathcal{R}_y = -2\pi\rho a V_0 R^2 = -2MaV_0$, sensul lui $\vec{\mathcal{R}}$ este dat de semnul produsului aV_0. Avem deci o extindere a paradoxului lui D'Alembert.

Rezultatele prezentate pînă acum în acest paragraf constituie o expunere sub o formă nouă a rezultatelor obținute de K. V. Sanden [9] în 1912, S. A. Ciaplîghin [1] în 1921, H. S. Tsien [10] în 1943 și V. Vâlcovici [19] în 1952. Calculele efectuate de noi apar ca un caz particular al calculelor generale și unitare prezentate în capitolele precedente.

b) Vom lua acum cazul unui fluid de asemenea nelimitat și situat în exteriorul cercului $|\zeta| = R$, care însă la mari distanțe este antrenat într-o mișcare de rotație rigidă în jurul punctului $\zeta_0 = x_0 + iy_0$ situat în domeniul ocupat de fluid, adică $x_0^2 + y_0^2 > R^2$.

Să notăm cu $\omega = \frac{a}{2}$ viteza unghiulară de rotație cu care la mari distanțe se mișcă fluidul în jurul punctului ζ_0. Potențialul complex $F(\zeta, t)$ al mișcării va satisface condiția la mari distanțe

$$\lim_{|\zeta|\to\infty}\left[w + i\frac{a}{2}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)\right] = 0 \tag{68}$$

și o condiție la limită pe cercul $|\zeta| = R$ de aceeași formă cu condiția la limită (62).

Analog ca mai înainte, vom alege pe $F(\zeta, t)$ sub forma

$$F(\zeta, t) = i\frac{a}{4}(\zeta + \bar{\zeta}_0)^2 + F^*(\zeta, t).$$

Problema deci se reduce la determinarea funcției $F^*(\zeta, t)$, olomorfă în exteriorul cercului $|\zeta| = R$, pentru care la mari distanțe

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \zeta} = 0 \tag{68'}$$

iar pe cercul $|\zeta| = R$ satisface condiția la limită

$$\Psi^*|_{|\zeta|=R} = \frac{a}{4}(|\zeta|^2 - 2x_0 x - 2y_0 y - x_0^2 + y_0^2) + h(t). \tag{69}$$

Luînd $h(t) = -\frac{a}{4}R^2$, ultima condiție la limită devine

$$\Psi^*|_{|\zeta|=R} = -\frac{a}{4}(x_0 x + y_0 y) - \frac{a}{2}(x_0^2 - y_0^2). \tag{69'}$$

Aplicînd din nou metoda directă a lui C. Iacob [7] anunțată mai înainte, abstracție de o funcție reală depinzînd de t, avem

$$F^*(\zeta,t) = -\mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta_0\frac{R^2}{\zeta} - \mathrm{i}\frac{a}{4}\bar{\zeta}_0^2,$$

astfel încît

$$F(\zeta,t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}(\bar{\zeta} + \bar{\zeta}_0)^2 - \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta_0\frac{R^2}{\zeta} - \mathrm{i}\frac{a}{4}\bar{\zeta}_0^2,$$

sau ceea ce este același lucru

$$F(\zeta,t) = \mathrm{i}\frac{a}{4}\zeta^2 + \mathrm{i}\frac{a}{2}\left(\bar{\zeta}_0\zeta - \zeta_0\frac{R^2}{\zeta}\right). \tag{70}$$

Partea imaginară a lui $F(\zeta,t)$ este

$$\Psi = \frac{a}{4}(x^2 - y^2) + \frac{a}{2}(x_0 x + y_0 y)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

și prin urmare familia liniilor de curent este o familie de cuartice a căror ecuație este

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)(r^2 - 2x_0 x - 2y_0 y) = k(t).$$

Pentru $k(t) \equiv 0$ linia de curent corespunzătoare degenerează în cercurile

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y &= 0. \end{aligned} \tag{71}$$

Aceste două cercuri de curent se intersectează în două puncte. Cercul $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y = 0$ are centrul în punctul de afixă $\zeta_0 = x_0 + iy_0$ și trece prin originea axelor. Alura mișcării cu vîrtej constant caracterizată de potențialul (70) și de reprezentarea (1''') este dată de figura 9.

Viteza complexă a mișcării este

$$w = -i\frac{a}{2}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0) + i\frac{a}{2}\zeta_0\frac{R^2}{\zeta^2}$$

astfel că componentele pe axe ale lui $\vec{v}$ sînt:

$$v_x = -\frac{a}{2}(y - y_0) - \frac{aR^2}{2}\frac{y_0(x^2 - y^2) - 2x_0xy}{r^4},$$

$$v_y = \frac{a}{2}(x - x_0) - \frac{aR^2}{2}\frac{x_0(x^2 - y^2) + 2y_0xy}{r^4}.$$

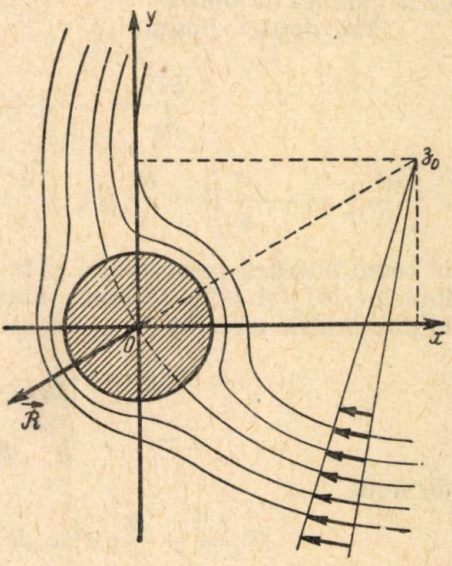


Fig. 9

Pe cercul $x^2 + y^2 = R^2$ avem

$$v_x|_{r=R} = -\frac{a}{2}y\left(1 - \frac{2x_0x + 2y_0y}{R^2}\right),$$

$$v_y|_{r=R} = \frac{a}{2}x\left(1 - \frac{2x_0x + 2y_0y}{R^2}\right),$$

modulul vitezei $\vec{v}$ fiind

$$V|_{r=R} = \frac{1}{2R}|a(R^2 - 2x_0x - 2y_0y)|.$$

Pe cercul $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y = 0$ de asemenea

$$v_x|_{r^2=2x_0x+2y_0y} = -\frac{a}{2}(y - y_0)\left(1 - \frac{R^2}{2x_0x + 2y_0y}\right),$$

$$v_y|_{r^2=2x_0x+2y_0y} = \frac{a}{2}(x - x_0)\left(1 - \frac{R^2}{2x_0x + 2y_0y}\right),$$

astfel că modulul vitezei

$$V|_{r^2=2x_0x+2y_0y} = \frac{1}{2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\left|a\left(1 - \frac{R^2}{2x_0x + 2y_0y}\right)\right|.$$

Pe expresia modulului V al vitezei $\vec{v}$ pe cercurile $r^2 = R^2$ şi respectiv $r^2 = 2x_0 x + 2y_0 y$, se citeşte că în punctele unde aceste cercuri se intersectează, viteza $\vec{v}$ este nulă. Cu alte cuvinte pe obstacolul $|\zeta| = R$ există două puncte de oprire.

Mai departe, cum

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta + \mathrm{i}\frac{a}{2}\bar{\zeta}_0 + \mathrm{i}\frac{a}{2}\frac{R^2}{\zeta^2},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}\zeta^2 - \frac{a^2}{4}\bar{\zeta}_0\zeta - \frac{a^2}{4}\bar{\zeta}_0^2 - \frac{a^2}{2}\zeta_0\frac{R^2}{\zeta} - \frac{a^2}{2}|\zeta_0|^2\frac{R^2}{\zeta^2} + \ldots,$$

în cazul mişcării permanente şi în absenţa forţelor de masă, conform formulelor (41) şi (42), acţiunea hidrodinamică a fluidului asupra obstacolului cilindric circular $|\zeta| = R$ este dată de formulele

$$\mathcal{R}_x - \mathrm{i}\mathcal{R}_y = -\frac{\pi}{2}\rho a^2 \bar{\zeta}_0 R^2, \qquad \mathcal{M}_o = 0, \tag{72}$$

de unde

$$\mathcal{R}_x = -\frac{\pi}{2}\rho a^2 x_0 R^2, \quad \mathcal{R}_y = -\frac{\pi}{2}\rho a^2 y_0 R^2.$$

Aşadar, acţiunea fluidului asupra cilindrului $|\zeta| = R$ se reduce la o rezultantă $\vec{\mathcal{R}}$ de mărime $|\vec{\mathcal{R}}| = \frac{\pi}{2}\rho a^2 r_0 R^2 = \frac{1}{2}M a^2 r_0$, unde $r_0 = |\zeta_0|$, al cărei suport trece prin originea O a axelor şi prin punctul ζ_0, cu sensul de la ζ_0 spre O. Deci, rezultanta $\vec{\mathcal{R}}$ este de natura unei forţe centrifuge căutînd să depărteze obstacolul de punctul ζ_0.

Ţinînd cont că în realitate fluidul exercită o presiune asupra obstacolului pe direcţia mişcării fluidului în jurul obstacolului, faptul că $\vec{\mathcal{R}}$ are direcţia vectorului ce uneşte pe ζ_0 cu O constituie o contradicţie. Avem de-a face deci şi de data aceasta cu o extindere a paradoxului lui D'Alembert, presiunea fluidului asupra cilindrului $|\zeta| = R$ fiind perpendiculară pe direcţia de mişcare pe care ar avea-o fluidul dacă obstacolul n-ar exista.

Analiza mişcării cu vîrtej constant caracterizată de potenţialul (70) permite a spune că avem de-a face cu o extindere a mişcării irotaţionale plane în jurul cercului $|\zeta| = R$, fluidul la mari distanţe fiind antrenat într-o mişcare de translaţie rigidă cu viteza V_0 făcînd unghiul $\alpha = \arg(-\mathrm{i}\bar{\zeta}_0)$. Într-adevăr, punînd pe ζ_0 sub forma $\zeta_0 = ir_0 e^{i\alpha}$, expresia (70) a lui $F(\zeta, t)$ se mai scrie

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{a}{2}\zeta^2 + \frac{ar_0}{2}\left(e^{-i\alpha}\zeta + e^{i\alpha}\frac{R^2}{\zeta}\right),$$

de unde făcînd $a \to 0$ și $r_0 \to \infty$ așa fel ca $ar_0 = 2V_0$, la limită se obține

$$f(\zeta, t) = V_0\left(e^{-i\alpha}\zeta + e^{i\alpha}\frac{R^2}{\zeta}\right)$$

potențial ce justifică afirmația noastră.

În particular se poate lua uneori $z_0 = -iy_0$, în care caz

$$F(\zeta, t) = i\frac{a}{4}\zeta^2 - \frac{ay_0}{2}\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) \tag{70'}$$

iar cercurile de curent (71) devin

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - R^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + 2y_0 y &= 0. \end{aligned} \tag{71'}$$

Potențialul (70') generalizează în cazul mișcărilor cu vîrtej constant mișcarea plană irotațională în jurul cilindrului $|\zeta| = R$ pentru care la mari distanțe viteza fluidului este paralelă cu axa Ox. Corespondentul axei Ox care în cazul mișcării plane irotaționale, caracterizată de potențialul

$$f(\zeta, t) = V_0\left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right),$$

era linie de curent, în cazul potențialului (70') va fi cercul

$$x^2 + y^2 + 2y_0 y = 0.$$

Pentru $x = 0$, componentele vitezei în mișcarea caracterizată de potențialul (70') și de reprezentarea (1''') sînt

$$v_x|_{x=0} = -\frac{a}{2}(y + y_0) - \frac{ay_0}{2}\frac{R^2}{y^2}, \quad v_y|_{x=0} = 0,$$

astfel încît distribuția vitezelor pe axa Oy apare în acest caz ca în figura 10.

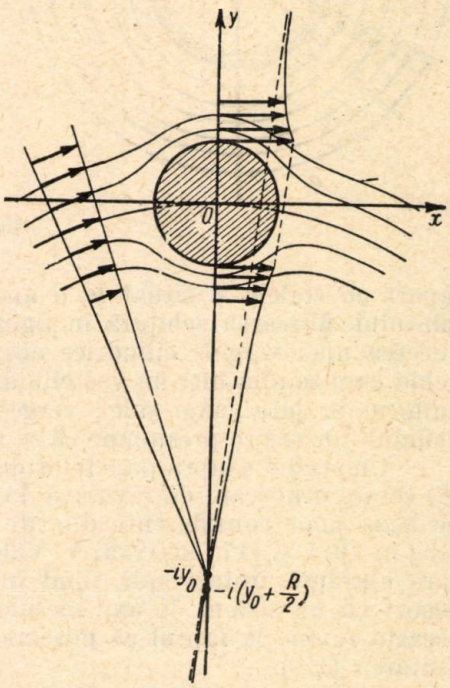


Fig. 10

Dacă $y_0 >>> R$, la o distanță suficient de mare de cilindrul $|\zeta| = R$ influența acestui cilindru practic nu se mai simte, astfel că liniile de curent ale mișcării

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)(r^2 + 2y_0 y) = k$$

se pot aproxima în prima instanță cu cercurile $r^2 + 2y_0 y = k$. Solidificînd o astfel de linie de curent, mișcarea cu vîrtej constant corespunzătoare poate avea alura din figurile 11, *a* sau *b*. Mișcarea ilustrată în figura 11,*a* poate fi mișcarea aerului în atmosfera terestră, într-un plan paralel la planul ecuatorului în jurul unui corp cilindric considerat ca imobil în

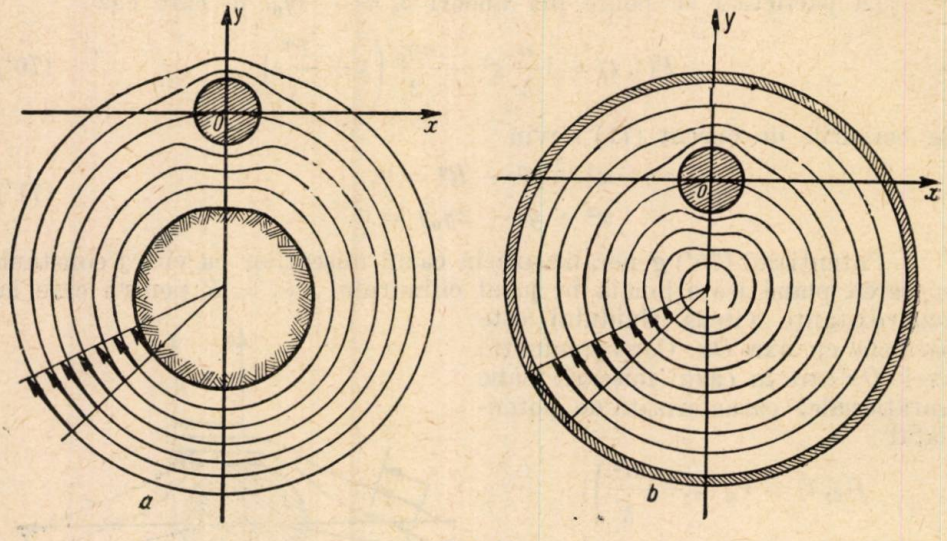


Fig. 11

raport cu stelele și situat la o anumită înălțime față de suprafața Pămîntului. Mișcarea schițată în figura 11,*b* poate fi obținută prin introducerea unei vergele cilindrice circulare de diametru foarte mic într-un lichid care se află într-un vas cilindric, de asemenea circular, ce se rotește uniform în jurul axei sale ; vergeaua este paralelă cu axul vasului iar lichidul din vas se presupune că se rotește o dată cu vasul ca un tot rigid.

Un studiu asupra punctelor de oprire situate pe un obstacol cilindric (S) ce are o mișcare de revoluție în jurul unei axe fixe Oz a fost efectuat, pe baza unor considerente diferite de ale noastre, de către V. Vâlcovici [15] în 1917 și [17] în 1929. V. Vâlcovici a considerat că fluidul are o mișcare absolută irotațională fiind în repaus absolut la mari distanțe. În raport cu un sistem de axe mobile $Oxyz$ solidar legat de obstacolul (S), aceasta revine la faptul că mișcarea relativă este caracterizată de reprezentarea (1‴).

c) Să considerăm în sfîrșit cazul unui fluid incompresibil nelimitat situat în exteriorul cercului $|\zeta| = R$ a cărui mișcare la mari distanțe este caracterizată de condiția

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} [w - \lambda a i\,(\zeta + \bar{\zeta}_0) + a i x] = 0, \tag{73}$$

unde $\lambda \neq 0$.

Vom alege potențialul complex $F(\zeta, t)$ sub forma

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{\lambda}{2} a\,(\zeta + \bar{\zeta}_0)^2 + F^*(\zeta, t).$$

Condiția la mari distanțe devine

$$\lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \zeta} = 0. \tag{73'}$$

Cum pe cercul $|\zeta| = R$ avem condiția la limită (62), urmează că

$$\Psi^*|_{|\zeta|=R} = \frac{1}{2} a x^2 - \frac{\lambda}{2} a\,[(x + x_0)^2 - (y - y_0)^2] + h(t), \tag{74}$$

sau, luînd $h(t) = -\frac{\lambda}{2} a R^2$,

$$\Psi^*|_{|\zeta|=R} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) x^2 - \lambda a\,(x_0 x + y_0 y) - \frac{\lambda}{2} a\,(x_0^2 - y_0^2). \tag{74'}$$

Metoda lui C. Iacob [7] în acest caz va da

$$F^*(\zeta, t) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\frac{a}{2}\,\frac{R^4}{\zeta^2} - \mathrm{i}\,\lambda a\,\zeta\,\frac{R^2}{\zeta} - \mathrm{i}\,\frac{\lambda}{2} a\,\bar{\zeta}_0^2.$$

Deci

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{\lambda}{2} a\,(\zeta + \bar{\zeta}_0)^2 + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\frac{a}{2}\,\frac{R^4}{\zeta^2} - \mathrm{i}\lambda a\zeta_0\,\frac{R^2}{\zeta} - \mathrm{i}\,\frac{\lambda}{2} a\bar{\zeta}_0^2,$$

sau altfel scris

$$F(\zeta, t) = \mathrm{i}\frac{\lambda}{2} a\zeta^2 + \mathrm{i}\lambda a\bar{\zeta}_0\zeta - \mathrm{i}\lambda a\,\zeta_0\,\frac{R^2}{\zeta} + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\frac{a}{2}\,\frac{R^4}{\zeta^2}. \tag{75}$$

Partea imaginară a lui $F(\zeta, t)$ este

$$\Psi = \frac{\lambda}{2} a\,(x^2 - y^2) + \lambda a\,(x_0 x + y_0 y)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \\ + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\frac{a}{2}\,(x^2 - y^2)\,\frac{R^4}{\zeta^2},$$

încît familia liniilor de curent va fi dată de ecuația

$$\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left[\frac{\lambda - 1}{2} x^2 - \frac{\lambda}{2} y^2 + \lambda\,(x_0 x + y_0 y) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(x^2 - y^2)\,\frac{R^2}{r^2}\right] = k(t). \tag{76}$$

În cazul $\lambda \neq 1$ această ecuație se scrie

$$\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[\frac{\lambda-1}{\lambda}\left(x+\frac{\lambda}{\lambda-1}x_0\right)^2-(y-y_0)^2-\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}x^2{}_0-y_0^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)(x^2-y^2)\frac{R^2}{r^2}\right]=k_1(t) \qquad (76')$$

iar în cazul $\lambda = 1$

$$\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[(y-y_0)^2-2x_0x-y_0^2-\frac{1}{2}(x^2-y^2)\frac{R^2}{r^2}\right]=k_2(t). \qquad (76'')$$

Pentru $k(t)\equiv 0$ linia de curent (76) degenerează în cercul $r = R$ și curba

$$\frac{\lambda-1}{2}x^2-\frac{\lambda}{2}y^2+\lambda(x_0x+y_0y)+\frac{1}{2}\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(x^2-y^2)\frac{R^2}{r^2}=0. \qquad (77)$$

Se observă că pentru $\lambda=\frac{1}{2}$ linia de curent (77) se reduce la cercul de curent

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y=0$$

ca și cum obstacolul $|\zeta|=R$ nici n-ar fi existat în calea fluidului. Pentru $\lambda\neq\frac{1}{2}$ linia de curent (77) diferă de linia de curent corespunzătoare

$$\frac{\lambda-1}{2}x^2-\frac{\lambda}{2}y^2-\lambda(x_0x+y_0y)=0$$

cînd obstacolul $|\zeta|=R$ n-ar mai exista.

Făcînd $r = R$ în ecuația (77) se obține

$$(2\lambda-1)x^2+\lambda(x_0x+y_0y)-\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)R^2=0. \qquad (78)$$

În general deci, avem patru puncte de intersecție ale liniei de curent (77) cu cercul $r = R$, dintre care două pot fi imaginare sau confundate. În cazul $\lambda=\frac{1}{2}$ două din aceste puncte de intersecție sînt aruncate la infinit.

Viteza complexă are expresia

$$w=i\lambda a(\zeta+\bar{\zeta}_0)+i\lambda a\zeta_0\frac{R^2}{\zeta^2}+i\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)a\frac{R^4}{\zeta^3}-iax,$$

încît

$$v_x=-\lambda a(y-y_0)-\lambda a\left[y_0(x^2-y^2)-2x_0xy\right]\frac{R^2}{r^4}+$$
$$+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)ay(3x^2-y^2)\frac{R^4}{r^6},$$

$$v_y = -\lambda a(x + x_0) - \lambda a[x_0(x^2 - y^2) + 2y_0xy]\frac{R^2}{r^4} -$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) ax(x^2 - 3y^2)\frac{R^4}{r^6} + ax.$$

Pe cercul $r = R$:

$$v_x|_{r=R} = \frac{2ay}{R^2}\left[(2\lambda - 1)x^2 + \lambda(x_0x + y_0y) - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)R^2\right],$$

$$v_y|_{r=R} = -\frac{2ax}{R^2}\left[(2\lambda - 1)x^2 + \lambda(x_0x + y_0y) - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)R^2\right],$$

astfel că

$$V|_{r=R} = \frac{2|a|}{R}\left|(2\lambda - 1)x^2 + \lambda(x_0x + y_0y) - \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)R^2\right|.$$

Conform cu (78) se observă și de data aceasta că punctele unde curba (77) intersectează cercul $|\zeta| = R$ sînt puncte de oprire.

Apoi, avînd

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} = i\lambda a(\zeta + \bar{\zeta}_0) + i\lambda a\zeta_0\frac{R^2}{\zeta^2} + i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)a\frac{R^4}{\zeta^3},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 = -\lambda^2a^2\zeta^2 - 2\lambda^2a^2\bar{\zeta}_0\zeta - \lambda^2a^2\bar{\zeta}_0^2 - 2\lambda^2a^2\zeta_0\frac{R^2}{\zeta} -$$

$$-2\lambda a^2\left[\lambda(\zeta_0)^2 + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)R^2\right]\frac{R^2}{\zeta^2} + \ldots,$$

în cazul mișcării permanente și în absența forțelor de masă, prin aplicarea formulelor (41) și (42) rezultă

$$\begin{gathered}\mathcal{R}_x - i\mathcal{R}_y = 2\pi\rho a^2R^2\lambda(\lambda\zeta_0 - x_0),\\ \mathcal{M}_o = 0.\end{gathered} \tag{79}$$

Deci, vectorul $\vec{\mathcal{R}}$ trece prin originea O a axelor iar

$$\mathcal{R}_x = 2\lambda(\lambda - 1)Ma^2x_0, \quad \mathcal{R}_y = -2\lambda^2a^2My_0,$$

unde $M = \pi\rho R^2$ este masa fluidului dislocuit de obstacolul $|\zeta| = R$.

Pentru $\lambda = 1$ avem

$$\mathcal{R}_x = 0, \quad \mathcal{R}_y = -2a^2My_0,$$

încît dacă avem și $y_0 = 0$, rezultă $\vec{\mathcal{R}} = 0$ și deci paradoxul lui D'Alembert se păstrează sub aceeași formă ca și în cazul mișcării irotaționale plane în jurul cercului $|\zeta| = R$.

Primită la redacție la 10 noiembrie 1962

ОБ ОДНОМ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ ВИХРЕМ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

РЕЗЮМЕ

В работе изучаются движения жидкости, заданные представлением (1), т.е. движения, для которых

$$\text{rot } \vec{v} = a\vec{k}, \quad \text{где } a = \text{конст.}$$

В главе I изучаются в общем случае эти движения и особо рассматривается частный случай, когда переменная z не входит в рассуждения — представления (1′), (1″), (1‴). Вводится функция H и показывается, что поверхности (8) являются поверхностями Бернулли-Вылкович. Согласно (9) вводится также функция Ψ такая, что функции Φ и Ψ — гармонически сопряженные. С использованием комплексной переменной $\zeta = x + iy$ рассматривается функция $F(\zeta, t) = \Phi(x, y, t) + i\,\Psi(x, y, t)$, аналогичная комплексному потенциалу для случая плоского безвихревого движения. С помощью комплексного потенциала $F(\zeta, t)$ получается для комплексной скорости w выражение (13).

В главе II принимается, что жидкость находится в контакте с твердой цилиндрической поверхностью (S), имеющей образующие, параллельные оси Oz. Предельные условия на поверхности (S) в случае когда она двигается, представляются в различных формах (19), (19′), (19″) или (20), (20′), (20″) смотря по тому, проектируется ли абсолютное движение жидкости на фиксированные оси Ox, Oy, Oz или на движущиеся оси $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, жестко связанные с поверхностью (S). В случае, когда поверхность (S) неподвижна, предельные условия принимают вид (21), (21′), (21″), и получается, что поверхность (S) является поверхностью Бернулли-Вылкович.

Согласно (29) вводится *относительный комплексный потенциал* $F_r'(\zeta', t)$. С помощью этого относительного комплексного потенциала $F_r'(\zeta', t)$ выражение относительной комплексной скорости w_r' приводится к виду (27), аналогичному (13), а предельные условия (20), (20′), (20″) к виду (33), (33′), (33″), как если бы препятствие (S) было неподвижным. Введение относительного комплексного потенциала существенно в формулах (45), (46) и последующих, характеризующих гидродинамическое действие жидкости на подвижное цилиндрическое препятствие (S) и позволяет сравнить эти формулы с соответствующими формулами — формулы (39), (40) и последующие — для случая, когда препятствие (S) неподвижно.

В главе III дается ряд простых иллюстративных примеров. Целью этих примеров является, с одной стороны, приучить читателей к единому рабочему методу, который выявляет работа, а с другой стороны, показать, что в случае движений несжимаемой жидкости, индуцированных представлением (1‴) на больших расстояниях жидкость может вести себя по-разному.

MOUVEMENT PLAN À TOURBILLON CONSTANT D'UN FLUIDE PARFAITEMENT INCOMPRESSIBLE

RÉSUMÉ

L'auteur étudie les mouvements fluides donnés par la représentation (1), c'est-à-dire les mouvements pour lesquels rot $\vec{v} = a\vec{k}$, où a = const.

Au chapitre I, il étudie ces mouvements en général et il considère tout particulièrement les cas lorsque la variable z n'apparaît pas dans les raisonnements — les représentations (1′), (1″) et (1‴). Il introduit la fonction H et il montre que les surfaces (8) sont des surfaces de Bernoulli-Vâlcovici. Conformément à (9), il introduit aussi la fonction Ψ, de sorte que les fonctions Φ et Ψ sont harmoniquement conjuguées. Utilisant la variable complexe $\zeta = x + iy$, il considère la fonction $F(\zeta, t) = \Phi(x, y, t) + i\Psi(x, y, t)$ analogue au potentiel complexe du cas du mouvement plan irotationnel. A l'aide du potentiel complexe $F(\zeta, t)$ nous avons l'expression (13) pour la vitesse complexe ω.

Au chapitre II, il considère que le fluide est en contact avec une surface cylindrique rigide (S) ayant les génératrices parallèles à l'axe Oz. Les conditions aux limites sur la surface (S), lorsque celle-ci est mobile, se présentent sous diverses formes (19), (19′), (19″) ou (20), (20′), (20″) selon que le mouvement absolu du fluide se projette sur les axes fixes Ox, Oy, Oz ou sur les axes mobiles $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ solidairement liés à la surface (S). Lorsque la surface (S) est fixe, les conditions aux limites revêtent les formes (21), (21′), (21″) et il en résulte que la surface (S) est une surface de Bernoulli-Vâlcovici.

Conformément à (29), on introduit le *potentiel complexe relatif* $F_r'(\zeta', t)$. A l'aide de ce potentiel complexe relatif $F_r'(\zeta', t)$ l'expression de la vitesse complexe relative W_r' peut être mise sous la forme (27), analogue à (13), et les conditions aux limites (20), (20′) et (20″) sous la forme (33), (33′) et (33″), comme si l'obstacle (S) était fixe. L'introduction du potentiel complexe relatif est essentielle dans les formules (45), (46) et les suivantes, qui caractérisent l'action hydrodynamique du fluide sur un obstacle cylindrique (S) mobile, permettant de comparer ces formules aux formules correspondantes — les formules (39), (40) et les suivantes — si l'obstacle (S) était fixe.

Au chapitre III, l'auteur donne une série d'exemples simples qui illustrent ses affirmations. Le but de ces exemples est d'habituer, d'une part, les lecteurs avec la méthode unitaire de travail que met en évidence sa communication, et, d'autre part, pour montrer que dans le cas des mouvements fluides incompressibles, induits par la représentation (1‴), le fluide peut se comporter à de grandes distances, de différentes manières.

BIBLIOGRAFIE

1. ЧАПЛЫГИН С. А., *К теории метелей*. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1948, **II**, 567—575.
2. CRISTEA I. ION, Analele Universităţii din Bucureşti, (1962).
3. CRISTEA GH. VICTORIA, St. cerc. mat., **XIV**, *1*, 99—114 (1963).
4. IACOB CAIUS, Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Seria mat.-fiz., **VI**, *4*, 801—809 (1954).
5. — St. cerc. mat., **V**, *3—4*, 333—349 (1954).
6. — *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*. Bucureşti-Paris, 1959.
7. — Com. Acad. R.P.R., **XII**, *4*, 381—385 (1962).
8. KUO Y. H., Quarterly of Applied Math., **I**, *3*, 273—275 (1943).
9. SANDEN K. V., Zeitschrift für Math. und Phys., **61**, 225 (1912).
10. TSIEN N. S., Quarterly of Applied Math., **1**, *2*, 130—148 (1943).
11. VĂLCOVICI V., Buletinul ştiinţific al Acad. Romîne, **II**, 101—107 (1913).
12. — Annali di Matem. pura et applicata, Milano, Serie III, **XXIII**, 27—40 (1914).
13. — C.R. Acad. Sci. Paris, **158**, 169—171 (1914).
14. — C.R. Acad. Sci. Paris, **158**, 683 (1914).
15. — C.R. Acad. Sci. Paris, **165**, 147 (1917).
16. — C.R. Acad. Sci. Paris, **171**, 619—621 (1920).
17. — Bulletin scientifique de l'Ecole polytechnique de Timişoara, **2**, *3—4*, 199—237 (1929).
18. — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **17**, *3*, 177—180 (1937).
19. — Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., *4*, *4*, 653—660 (1952).

SUPRAFEȚE DE RĂSPUNS ȘI TEORIA REGRESIEI[1])

DE

A. CREANGĂ și I. VĂDUVA

INTRODUCERE

Să presupunem că o variabilă aleatoare η este determinată de valorile unui parametru sau ale mai multor parametri $x_1, \ldots, x_k$ care nu sînt variabile aleatoare.

Valoarea lui η, cînd au fost date anumite valori pentru $x_1, \ldots, x_k$ se va numi răspuns.

Funcția care dă valorile lui η, adică

$$\eta = \varphi(x_1, \ldots, x_k), \tag{1}$$

se va numi funcție de răspuns iar suprafețele

$$\eta = \text{constant} \tag{2}$$

se numesc suprafețe de răspuns.

Studiul suprafețelor de răspuns prezintă un interes deosebit în aplicațiile curente atît în industrie, cît și în alte domenii, ceea ce rezultă și din bibliografia citată.

Sînt cunoscute în general două aspecte ale problemei:

a) Estimarea (explorarea) suprafețelor de răspuns.

b) Exploatarea suprafețelor de răspuns.

În ceea ce privește primul aspect al problemei, subliniem faptul că el nu poate căpăta o soluție întrutotul exactă. Din această cauză el se confundă cu problema generală a regresiei în sensul că se urmărește determinarea valorii medii a lui η. Vom considera că relația (1) definește chiar valoarea medie η a răspunsului. Estimarea suprafețelor de răspuns se bazează de obicei pe metoda celor mai mici pătrate. Atunci însă trebuie

---

[1]) Comunicare prezentată la „Colocviul de Teoria probabilităților", Brașov, 22–26 octombrie 1962.

presupus că η este o variabilă normală și de asemenea trebuie precizată și forma regresiei.

Problema exploatării suprafețelor de răspuns este legată în general de necesitățile practice. Dacă, de exemplu, răspunsul este un randament, problema ar fi să găsim domeniul din spațiul $(x_1, \ldots, x_k)$ căruia îi corespunde randamentul maxim [8], adică maximul absolut al suprafeței de răspuns. Acest lucru este banal de rezolvat cînd se cunoaște precis suprafața de răspuns adică după ce s-a rezolvat prima problemă.

Noi ne vom ocupa, îndeosebi, de primul aspect precizat mai sus și anume de explorarea suprafețelor de răspuns. În diverse lucrări [4], [5], [9] se studiază găsirea *răspunsului* de dispersie minimă, adică estimarea funcției φ cu ajutorul unei funcții $\hat{\varphi}$ de datele experimentale, astfel încît

$$M(\eta - \hat{\varphi})^2 = \min.$$

Astfel în lucrarea [4] se indică metoda găsirii răspunsului *optim*, pentru suprafața de forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x), \tag{3}$$

unde se presupun anumite condiții de regularitate în legătură cu funcțiile $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$, care sînt cunoscute, și se dă și metoda de alegere a valorilor de selecție x_α $(\alpha = 1, \ldots, N)$ pentru acest caz.

Rezultatele din [5] ne sugerează considerarea în același scop a suprafețelor de răspuns de forma (3).

Nu vom relua aici problemele din [4] și [5] însă vom prezenta un test cu ajutorul căruia putem stabili suprafața de răspuns de dispersie convenabilă, presupunînd că funcțiile $f_i(x)$ sînt cunoscute și că nu toate influențează la fel asupra răspunsului, testul permițînd în același timp să fie luate în considerare numai funcțiile care influențează semnificativ răspunsul.

1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA ESTIMĂRII SUPRAFEȚELOR (3)

Faptul că x din (3) este un vector sau o variabilă reală nu va schimba considerațiile.

Vom presupune că s-au ales N valori $x_1, \ldots, x_N$ și s-au determinat cele N răspunsuri corespunzătoare $\eta_1, \ldots, \eta_N$.

Presupunem că $x_1, \ldots, x_N$ au fost astfel alese încît să satisfacă condițiile de minim ale dispersiei din [4]. Vom obține atunci matricea schemă [1], [5]

$$D_{N,p} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \\ f_1(x_N) & \ldots & f_p(x_N) \end{bmatrix}$$

Vom presupune că

$$\eta_\alpha = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i(x_\alpha) + \varepsilon_\alpha,$$

unde a_i sînt valorile adevărate ale coeficienților de estimat iar ε_α sînt variabile normale $N(0, \sigma^2)$.

Estimațiile coeficienților a_i, obținute prin metoda celor mai mici pătrate sînt soluțiile ecuațiilor normale

$$\sum_{j=1}^{p} F_{ij} a_j = B_i, \qquad (i = 1, \ldots, p), \tag{4}$$

unde

$$F_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} f_i(x_\alpha) f_j(x_\alpha) \qquad (i, j = 1, \ldots, p), \tag{5}$$

$$B_i = \sum_{\alpha=1}^{N} f_i(x_\alpha)\eta_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, p). \tag{6}$$

Presupunem că matricea pătratică $F = F_{ij}$ are rangul p și vom nota $C = (c_{ij}) = F^{-1}$.

Vom mai nota

$$u_i = \sum_{\alpha=1}^{N} f_i(x_\alpha)\eta_\alpha, \tag{7}$$

$$l_\alpha = \eta_\alpha - \sum_{i=1}^{p} \hat{a}_i f_i(x_\alpha), \tag{8}$$

unde $\hat{a}_i$ sînt coeficienții estimați cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate.

În aceste condiții, are loc următoarea lemă, a cărei demonstrație se transpune din [5].

LEMĂ. *Cu notațiile de mai sus avem*

$$l_\alpha = \varepsilon_\alpha - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} c_{ij} \sum_{\beta=1}^{N} f_i(x_\alpha) f_j(x_\beta)\varepsilon_\beta,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} l_\alpha^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \varepsilon_\alpha^2 - \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} c_{ij} u_i u_j,$$

iar expresia $\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{l_\alpha^2}{\sigma^2}$ urmează repartiția χ^2 cu N-p grade de libertate.

2. TEST PENTRU GĂSIREA SUPRAFEȚEI DE RĂSPUNS OPTIMĂ

Presupunem că suprafața de răspuns este de forma (3) și vrem să verificăm dacă suprafața de răspuns convenabilă *optimă* este de forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{p_1} a_i^{(1)} f_i^{(1)}(x), \tag{9}$$

sau de forma

$$\eta = \sum_{i=1}^{p_2} a_i^{(2)} f_i^{(2)}(x), \tag{10}$$

cu $p_1, p_2 < p$ iar funcţiile $f_i^{(s)}(x)$, $(s = 1, 2;\ i = 1, \ldots, p_s)$ sînt luate dintre funcţiile $f_i(x)$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Desigur trebuie presupus că mulţimea $\{f_p(x)\}$ este finită $(p < \infty)$.

Să presupunem că pe baza a N_1 experienţe $(N_1 > p_1)$ am găsit estimaţiile $\hat{a}_i^{(1)}$ pentru coeficienţii $a_i^{(1)}$ şi pe baza a N_2 experienţe $(N_2 > p_2)$ estimaţiile $\hat{a}_i^{(2)}$ pentru coeficienţii $a_i^{(2)}$ $(i=1, 2, \ldots, p_s)$ $(s = 1, 2)$.

Estimaţia dispersiei variabilei aleatoare η va fi în cazul (9)

$$s_1^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N_1} \left(\eta_\alpha^{(1)} - \sum_{i=1}^{p_1} \hat{a}_i^{(1)} f_i(x_\alpha^{(1)}) \right)^2}{N_1 - p_1},$$

iar în cazul (10)

$$s_2^2 = \frac{\sum_{\alpha=1}^{N_2} \left(\eta_\alpha^{(2)} - \sum_{i=1}^{p_2} \hat{a}_i^{(2)} f_i(x_\alpha^{(2)}) \right)^2}{N_2 - p_2}.$$

Să presupunem că dispersiile teoretice în cele două cazuri (9), (10), sînt egale, adică $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \mathcal{D}^2(\eta)$.

Presupunem în plus că cele N_1, N_2 observaţii sînt independente. În acest caz rezultă că s_1^2 şi s_2^2 sînt independente iar în baza lemei raportul lor

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{11}$$

urmează legea de repartiţie F cu $(N_1 - p_1,\ N_2 - p_2)$ grade de libertate.

Pentru a verifica cele ce ne-am propus putem deci folosi testul de semnificaţie F sub următoarea formă:

Calculăm F_e după formula

$$F_e = \frac{\text{dispersia empirică mare}}{\text{dispersia empirică mică}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

presupunînd că aceasta este situaţia de fapt.

Pentru pragul de semnificaţie α găsim după tabele $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_1 - p_1,\ N_2 - p_2)$ care satisfac proprietatea

$$P(F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Dacă

$$F_e < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_1 - p_1, N_2 - p_2)$$

atunci acceptăm ipoteza $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ iar dacă

$$F_e \geqq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_1 - p_1,\ N_2 - p_2)$$

atunci respingem ipoteza și deci dispersia teoretică mai mare este aceea ce corespunde lui s_1.

Va trebui deci să considerăm că suprafața de răspuns optimă este aceea ce corespunde lui s_2.

Cu aceasta testul pentru alegerea între cele două variante este construit.

El se poate generaliza în felul următor:

Să presupunem că $p_1 < p_2$. Dacă la prima serie de $N_1^{(1)}$, respectiv $N_2^{(1)}$, experiențe am găsit

$$\frac{s_1^{(1)^2}}{s_2^{(1)^2}} \geqq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_1^{(1)} - p_1,\ N_2^{(1)} - p_2)$$

atunci preferăm suprafața ce corespunde lui p_2.

Pentru șirul de indici

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_h \leqq p$$

vom proceda succesiv în același mod; dacă după $N_r^{(r)}$ experiențe, respectiv $N_{r+1}^{(r)}$ experiențe, găsim

$$\frac{s_r^{(r)^2}}{s_{r+1}^{(r)^2}} \geqq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_r^{(r)} - p_r,\ N_{r+1}^{(r)} - p_{r+1})$$

atunci continuăm procedeul.

Dacă însă găsim că

$$\frac{s_r^{(r)^2}}{s_{r+1}^{(r)^2}} < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(N_r^{(r)} - p_r,\ N_{r+1}^{(r)} - p_{r+1})$$

atunci oprim experimentul și acceptăm suprafața care corespunde lui p_r sau p_{r+1} (depinzînd de preferințele practice).

În lumina celor expuse mai sus, se constată că testul generalizat capătă un aspect secvențial. Tot de aici rezultă că procedeul poate continua dacă este cazul pînă cînd se epuizează considerarea funcțiilor f_i.

Observație. Regresia de forma (3) se întîlnește în cazul cînd funcția φ este un polinom în x sau $x_1, \ldots, x_k$ de grad finit q.

Testul prezentat mai sus dă posibilitatea să estimăm suprafața de răspuns prin polinomul de grad cel mai mic care să aibă cei mai puțini termeni și care să realizeze o dispersie tot atît de convenabilă ca și alte polinoame de grad $\leqq q$.

3. TEST SECVENȚIAL PENTRU CONTROLUL SUPRAFEȚELOR DE RĂSPUNS

O suprafață de răspuns cunoscută și complet specificată, oferă, după cum am menționat mai sus, multe posibilități pentru aplicații.

Experiențele și rezultatele anterioare care se referă la studiul unui fenomen, ne pot sugera ideea asupra formei funcției de răspuns optime iar testul anterior ne permite în plus să constatăm acest lucru. Coeficienții estimați ai suprafeței (3), pot însă avea uneori dispersii prea mari, sau pot să-și mărească dispersia. În diverse lucrări [5], [9] se discută alegerea optimă a acestor coeficienți.

În continuare, propunem un test secvențial [2] pentru controlul *global* al caracterului optim al coeficienților estimați. Acest control este necesar să se aplice mai ales după ce s-au stabilit estimațiile coeficienților respectivi, sau după ce a trecut o perioadă de timp de la explorarea suprafeței de răspuns.

Pentru formularea testului vom presupune că estimațiile $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p$ au ca lege comună de probabilitate legea normală p-dimensională cu media $a = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_p)$ și matricea de covarianță Σ. *Controlul* precizat mai sus revine la verificarea ipotezei compuse

$$H_0 : (a - a_0)\,\Sigma^{-1}\,(a - a_0)' = \lambda_0^2$$

cu alternativa

$$H_1 : (a - a_0)\,\Sigma^{-1}\,(a - a_0)' = \lambda_1^2,$$

unde

$$a_0 = (\tilde{a}_{1,0}, \ldots, \tilde{a}_{p,0}).$$

Presupunem în general că a_0 este cunoscut iar Σ_0 este necunoscut. Verificarea ipotezei H_0 cu alternativa H_1 se face pe baza statisticii

$$T_m^2 = m\,({}_m\bar{a} - \tilde{a}_0)\,S_m^{-1}({}_m\bar{a} - a_0)'$$

unde vectorul ${}_m a$ este media de selecție a vectorului $(\hat{a}^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, iar S_m este matricea covariațelor empirice ale acestor vectori. Indicele m reprezintă numărul seriilor a cîte N_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ experiențe care determină vectorii $\hat{a}^{(\alpha)}$, $(\alpha = 1, \ldots, m)$.

Deci vectorul ${}_m\bar{a}$ are forma

$${}_m\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p),$$

$$\bar{a}_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m} \hat{a}_i^{(\alpha)}}{m} \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

iar matricea S_m are ca elemente

$$S_{ij,m} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m} (\hat{a}_i^{(\alpha)} - \bar{a}_i)\,(\hat{a}_j^{(\alpha)} - \bar{a}_j)}{m}.$$

Estimațiile $\hat{a}_j^{(\alpha)}$ s-au obținut fiecare pe baza a N experiențe ($N_\alpha > p$, $\alpha = 1, \ldots, m$).

Cu aceste notații, testul secvențial pentru verificarea ipotezei H_0 cu alternativa H_1 se precizează [2] calculînd mai întîi raportul:

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} = \exp\left[\frac{-m(\lambda_1^2 - \lambda_0^2)}{2}\right] \frac{{}_1F_1\left[\frac{m}{2}, \frac{p}{2}; \frac{m\lambda_1^2 T_m^2}{2(m-1+T_m^2)}\right]}{{}_1F_1\left[\frac{m}{2}, \frac{p}{2}; \frac{m\lambda_0^2 T_m^2}{2(m-1+T_m^2)}\right]},$$

unde ${}_1F_1$ este funcția hipergeometrică confluentă.

Dacă s-au ales de la început probabilitățile erorilor de genul întîi și doi și anume α și β, atunci testul secvențial este următorul:

Efectuăm serii a cîte m experiențe atîta timp cît

$$\ln\frac{\beta}{1-\alpha} < \frac{p_{1m}}{p_{0m}} < \ln\frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Dacă după a m-a serie de experiențe avem

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} < \ln\frac{\beta}{1-\alpha}$$

atunci acceptăm ipoteza H_0, iar dacă H_0 este convenabil atunci acceptăm vechea suprafață ca fiind cea adevărată. Dacă după a m-a serie de experiențe avem

$$\frac{p_{1m}}{p_{0m}} \geqq \ln\frac{1-\beta}{\alpha}$$

atunci acceptăm ipoteza H_1 și trebuie reluată problema explorării suprafeței de răspuns ca la punctul 2.

Acest test secvențial este prezentat în [2] unde se discută și problema aplicării lui în practică. Pentru funcțiile ${}_1F_1$ există tabele speciale.

J. E. Jackson și R. A. Brodley au construit tabele din care se determină T_m^2 și $\overline{T}_m^2$ corespunzătoare lui $\ln\frac{\beta}{1-\alpha}$ și lui $\ln\frac{1-\beta}{\alpha}$ pentru fiecare m, iar $p = 2$, $\alpha = \beta = 0{,}05$. Desigur pentru aplicațiile în cazul $p > 2$ trebuie construite tabele corespunzătoare, folosind metoda celor doi autori indicată în [2].

Primită la redacție la 10 noiembrie 1962

ПОВЕРХНОСТИ ОТВЕТА И ТЕОРИЯ РЕГРЕССИИ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются поверхности ответа вида $\eta = \sum_{i=1}^{p} a_i \; f_i(x)$, где $f_i(x)$ — известные функции, x — вектор в эвклидовом пространстве

R_k, а η— нормальная переменная с дисперсией σ. Представляется тест, основанный на F — распределении Фишера, дающий возможность „оптимально" оценить поверхность ответа следующим способом: оцениваются последовательными испытаниями с помощью метода наименьших квадратов коэффициенты a_i^k $(k=1, \ldots, p_k)$ и выбирается поверхность, обладающая тем свойством, что число этих коэффициентов минимально и дисперсия ответа также минимальна. Показывается, что эти результаты могут быть использованы в случае полиномиальной регрессии. Представляется также последовательный тест по [2] для „контроля" поверхностей ответа.

SURFACES DE RÉPONSE ET LA THÉORIE DE LA RÉGRESSION

RÉSUMÉ

Les auteurs considèrent des surfaces de réponse de la forme $\eta = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i(x)$ dont les fonctions $f(x)$ sont connues ; x est un vecteur de l'espace euclidien R_k, et η une variable normale ayant la dispersion σ. Ils présentent un test fondé sur la répartition F de Fischer, qui donne de la manière suivante la possibilité de l'estimation «optimum» de la surface de réponse : on procède à l'estimation, par des essais successifs (à l'aide de la méthode des plus petits carrés) des coefficients $a_i^{(k)}$ $(k=1, \ldots, p_k)$ en choisissant la surface ayant la propriété d'avoir un nombre minimum de coefficients et la dispersion de la réponse également minimum. Ils montrent que ces résultats peuvent être utilisés dans le cas de la régression polynomiale. Ils présentent également un test séquentiel, d'après [2], pour le «contrôle» des surfaces de réponse.

BIBLIOGRAFIE

1. G. E. P. Box, J. S. Hunter, *Multi-factor experimental designs for exploring response surface.* Amer. Math. Stat., **28**, 195—241 (1957).
2. J. Edward Jackson, Ralph A. Bradley, *Sequential x and T-Test.* Amer. Math. Stat., **32**, *4*, 1063—1077 (1961).
3. J. Edward Jackson, *A short table of the hypergeometric function* $f_1(C;\varphi)$. Sonkhya, **22**, 351—356 (1960).
4. J. Kiefer, J. Wolfowitz, *Optimum designs in regression problems.* Ann. Math. Stat., **30**, *2*, 271—295 (1959).
5. Tosio Kitawaga, *Successive Process of Statistical Inferences Applied to Linear Regression Analysis and Specialisations to Response Surface Analysis.* Bull. Math. Stat., Kyushu Univ. Japan, **8**, *3—4*, 80—115 (1959).
6. N. N. Lebedev, *Funcţii speciale şi aplicaţiile lor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1957.
7. Ю. В. Льюник, *Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений.* И. Л. Москва, 1962.
8. V. V. Nalimov, *Metode statistice pentru găsirea condiţiilor optime de desfăşurare a proceselor chimice.* Uspehi Himii, *11*, 1362—1387 (1960).
9. Michie Shirafugi, *A two Sequential Design in Response Surface Analysis.* Bull. Math. Stat., Kyushu Univ. Japan, **8**, *3—4*, 115—126 (1959).

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

MAREK FISZ, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und matematische Statistik* (Calculul probabilităţilor şi statistică matematică). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962, 528 p.

După ce în primul capitol se prezintă sistemele de evenimente şi probabilităţile lor absoute şi condiţionate, după ce se defineşte independenţa evenimentelor precum şi teorema lui Bayes, urmează un capitol de variabile aleatoare terminat cu un paragraf despre variabile independente şi un altul despre funcţii de mai multe variabile aleatoare. Capitolul al treilea, care începe să arate preocuparea statistică fundamentală a acestui curs, prezintă diversele momente şi regresii ale variabilelor aleatoare. Capitolul patru este tot de ordin general; el se referă la funcţia caracteristică şi la proprietăţile ei. În capitolul cinci se prezintă diverse tipuri de variabile şi de repartiţii cu una sau mai multe dimensiuni.

În capitolul şase se dau teoremele limită cele mai importante. Urmează apoi un scurt capitol despre lanţuri Markov şi apoi un altul despre procese, în primul rînd desigur despre procesele Markov continue şi ecuaţiile lui Kolmogorov.

Partea a doua a cursului are ca şi cea dintîi un caracter clasic. În capitolul întîi al acestei părţi se examinează conceptele fundamentale ale Statisticii şi repartiţiile clasice, ca repartiţia χ^2, repartiţia lui Student, a lui Fischer şi altele.

Statistica ordinii cu teoremele lui Glivenko, Kolmogorov, Smirnov şi Rényi este larg tratată în capitolul al doilea. În sfîrşit, tot din această parte generală face parte şi capitolul tratînd iteraţiile. Urmează apoi expunerea metodelor statistice începînd cu testele de semnificaţie.

Continuînd cu „Teoria estimaţiei" şi mai departe cu „Analiza varianţelor" acest curs se termină cu un capitol dezvoltat de „Analiză secvenţială".

Cartea are numeroase exemple. Autorul anunţă în introducere că are în pregătire o ediţie nouă, fundamental revizuită, care va fi gata în următorii ani.

O. Onicescu

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

N

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 142 p., 8,25 lei; vol. II, 155 p., 8,55 lei.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori** (Teoremele de descompunere ale algebrei), 619 p., 25,50 lei.

C. CORDUREANU, **Funcţii aproape-periodice**, 191 p., 8,30 lei.

P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.

O. ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 260 p., 11,20 lei.

GH. MIHOC, V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.

C. CONSTANTINESCU, seminar M. Neculcea. **Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.

N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, Seminar S. Stoilow 1959—1960. **Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.

C. FOIAŞ, Seminar Miron Nicolescu 1959—1960. **Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.

I. CUCULESCU, Seminar O. Onicescu. **Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.

G. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.

Din

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

au apărut:

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, 4 n-re (nr. 1, 10 lei; nr. 2—4, 7 lei);
anul XIV, 1963, nr. 1 (a 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare

în Bucureşti:
la LIBRĂRIA ACADEMIEI;
LIBRĂRIA „MIHAIL EMINESCU";
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 17;
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 4;

în Cluj:
la LIBRĂRIA „A. S. PUŞKIN";

în Iaşi:
la LIBRĂRIA „CARTEA RUSĂ";

în Timişoara:
la LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 1,

precum şi la chioşcurile şi magazinele de difuzare a presei din mediul urban.

Se pot comanda şi prin poştă la librăria

„CARTEA PRIN POŞTĂ"

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerţul exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. „Informaţia" — c. 877

Lei 7.—

F762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

3

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

3

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU ; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL, ACADEMICIAN GH. MIHOC, ACADEMICIAN N. TEODORESCU, A. HALANAY.

Revista STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMAT ICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Anul XIV, nr. 3 1963

SUMAR

Pag.

G. VRĂNCEANU, Vectori şi tensori diofantici 323

SILVIU GUIAŞU, Cîteva cercetări legate de teorema lui Anscombe asupra repartiţiei asimptotice a şirurilor aleatoare de variabile aleatoare 333

P. IVĂNESCU, IVO ROSENBERG şi S. RUDEANU, Asupra determinării minimelor funcţiilor pseudobooleene 359

MARIUS I. STOKA, Familii de varietăţi măsurabile într-un spaţiu riemannian V_3 cu curbura constantă negativă 365

CONSTANTIN GH. POPA, Asupra ecuaţiei funcţionale matriciale a lui d'Alembert 377

B. BEREANU, O problemă dinamică de stocare 391

SOLOMON MARCUS, Un model matematic al fonemului 405

N. PRAPORGESCU, O generalizare a funcţiei θ şi folosirea ei la studiul funcţiilor eliptice 423

N. ŞANDRU, Asupra acţiunii sarcinilor concentrate în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată 453

M. MIŞICU, Relaţii statistice 465

MIRCEA TÎRNOVEANU, Metode probabilistice în sisteme logistice neconstructive 485

CONSTANTIN P. POPOVICI, O generalizare a funcţiei lui Möebius. 493

RECENZIE 501

EDITURA ACĂDEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÉTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

XIVe année, n° 3 1963

SOMMAIRE

Page

G. VRĂNCEANU, Vecteurs et tenseurs diofantiques 323

SILVIU GUIAŞU, Quelques recherches se rattachant au théorème d'Anscombe concernant la répartition asymptotique des suites aléatoires de variables aléatoires 333

P. IVĂNESCU, IVO ROSENBERG et S. RUDEANU, Sur la détermination des minima des fonctions pseudo-booléennes 359

MARIUS I. STOKA, Familles de variétés mesurables dans un espace de Riemann V_3 à courbure constante négative 365

C. GH. POPA, Sur l'équation fonctionnelle matricielle de D'Alembert . . . 377

B. BEREANU, A dynamic inventory problem. 391

SOLOMON MARCUS, Un modèle mathématique du phonème 405

N. PRAPORGESCU, Une généralisation de la fonction θ et son utilisation pour l'étude des fonctions elliptiques 423

N. ŞANDRU, Sur l'action des charges concentrées à l'intérieur du semi-plan élastique à frontière encastrée 453

M. MIŞICU, Relations statistiques 465

MIRCEA TÎRNOVEANU, Méthodes probabilistiques dans les systèmes logistiques non constructifs 485

CONSTANTIN P. POPOVICI, Une généralisation de la fonction de Möebius . . 493

COMPTES RENDUS 501

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Год XIV, № 3 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Стр

Г. ВРЭНЧАНУ, Диафантовы векторы и тензоры 323

СИЛЬВИУ ГУЯШУ, Некоторые исследования, связанные с теорией Анскомба об асимптотическом распределении случайных последовательностей случайных переменных 333

П. ИВЭНЕСКУ, И. РОЗЕНБЕРГ, С. РУДЯНУ, Об определении минимумов псевдо-булевых функций 359

МАРИУС СТОКА, Семейства измеримых многообразий в римановом пространстве V_3 постоянной отрицательной кривизны 365

К. Г. ПОПА, О матричном функциональном уравнении Даланбера 377

БЕРНАРД БЕРЯНУ, Динамическая задача складирования 391

СОЛОМОН МАРКУС, Математическая модель фонемы 405

Н. ПРАПОРДЖЕСКУ, Обобщение функции θ и ее использование при изучении эллиптических функций 423

Н. ШАНДРУ, О действии нагрузок, сосредоточенных внутри упругой полуплоскости с закрепленной границей 453

М. МИШИКУ, Статистические отношения 465

МИРЧА ТЫРНОВЯНУ, Вероятностные методы в неконструктивных логических системах 485

КОНСТАНТИН П ПОПОВИЧ, Одно обобщение функции Мёбиуса . . . 493

РЕЦЕНЗИИ 501

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

VECTORI ȘI TENSORI DIOFANTICI

DE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU

Se numesc ecuații diofantice liniare, ecuațiile cu coeficienți întregi și cu variabile ce iau numai valori întregi. Aceste ecuații pun probleme foarte interesante de teoria numerelor, disciplină puțin studiată în țara noastră. Recent a apărut cartea prof. Sudan*) care poate constitui și la noi, un bun început pentru studiul teoriei numerelor. Utilizarea unor rezultate expuse în această carte relativă la formele pătratice diofantice, în legătura cu anumite probleme de grupuri liniare discrete, m-a condus la unele considerații relative la vectorii și tensorii diofantici numind astfel vectorii și tensorii ale căror componente sînt numere întregi.

Fiind dată ecuația diofantică

$$ax + by = 1 \tag{1}$$

unde a, b, sînt numere întregi date, iar x, y sînt numere întregi necunoscute ce trebuie determinate, este evident că această ecuație nu poate avea soluții în x, y dacă b și a au un divizor comun. Trebuie să presupunem deci că a, b sînt primi între ei și deci nu putem avea $a = \pm b$ decît dacă a și b sînt ± 1, în care caz rezolvarea ecuației (1) este evidentă. Putem deci presupune că avem $|a| < |b|$. Pe de altă parte, ecuația (1) se transformă într-o ecuație de aceeași formă, dacă facem o schimbare de variabile unimodulară cu coeficienți întregi :

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \gamma x' + \delta y' \tag{2}$$

deci în care α, β, γ, δ sînt numere întregi cu determinantul unitate

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{3}$$

*) Gabriel Sudan, *Geometrizarea fracțiilor continue*. Ed. tehnică, București, 1959.

Într-adevăr, prin o asemenea transformare ecuația (1) devine

$$a(\alpha x' + \beta y') + b(\gamma x' + \delta y') = a'x' + b'y' = 1, \tag{3'}$$

unde avem

$$a' = a\alpha + b\gamma, \quad b' = a\beta + b\delta. \tag{4}$$

Dacă notăm cu A vectorul de componente întregi a, b, acest vector se transformă prin (2) în vectorul $A'(a', b')$ cu componente întregi. Să presupunem acum că cunoaștem o transformare unimodulară care să facă vectorul A' să fie paralel cu una din axe, de exemplu axa Ox', deci să avem $b' = 0$. În acest caz formulele (4) ne dau rezolvate în raport cu a, b și ținînd seama de formula (3)

$$a = a'\delta, \quad b = -a'\beta$$

ceea ce ne spune că trebuie să avem $a' = \pm 1$, căci altfel a, b n-ar fi primi între ei.

Putem de altfel să presupunem că $a' = 1$, căci dacă $a' = -1$, putem să avem $a' = 1$, schimbînd semnele coeficienților transformării unimodulare (2).

Dar dacă $a' = 1$, $b' = 0$, ecuațiile (4) se scriu

$$1 = a\alpha + b\gamma, \quad 0 = a\beta + b\delta \tag{4'}$$

prima ecuație ne spune că α, γ este o soluție a ecuației diofantice (1), în timp ce ultima ecuație asociată cu (3) ne dă

$$\beta = -b, \quad \delta = a. \tag{5}$$

Avem deci teorema :

La o soluție $x = \alpha$, $y = \gamma$ a ecuației diofantice (1) se asociază transformarea liniară unimodulară (2), unde β, δ sînt definiți de formulele (5), transformare ce reduce ecuația (1) la forma canonică

$$x' = 1. \tag{6}$$

Ținînd seamă de ecuațiile (2), rezultă că avem

$$x = \alpha + \beta y', \quad y = \gamma + \delta y', \tag{7}$$

unde y' este un număr întreg oarecare. Rezultă deci, ținînd seama de formulele (5), că dacă cunoaștem o soluție, α, γ a ecuației (1), putem obține soluția generală a acestei ecuații scriind

$$x = \alpha - b\lambda, \quad y = \gamma + a\lambda, \tag{8}$$

unde λ este un număr întreg arbitrar :

Rezolvarea ecuației (1) depinde deci de găsirea unei soluții care este echivalentă cu găsirea unei transformări unimodulare care să reducă vectorul diofantic $A(a, b)$ la forma canonică $A'(1, 0)$.

Printre metodele ce se utilizează pentru găsirea unei soluții sînt : metoda dezvoltării în fracție continuă a fracției $\frac{(b)}{(a)}$ sau metoda algorit-

mului lui Euclid. Să arătăm cum se poate utiliza această ultimă metodă folosind transformări întregi unimodulare. Pentru aceasta să observăm că totdeauna putem scrie

$$b = ak + r$$

unde k, r sînt întregi şi unde $|r| \leqslant \frac{a}{2}$. Ecuaţia (1) se scrie deci

$$a(x + ky) + ry = 1$$

şi considerînd transformarea unimodulară

$$x' = x + ky, \qquad y' = y$$

ecuaţia noastră devine

$$ax' + ry' = 1, \tag{9}$$

unde coeficientul lui y' este mai mic în valoare absolută decît jumătatea lui a. Dacă r nu este zero, în care caz problema ar fi rezolvată, putem lua

$$a = k_1 r + r',$$

unde valoarea absolută a lui r' este mai mică decît jumătatea valorii absolute a lui r, şi ecuaţia (9) se scrie

$$r(y' + k_1 x') + r'x' = 1$$

şi prin transformarea unimodulară

$$x'' = x', \qquad y'' = y' + k_1 x'$$

ecuaţia (9) devine

$$r'x'' + ry'' = 1.$$

Dacă r' este zero şi $r = 1$, atunci $y'' = +1$ şi deci obţinem soluţia căutată. Dacă r' este diferit de zero se poate aplica mai departe acest procedeu pînă se ajunge la ecuaţia cu vectorul (a, b) redus la forma canonică $(1,0)$.

Se poate observa acum că dacă am avea ecuaţia

$$ax + by = c, \tag{10}$$

unde c este de asemenea un număr întreg şi a, b sînt primi întrei ei, atunci putem, prin transformări unimodulare, să reducem această ecuaţie la forma canonică

$$x' = c$$

şi soluţiile ecuaţiei (10) sînt date de formulele

$$x = \alpha c - b\lambda, \quad y = \gamma c + a\lambda,$$

unde α, γ este o soluţie a ecuaţiei (1) asociată ecuaţiei (10).

Rezultă deci că ecuația (10) cu $c \neq 1$ nu introduce probleme noi față de ecuația (1). Este interesant de observat că aceeași proprietate are loc și pentru una sau mai multe ecuații în mai multe decît două variabile.

Dacă de exemplu avem o ecuație în trei variabile

$$ax + by + cz = d, \tag{11}$$

este suficient ca să reducem la forma canonică vectorul $v(a, b)$ în planul x, y pentru a avea

$$x' + cz' = d \tag{11'}$$

ceea ce ne dă soluția generală a problemei.

Dacă avem două ecuații, în trei variabile,

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d'. \end{aligned} \tag{12}$$

și presupunem că a, b sînt de exemplu primi între ei, putem reduce atunci printr-o transformare întreagă unimodulară în planul x, y vectorul (a, b) la forma canonică $(1, 0)$ și deci prima ecuație (12) se poate scrie sub forma (11').

Rezolvînd-o în raport cu x și înlocuind-o în a doua ecuație (12), obținem o ecuație diofantică în variabilele y, z care de asemenea se poate reduce la o formă canonică prin transformări unimodulare în două variabile. Rezultă deci că utilizînd transformări întregi unimodulare în cîte două variabile, un sistem de ecuații diofantice de m ecuații și $n > m$ necunoscute $x^1, \ldots, x^n$ se poate reduce la forma canonică

$$x^h = a_\alpha^h x^\alpha + \ldots + a_n^h x^n + a^h, \quad (h = 1, \ldots, m;\ \alpha = m + 1, \ldots, n) \tag{13}$$

a cărui soluție generală este evidentă.

Fiind dat deci un sistem de m vectori covarianți A_h, $(h = 1, \ldots, m)$, în spațiul E_n avînd componentele a_i^h, $(i = 1, \ldots, n)$, printr-o transformare întreagă unimodulară, acești vectori se pot aduce la forma canonică în care matricea pătratică $||a_i^h||$, $(h, i = 1, \ldots, m)$, este matricea unitate.

Vom menționa acum că probleme analoage se pot pune relativ la forma canonică la care se poate reduce un tensor covariant, contravariant sau mixt la forma canonică. Pentru cazul tensorilor pătratici covarianți a_{ij}, $(i,j = 1, 2)$, deci a formei pătratice asociate, se poate consulta cartea prof. Sudan deja citată. Este însă de asemenea interesant cazul în care tensorul este mixt și de ordinul al doilea deci avînd componentele a_j^i, $(i, j = 1, 2)$.

În acest caz se poate asocia tensorului transformarea de variabile

$$x'^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \qquad x'^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 \tag{14}$$

și invers.

Se pune atunci problema de a reduce la o formă canonică tensorul a_j^i cu componente întregi, printr-o transformare liniară întreagă unimodulară. Notînd cu

$$k = a_1^1 + a_2^2, \qquad d = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$$

rezultă că d şi k sînt invarianţi la transformările liniare, deci şi la transformările unimodulare, deoarece sînt coeficienţii ecuaţiei caracteristice asociată transformării (14)

$$\begin{vmatrix} a_1^1-\rho & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 - k\rho + d = 0. \tag{14'}$$

Pe de altă parte, punînd $a_1^1 - a_2^2 = l$, avem

$$l^2 + 4a_2^1 a_1^2 = k^2 - 4d$$

deci primul membru al acestei egalităţi este de asemenea un invariant, este discriminantul ecuaţiei caracteristice. Dacă acest discriminant este diferit de zero, se poate arăta că prin transformări întregi unimodulare se pot obţine sau inegalităţile

$$|l| \leqslant |a_2^1| \leqslant |a_1^2| \tag{15}$$

sau putem avea $a_2^1 = 0$ şi atunci putem face ca a_1^2, l să satisfacă condiţiile

$$2|a_1^2| \leqslant l, \qquad a_2^1 = 0. \tag{16}$$

Pentru a demonstra formulele (15) sau (16) să presupunem că facem o schimbare de variabile întreagă unimodulară luînd

$$y^1 = \alpha_1^1 x^1 + \alpha_2^1 x^2, \quad y^2 = \alpha_1^2 y^1 + \alpha_2^2 y^2 \quad [\alpha_1^1\alpha_2^2 - \alpha_2^1\alpha_1^2 = 1], \tag{17}$$

unde α_1^1, α_2^2, α_2^1, α_1^2 sînt numere întregi. Prin această transformare formulele (14) devin

$$y'^1 = a'^1_1 y^1 + a'^1_2 y^2, \quad y'^2 = a'^2_1 y^1 + a'^2_2 y^2,$$

unde a'^i_j sînt componentele tensorului mixt transformat prin (17) şi avem deci

$$a'^i_k \alpha^k_j = a^s_j \alpha^i_s.$$

Prin calcule simple obţinem

$$\begin{aligned} a'^1_2 &= a_2^1(\alpha_1^1)^2 - l\alpha_1^1\alpha_2^1 - a_1^2(\alpha_2^1)^2, \\ a'^2_1 &= -a_2^1(\alpha_1^2)^2 + l\alpha_1^2\alpha_2^2 + a_1^2(\alpha_2^2)^2, \\ l' &= l[\alpha_1^1\alpha_2^2 + \alpha_2^1\alpha_1^2] + 2a_2^1\alpha_1^2\alpha_2^1 + 2a_1^2\alpha_2^1\alpha_2^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Să considerăm acum forma pătratică diofantică

$$F(x^1, x^2) = a_2^1(x^1)^2 - lx^1x^2 - a_1^2(x^2)^2. \tag{18'}$$

Formulele (18) ne spun atunci că a'^1_2 şi a'^2_1 sînt daţi respectiv de formulele

$$a'^1_2 = F(\alpha_1^1, \alpha_2^2), \quad a'^2_1 = -F(\alpha_1^2, \alpha_2^2) \tag{19}$$

deci de valorile funcției F și $-F$ în punctele de coordonate întregi $P(\alpha_1^1, \alpha_2^1)$, $Q(\alpha_1^2, \alpha_2^2)$, puncte ce definesc transformarea (7), în timp ce l' este dat de valoarea formei polare

$$X^1 \frac{\partial F}{\partial x^1} + X^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}$$

în punctele P și Q.

Problema ce trebuie rezolvată este deci de a arăta că prin transformări întregi unimodulare, putem să satisfacem la condițiile (15) sau (16). Evident, putem presupune întotdeauna că avem inegalitatea

$$|a_2^1| \leqslant |a_1^2|$$

căci altfel am schimba rolul variabilelor x^1, x^2.

Vom considera, în primul rînd, cazul $a_2^1 = 0$. În acest caz l este un invariant.

Pe de altă parte, formulele (18) ne arată că a_2^2 rămîne nul la transformările (18) pentru care $\alpha_2^1 = 0$, deci $\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = \pm 1$, în care caz formulele (18) ne dau

$$a'^1_2 = 0, \quad a'^2_1 = l\alpha_1^2 + a_1^2, \quad l' = l.$$

Putem utiliza deci α^2_1 așa fel ca $|a'^2_1|$ să fie mai mic ca $\frac{|l|}{2}$, dacă l este diferit de zero, deci dacă discriminantul ecuației caracteristice este diferit de zero, astfel că în acest caz obținem formulele (16).

Dacă însă $l = 0$, deci avem în același timp $a_2^1 = a_1^1 - a_2^2 = 0$, transformarea (14) se scrie

$$x'^1 = a_1^1 x^1, \quad x'^2 = a_1^2 x^1 + a_1^1 x^2 \tag{20}$$

și a_1^1, a_1^2 sînt invarianți.

Să presupunem deci că a_2^1 și a_1^2 sînt diferiți de zero. Ne întrebăm acum, în ce condiții există o transformare întreagă unimodulară așa fel ca a'^1_2 sau a'^2_1 să fie zero? Pentru aceasta trebuie ca numărul zero să fie reprezentabil cu forma $F(x^1, x^2)$, unde x^1, x^2 nu sînt ambii nuli, ceea ce poate avea loc numai dacă discriminantul (14′) al acestei forme este pozitiv sau zero. Condiția este necesară și suficientă dacă discriminantul este zero, însă nu este suficientă dacă discriminantul este pozitiv. De exemplu, ecuația

$$2x^2 - y^2 = 0$$

nu are soluții întregi, afară de soluția banală $x = 0$, $y = 0$.

Presupunînd a_2^1 și a_1^2 diferiți de zero și $|a_2^1| \leqslant |a^2_1|$ să facem o transformare (17) în care

$$\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_2^1 = 0.$$

Formulele (18) se scriu

$$a'^1_2 = a_2^1, \quad a'^2_1 = -a_2^1(\alpha_1^2)^2 + l\,\alpha_1^2 + a_1^2, \quad l' = l + 2a_2^1\alpha_1^2.$$

Ultima din aceste formule ne spune că putem utiliza α_1^2 pentru a face ca $|l'|$ să fie mai mic sau cel mult egal cu $|a_2^1|$.

Dacă prin această transformare $|a'^2_1|$ este mai mare sau cel mult egal cu $|l'|$, inegalitățile (15) sînt verificate, eventual schimbînd ordinea variabilelor. Dacă $|a'^2_1|$ este mai mic decît $|l'|$ însă nu este nul, atunci printr-o transformare (17) cu $\alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 1$, $\alpha_1^2 = 0$ putem să facem ca $|l''|$ să fie mai mic sau cel mult egal cu $|a_1'^2|$ și operația se poate continua pînă cînd sau ajungem la formulele (15) sau ajungem la cazul cînd una din cantitățile a_2^1, a_1^2 este zero.

Avem deci teorema:

Fiind dat un tensor mixt a_j^i $(i, j = 1, 2)$, *putem să obținem prin transformări întregi unimodulare fie forma canonică* (15), *fie forma canonică* (16), *fie cazul* (20).

Este de observat că forma canonică (16) nu poate fi obținută decît în cazul în care forma pătratică F este indefinită. Pentru formele definite pozitiv, deci pentru acele forme pentru care $k^2 - 4d < 0$, avem numai forma canonică (15) și se regăsește un rezultat clasic relativ la formele pătratice diofantice*).

De asemenea să arătăm că inegalitățile (15) nu sînt compatibile cu cazul în care discriminantul este nul, decît dacă $l = a_2^1 = 0$. Într-adevăr, din inegalitățile (15) rezultă

$$l^2 \leqslant |a_2^1 a_1^2|. \tag{20'}$$

Rezultă deci

$$l^2 = -4a_2^1 a_1^2 \leqslant -a_2^1 a_1^2,$$

unde a_2^1, a_1^2 sînt de semne contrare.

Avem deci $-3a_2^1 a_1^2 \leqslant 0$ ceea ce nu poate avea loc decît dacă $a_2^1 = 0$ și deci conform inegalităților (15) și $l = 0$.

Rezultă deci că forma canonică (20) este caracteristică pentru cazul discriminantului nul.

Lăsînd la o parte deci cazul discriminantului nul și al discriminantului negativ, la care corespunde numai inegalitatea (15), pentru cazul discriminantului pozitiv putem avea sau inegalitățile (15) sau inegalitățile (16), ceea ce are loc dacă forma pătratică $F(x^1, x^2)$ poate reprezenta numărul zero pentru puncte $P(x^1, x^2)$ diferite de origine.

Să observăm de asemenea că în cazul (16) transformarea (14) se scrie

$$x'^1 = a_1^1 x^1, \quad x'^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2, \quad 2|a_1^2| \leqslant |a_1^1 - a_2^2| \neq 0. \tag{21}$$

Deci, fiind date cantitățile a_1^1, a_2^2 ce sînt invarianți ai transformării, dacă $a_1^1 - a_2^2 = m$ este un număr întreg diferit de ± 1, avem în general $\frac{m}{2}$ transformări (21) corespunzînd valorilor

$$a_1^2 = 0, 1 \ldots, \left[\frac{m}{2}\right],$$

*) G. Sudan, *op. cit.*, p. 217.

unde $\left[\frac{m}{2}\right]$ este cel mai mare număr întreg conținut în $\frac{m}{2}$ și tensorii micști corespunzători sînt necchivalenți prin transformări întregi ale variabilelor.

Să considerăm cazul cînd discriminantul $k^2 - 4d$ este negativ și rădăcinile ecuației caracteristice au modulul egal cu unitatea. Presupunînd că aceste rădăcini sînt egale cu $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, rezultă că în cazul formulelor (15) avem :

$$d = 1,\ k = 2\cos\theta,\ k^2 - 4d = -4\sin^2\theta = l^2 + 4a_2^1 a_1^2. \tag{22}$$

Rezultă deci că a_2^1 și a_1^2 sînt de semne contrarii, deci inegalitatea (20′) se scrie

$$l^2 \leqslant -a_2^1 a_1^2 \tag{22'}$$

astfel că avem

$$-3a_2^1 a_1^2 \leqslant 4\sin^2\theta,$$

condiție compatibilă cu $a_2^1 = \mp 1$, $a_1^2 = \pm 1$, $l = \pm 2\cos\theta$.

Dacă luăm

$$a_2^1 = -1, \quad a_1^2 = 1,\ l = 2\cos\theta,$$

transformarea (14) se scrie

$$x'^1 = 2\cos\theta x^1 - x^2,\ x'^2 = x^1 \tag{23}$$

și celelalte cazuri se obțin din acesta schimbînd semnul uneia sau alteia din variabilele x^1, x^2.

Rezultă deci că $2\cos\theta$ trebuie să fie un număr întreg și $\sin\theta \neq 0$. Or, singurele cazuri cînd avem această situație corespund la cazul cînd θ are valorile 120°, 90°, 60° și atunci $2\cos\theta$ are valorile -1, 0,1.

Avem deci teorema :

Dacă ecuația caracteristică referitoare la tensorul mixt a_j^i $(i, j = 1, 2)$ are rădăcini imaginare cu modul unitate, transformarea (14) se reduce la forma canonică

$$x'^1 = \varepsilon x^1 - x^2,\ x'^2 = x^1, \tag{24}$$

unde ε are una din valorile -1, 0,1.

Primită la redacție la 9 aprilie 1963

ДИОФАНТОВЫ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается приведение к каноническому виду диофантова вектора и диофантова смешанного тензора a_j^i на плоскости и показывается, что существуют только три канонических формы для случая, когда характеристическое уравнение ассоциировано мнимым корням с модулем, равным единице, когда смешанный тензор имеет вид

$$a_1^1 = \varepsilon,\ a_2^1 = -i,\ a_1^2 = i,\ a_2^2 = 0,\ \varepsilon = -1,\ 0,1.$$

В других случаях может быть произвольное конечное число канонических форм, неэквивалентных при линейных преобразованиях переменных.

VECTEURS ET TENSEURS DIOFANTIQUES

RÉSUMÉ

On considère la réduction à une forme canonique d'un vecteur diofantique et d'un tenseur mixte diofantique a_j^i dans le plan, et on montre qu'il y a seulement trois formes canoniques pour le cas où l'équation caractéristique associée a des racines imaginaires à module unité, quand le tenseur mixte peut s'écrire

$$a_1^1 = \varepsilon,\ a_2^1 = -i,\ a_1^2 = 1,\ a_2^2 = 0,\ (\varepsilon = -1,\ 0,\ 1).$$

Dans d'autres cas il peut y avoir un certain nombre fini de formes canoniques, non équivalentes, par des transformations linéaires des variables.

CÎTEVA CERCETĂRI LEGATE DE TEOREMA LUI ANSCOMBE ASUPRA REPARTIȚIEI ASIMPTOTICE A ȘIRURILOR ALEATOARE DE VARIABILE ALEATOARE

DE

SILVIU GUIAȘU

§ 1. INTRODUCERE

După cum arată A. N. Kolmogorov în lucrarea [10], pe la mijlocul deceniului cinci al secolului XX, s-a format părerea că problematica teoremelor limită de tip clasic, adică problematica comportării la limită a repartițiilor sumelor unui număr mare de termeni independenți sau legați printr-un lanț Markov, este în fond încheiată. În special demonstrarea faptului că condițiile clasice de tip Lindeberg sînt nu numai suficiente ci și necesare (lucrările lui W. Feller și A. I. Hincin) cît și rezolvarea problemei limită centrală pentru dependența Markov, domeniu în care O. Onicescu și G. Mihoc, întrebuințînd consecvent metoda funcțiilor caracteristice, au obținut rezultate esențiale, au contribuit la desăvîrșirea acestui capitol al teoriei probabilităților. Apărută în 1949, monografia lui B. V. Gnedenko și A. N. Kolmogorov [5] își propunea să facă bilanțul lucrărilor în domeniul teoremelor limită centrale pentru variabilele aleatoare independente. Trei ani mai tîrziu însă, în 1952, apare lucrarea lui F. J. Anscombe [1], deschizînd o nouă direcție de cercetare în această problematică, și anume studiul repartițiilor asimptotice pentru șirurile aleatoare de variabile aleatoare. Această problemă nu a apărut pentru prima dată în lucrarea [1]. Încă în 1948, H. Robbins [20], iar mai tîrziu M. Loève [11] și în special R. L. Dobrușin [4], au studiat repartiția asimptotică a sumelor aleatoare de variabile aleatoare independente :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu_n}$$

cînd $n \to \infty$, unde ν_n este o variabilă aleatoare, pentru orice n, cu valori întregi pozitive, care, pentru $n \to \infty$, converge către $+\infty$. În toate aceste

cercetări s-a presupus că ν_n este, pentru orice n, independentă de variabilele aleatoare $x_j (1 \leqslant j < \infty)$. Ceea ce a reuşit F. J. Anscombe în 1952, a fost obţinerea unei teoreme generale şi foarte utile, fără această presupunere. În 1957, A. Rényi a redemonstrat teorema lui Anscombe în cazul particular al sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, [16], caz în care rezultatul teoremei lui Anscombe este adevărat fără condiţii suplimentare, aplicînd această teoremă pentru obţinerea mai rapidă a unui rezultat al lui L. Takács, care dăduse în acelaşi an un exemplu [21] de proces stocastic în care ν_n depinde esenţial de variabilele $x_j (1 \leqslant j < \infty)$. Revenind asupra acestei probleme în 1960, A. Rényi a extins în lucrarea [18] una din condiţiile lui Anscombe, înlocuind convergenţa în probabilitate către 1 a şirului $(\nu_n/n)_{1 \leqslant n < \infty}$ cu convergenţa în probabilitate către o variabilă aleatoare cu repartiţie discretă, toate acestea tot în cazul particular al sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate. Un rezultat foarte bun a obţinut J. Mogyoródi, în 1961, în lucrarea [12], reuşind să arate că în cazul sumelor normate de variabile aleatoare, cu repartiţie oarecare, condiţia lui Anscombe este nu numai suficientă ci şi necesară, dîndu-i şi o expresie echivalentă mai simplă. În sfîrşit, autorul, în lucrarea [6], a dat o generalizare a teoremei lui Anscombe, în cazul în care ν_n/n converge în probabilitate către o variabilă aleatoare λ cu valori discrete, obţinînd condiţii care sînt satisfăcute de clasa sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate, reobţinîndu-se în acest caz particular, pe altă cale, rezultatul lui A. Rényi din 1960. De asemenea, în cazul în care variabila aleatoare λ ia numai valoarea constantă 1, condiţiile din teorema generalizată se reduc la condiţiile lui Anscombe. În lucrarea de faţă, se expun rezultatele esenţiale ale cercetărilor legate de teorema lui Anscombe, dîndu-se demonstraţii complete şi unitare. După ce în § 2, vom da notaţiile, lemele şi inegalităţile ce vor fi folosite în cursul lucrării, în § 3, se dă teorema iniţială a lui F. J. Anscombe ; în § 4, se demonstrează, urmînd pe J. Mogyoródi, necesitatea şi suficienţa condiţiei lui Anscombe pentru cazul sumelor normate de variabile aleatoare independente, cu repartiţie oarecare ; în § 5, se expune extensiunea lui A. Rényi, în cazul sumelor normate de variabile aleatoare independente, identic repartizate ; iar în § 6, teorema lui Anscombe în generalizarea obţinută de către autor. Ultimul paragraf, § 7, este consacrat cîtorva probleme ce se cer rezolvate.

În „Seminarul O. Onicescu" de teoria probabilităţilor din cadrul Institutului de matematică al Academiei R.P.R., problema repartiţiei asimptotice a sumelor aleatoare de variabile aleatoare a început să fie studiată la iniţiativa prof. O. Onicescu, căruia îi aducem şi pe această cale mulţumirile noastre.

Problema repartiţiei asimptotice a şirurilor aleatoare de variabile aleatoare, independente sau neindependente, îşi găseşte aplicaţie în analiza secvenţială, în mersul la întîmplare, şi la metoda Monte - Carlo. Prof. O. Onicescu a semnalat de asemenea posibilitatea aplicării teoremelor de tip Anscombe la problema timpului aleator şi a mediilor temporale aleatoare în mecanica statistică.

§ 2. PRELIMINARII

1. *Notații.* Vom folosi în cursul lucrării următoarele notații :

(SK) = mulțimea familiilor de variabile aleatoare independente în sensul lui Steinhaus — Kac ;

$\mathfrak{L}^2(E, \mathcal{K}, P)$ = mulțimea variabilelor aleatoare de pătrat integrabil definite pe cîmpul de evenimente probabilizat $\{E, \mathcal{K}, P\}$;

M_1, M_2 = valoarea medie de ordinul întîi și respectiv de ordinul doi ;

$P_B(A)$ = probabilitatea evenimentului A condiționată de evenimentul B ;

N = mulțimea numerelor naturale ;

R = mulțimea numerelor reale ;

$\mathbf{C}_A$ = complementara față de mulțimea A ;

$[q]$ = partea întreagă a numărului q ;

$\xrightarrow{P}$ = convergența în probabilitate ;

$\longrightarrow$ = convergența obișnuită ;

$\Longrightarrow$ = semnul de implicație.

2. *Leme și inegalități.* Vom folosi de asemenea următoarele leme și inegalități :

LEMA 1. *Dacă* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *este un șir de variabile aleatoare avînd o repartiție limită,* $(y_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *și* $(z_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *două șiruri de variabile aleatoare astfel ca :*

$$y_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} 1, \qquad z_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0,$$

atunci șirul $(x_n y_n + z_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *are aceeași repartiție limită ca și șirul* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$.*)

LEMA 2. *Dacă funcțiile de repartiție corespunzătoare șirului* $(x_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *tind către o repartiție limită și dacă șirul de variabile aleatoare* $(z_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ *are proprietatea că* $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0$, *atunci :*

$$x_n z_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} 0. \ *)$$

Inegalitatea lui Cebîșev. Fie x *o variabilă aleatoare definită pe* $\{E, \mathcal{K}, P\}$. *Dacă* $x \in \mathfrak{L}^2(E, \mathcal{K}, P)$, *pentru* $\varepsilon > 0$ *avem :*

$$P\{\xi \,|\, |x(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{M_2(x)}{\varepsilon^2}.$$

*) Demonstrațiile lemelor 1 și 2 nu comportă dificultăți speciale. De altfel ele se găsesc demonstrate în [3], [2].

Inegalitatea lui Kolmogorov. Fie :

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \in (SK)\,; \quad (x_j)_{1\leqslant j<\infty} \subset \mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, P).$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, *avem* :

$$P\{\xi \mid \max_{n\leqslant r\leqslant p} \left| \sum_{j=1}^{r} x_j(\xi) - \sum_{j=1}^{r} M_1(x_j) \right| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=n}^{p} M_2(x_j - M_1(x_j)),$$

unde $n \geqslant 1$, $p \geqslant n$.

§ 3. TEOREMA LUI ANSCOMBE

Plecînd de la o problemă de statistică matematică, şi anume, examinînd cazurile în care o formulă de estimaţie a unui parametru, valabilă pentru eşantioane fixe de calibru, rămîne adevărată cînd eşantioanele au fost determinate printr-o regulă secvenţială, matematicianul englez F. J. Anscombe a dat o teoremă generală de trecere de la convergenţa slabă, Bernoulli, a unui şir de variabile aleatoare, la convergenţa slabă a unui şir aleator de variabile aleatoare, derivat din şirul iniţial. Izvorîtă din statistica matematică, această teoremă de teoria probabilităţilor îşi găseşte aplicaţia în mersul la întîmplare, în metoda Monte-Carlo şi în mecanica statistică în problema înlocuirii timpului uniform cu timpul aleator.

TEOREMA 1. (F. J. Anscombe). *Considerăm date* : $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat*; $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de variabile aleatoare definite pe* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ θ *un număr real* $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un şir de numere pozitive*; $(N_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *un alt şir de variabile aleatoare cu valori întregi pozitive definite tot pe* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$; $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *un şir de numere întregi, pozitive, crescătoare, tinzînd la infinit* ; $\mathfrak{F}(a)$ *o funcţie de repartiţie. Dacă sînt satisfăcute condiţiile* :

$$(C_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1\,;$$

$$(C_2) \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant a\, w_n\} = \mathfrak{F}(a) \qquad (3.1)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$;

(C_3) *fiind daţi* $\varepsilon > 0$ şi $\eta > 0$, *există un număr natural* $n_0(\varepsilon, \eta)$ *şi un număr pozitiv mic* $c(\varepsilon, \eta) > 0$, *astfel ca, pentru orice* $n \geqslant n_0(\varepsilon, \eta)$, *să avem*

$$P\Big(\bigcap_{|m-n|<cn} \{\xi \mid\mid Y_m(\xi) - Y_n(\xi)| < \varepsilon w_n\}\Big) > 1 - \eta, \qquad (3.2)$$

atunci

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant a w_{n_r}\} = \mathfrak{F}(a) \qquad (3.3)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Demonstrație. Fiind dați $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, fie n_0 și c satisfăcînd condiția (C_3) și fie n_0 așa de mare, încît pentru $n_r \geqslant n_0$:

$$P\{\xi \| N_r(\xi) - n_r | < cn_r\} > 1 - \eta. \tag{3.4}$$

Fiind dat r astfel ca $n_r \geqslant n_0$, fie S, A, B respectiv evenimentele

$$S = \{\xi \| N_r(\xi) - n_r | < cn_r\} \cap \{\xi \| Y_{N_r}(\xi) - Y_{n_r}(\xi) | < \varepsilon w_{n_r}\},$$

$$A = \bigcap_{|m - n_r| < cn_r} \{\xi \| Y_m(\xi) - Y_{n_r}(\xi)| < \varepsilon w_{n_r}\}, \tag{3.5}$$

$$B = \{\xi \| N_r(\xi) - n_r | < cn_r\}.$$

Avem

$$A \cap B \subset S,$$

deci

$$P(S) \geqslant P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A \cap \complement B) \geqslant P(A) - P(\complement B) \geqslant 1 - 2\eta. \tag{3.6}$$

Să notăm acum evenimentele :

$$M_a = \{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} \cap S,$$

$$N_a = \{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} \cap \complement S, \tag{3.7}$$

$$Q_{a-\varepsilon} = \{\xi \mid Y_{n_r}(\xi) - \theta \leqslant (a - \varepsilon) w_{n_r}\};$$

$$Q_{a+\varepsilon} = \{\xi \mid Y_{n_r}(\xi) - \theta \leqslant (a + \varepsilon) w_{n_r}\}.$$

Avem

$$P(M_a) \geqslant P(Q_{a-\varepsilon} \cap S) = P(Q_{a-\varepsilon}) - P(Q_{a-\varepsilon} \cap \complement S) =$$

$$= P(Q_{a-\varepsilon}) - P(\complement S) \geqslant P(Q_{a-\varepsilon}) - 2\eta, \tag{3.8}$$

$$P(M_a) \leqslant P(Q_{a+\varepsilon} \cap S) \leqslant P(Q_{a+\varepsilon}), \tag{3.9}$$

$$P(N_a) \leqslant P(\complement S) \leqslant 2\eta. \tag{3.10}$$

Cum însă

$$\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} = M_a \cup N_a$$

și ținînd seamă de (3.8), (3.9), (3.10), avem

$$P(Q_{a-\varepsilon}) - 2\eta \leqslant P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} \leqslant P(Q_{a+\varepsilon}) + 2\eta. \tag{3.11}$$

Dacă a este un punct de continuitate al funcției $\mathfrak{F}(a)$, cum relația (3.11) este adevărată pentru orice $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$, avem

$$\mathfrak{F}(a-0) \leqslant \underline{\lim_{r\to\infty}} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} \leqslant \mathfrak{F}(a+0)$$

adică

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} = \mathfrak{F}(a). \qquad \text{c.c.t.d.}$$

Observație. Condiția (C_3) exprimă continuitatea uniformă în probabilitate a șirului de variabile aleatoare $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$. Condiția (C_2) exprimă convergența slabă a șirului $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ convenabil normat.

§ 4. CONDIȚIA LUI J. MOGYORÓDI

Fie $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ un șir de variabile aleatoare definite pe $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ satisfăcînd condițiile :

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \in (SK), \tag{4.1}$$

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \subset \mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, P). \tag{4.2}$$

Să considerăm teorema 1 din §3, cu următoarele particularizări :

a) drept șir $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ considerăm șirul avînd termenul general :

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ;$$

b) drept șir $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ considerăm șirul avînd termenul general :

$$w_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2} ;$$

c) drept șir $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ considerăm șirul numerelor naturale.

Am notat cu : $D_k^2 = M_2(x_k - M_1(x_k))$ dispersia variabilei aleatoare x_k. Cu aceste precizări putem enunța următoarea teoremă datorată lui J. Mogyoródi [17] :

TEOREMA 2. *În ipoteza îndeplinirii condițiilor* (C_1) *și* (C_2), *pentru ca să avem*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) - \theta \leqslant aw_n\} = \mathfrak{F}(a) \tag{4.3}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$, *este necesar și suficient ca să fie satisfăcută condiția*

$$(C'_3) \qquad \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} = 1, \tag{4.4}$$

unde δ *este real și* $\delta > -1$.

Demonstrație. a. *Necesitatea.* Fie (C_1), (C_2) și relația (4.3). Să presupunem că condiția (C_3') *) nu este adevărată. Atunci există $\varepsilon > 0$ și un șir de numere $(\delta_l)_{1 \leqslant l < \infty}$, tinzînd la 0, astfel ca :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta_l)]}} < 1 - \varepsilon \text{ **}). \tag{4.5}$$

Pentru fiecare l există un șir monoton crescător tinzînd la infinit $(n_{kl})_{1 \leqslant k < \infty}$ astfel ca :

$$\frac{w_{n_{kl}}}{w_{[n_{kl}(1+\delta_l)]}} < 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Din aceste șiruri putem extrage un șir $(r_l)_{1 \leqslant l < \infty}$ monoton crescător tinzînd la infinit cînd l tinde la infinit. Definim acum variabila aleatoare N_n astfel ca pentru $r_l \leqslant n < r_{l+1}$:

$$P\{\xi \mid N_n(\xi) = n\} = \frac{1}{n}; \quad P\{\xi \mid N_n(\xi) = [n(1+\delta_l)]\} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Cînd n tinde la infinit, atunci și l tinde la infinit și se vede că N_n/n converge în probabilitate către 1. Să notăm cu $F_k(a)$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare $\frac{1}{w_k} Y_k$. Avem

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_{N_n}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} = P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} \cap \{\xi \mid N_n(\xi) = n\}\right) +$$

$$+ P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta_l)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} \cap \{\xi \mid N_n(\xi) = [n(1+\delta_l)]\}\right) = \tag{4.7}$$

$$= P_{\{\xi \mid N_n(\xi) = n\}}\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} \cdot P\{\xi \mid N_n(\xi) = n\} +$$

$$+ P_{\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta_l)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\}} \{\xi \mid N_n(\xi) = [n(1+\delta_l)]\} \cdot$$

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta_l)]}(\xi)}{w_{[n(1+\delta_l)]}} < a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta_l)]}} \right.\right\} \leqslant \frac{1}{n} + F_{[n(1+\delta_l)]}\left(a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta_l)]}}\right).$$

*) Deoarece $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ este un șir de numere pozitive tinzînd monoton la infinit, din (C_3') rezultă :

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} = 1$$

adică, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un întreg pozitiv n_0 și un număr pozitiv δ astfel ca pentru $n \geqslant n_0$:

$$1 - \varepsilon < \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} < 1 + \varepsilon.$$

**) Cazul în care :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta_l)]}} > 1 + \varepsilon$$

se tratează la fel.

Punînd $n = r_l$, din (4.6) și (4.7) avem

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_{N_{r_l}}(\xi)}{w_{r_l}} < a \right.\right\} \leqslant F_{[r_l(1+\delta_l)]}\left(a \frac{w_{r_l}}{w_{[r_l(1+\delta_l)]}}\right) + \frac{1}{r_l}$$

Făcînd pe l să tindă la infinit, avem

$$\mathfrak{F}(a) \leqslant \mathfrak{F}\left(a\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$. Contrazicere!

b) *Suficiența.* Există n_0 și c astfel încît pentru $n \geqslant n_0$:

$$\left|1 - \left(\frac{w_{[n(1\pm c)]}}{w_n}\right)^2\right| \leqslant \frac{\varepsilon^2\eta}{16}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Cebîșev și respectiv a lui Kolmogorov, avem

$$P\Big(\bigcup_{|n-m|<cn} \{\xi \| Y_n(\xi) - Y_m(\xi)| \geqslant \varepsilon w_n\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant P\Big(\bigcup_{|n-m|<cn} \{\xi \| Y_n(\xi) - Y_{[n(1-c)]}(\xi)| + |Y_{[n(1-c)]}(\xi) - Y_m(\xi)| \geqslant \varepsilon w_n\}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant P\{\xi \| Y_n(\xi) - Y_{[n(1-c)]}(\xi)| + \max_{|n-m|<cn} |Y_{[n(1-c)]}(\xi) - Y_m(\xi)| \geqslant \varepsilon w_n\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\xi \left| \| Y_n(\xi) - Y_{[n(1-c)]}(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} w_n \right.\right\} + P\left\{\xi | \max_{|n-m|<cn} |Y_{[n(1-c)]}(\xi) - \right.$$

$$\left. - Y_m(\xi)| \geqslant \frac{\varepsilon w_n}{2}\right\} = P\left\{\xi \left\| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^{n} x_k(\xi)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} w_n\right\} +$$

$$+ P\left\{\xi | \max_{|n-m|<cn} \left| \sum_{k=[n(1-c)]+1}^{m} x_k(\xi)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} w_n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\left[1 - \left(\frac{w_{[n(1-c)]}}{w_n}\right)^2\right] + \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{w^2_{[n(1-c)]} - w^2_{[n(1-c)]}}{w_n^2} \leqslant \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^2\eta}{16} + \frac{4}{\varepsilon^2} \cdot \frac{2\varepsilon\eta}{16} < \eta$$

adică condiția (C_3). Din teorema lui Anscombe rezultă (4.3).

LEMA 3 (J. Mogyoródi). *În condițiile de notație de mai sus, avem* :

$$(C_2) \text{ și } (C_3) \Rightarrow (C_3').$$

Demonstrație. În fiecare punct de continuitate al funcției $\mathfrak{F}(a)$ avem :

$$\mathfrak{F}(a) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} F_{[n(1+\delta)]}\left(a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}}\right) = \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} F_{[n(1+\delta)]}\left(a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}}\right). \quad (4.8)$$

Din această condiție rezultă imediat (C_3') datorită continuității în punctul a a funcției de repartiție. Să demonstrăm deci inegalitățile (4.8). Din (C_2) avem că : $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ fiind dați, există n_0 și un număr pozitiv c astfel ca $n \geqslant n_0$, $|\delta| < c$ să implice :

$$P\{\xi \,||\, Y_{[n(1+\delta)]}(\xi) - Y_n(\xi)| \geqslant \varepsilon w_n\} \leqslant \eta$$

adică

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon \leqslant \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} \right.\right\} \leqslant \eta \tag{4.9}$$

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} \leqslant \frac{Y_n(\xi)}{w_n^-} - \varepsilon \right.\right\} \leqslant \eta. \tag{4.10}$$

Avem de asemenea

$$P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} - \left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon < a \right.\right\}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} \cap \left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon \geqslant a \right.\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} \leqslant \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon \right.\right\} \leqslant \eta. \tag{4.11}$$

De asemenea

$$P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon < a \right.\right\} - \left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon < a \right.\right\} \cap \left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} \geqslant a \right.\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n^-} + \varepsilon \leqslant \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} \right.\right\} \leqslant \eta. \tag{4.12}$$

Ținînd seamă de (4.11) și (4.12) avem :

$$P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon < a \right.\right\} - \eta \leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon < a \right.\right\} -$$

$$- P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} + \varepsilon < a \right.\right\} - \left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} \leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon < a \right.\right\} +$$

$$+ P\left(\left\{\xi \left| \frac{Y_{[n(1+\delta)]}(\xi)}{w_n} < a \right.\right\} - \left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon < a \right.\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\xi \left| \frac{Y_n(\xi)}{w_n} - \varepsilon < a \right.\right\} + \eta. \tag{4.13}$$

Reținînd termenul central și termenii extremi ai lanțului de inegalități (4.13) și făcînd pe ε, η și δ să tindă la zero, din (C_1) și (C_2) avem :

$$\mathfrak{F}(a) \leqslant \lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} F_{[n(1+\delta)]}\left(a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}}\right) \leqslant \overline{\lim_{\delta \to 0}} \overline{\lim_{n \to \infty}} F_{n(1+\delta)}\left(a \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}}\right) \leqslant \mathfrak{F}(a)$$

în orice punct de continuitate al funcției $\mathfrak{F}(a)$, adică relația (4.8).

Remarcă. Importanța rezultatului lui J. Mogyoródi este faptul că în cazul sumelor de variabile aleatoare independente, nu neapărat identic repartizate ! ,există o condiție mai simplă, echivalentă cu condiția lui Anscombe, care este nu numai suficientă ci și necesară. Condiția (C_3) este o condiție impusă dispersiilor variabilelor aleatoare $(x_k)_{1 \leqslant k < \infty}$.

§ 5. EXTINDEREA LUI A. RÉNYI

A. Rényi s-a ocupat, în lucrările sale în legătură cu această problematică, tot de studiul șirului sumelor normate de variabile aleatoare independente. Caracteristic pentru cercetările sale în această direcție este găsirea claselor de șiruri de variabile aleatoare pentru care avem rezultatul lui Anscombe, fără ca să se ceară condiția (C_3), adică a claselor de șiruri care satisfac automat condiția (C_3). De asemenea, are meritul de a fi inițiat rafinarea condiției (C_1).

Fie $(x_j)_{1 \leqslant j < \infty}$ un șir de variabile aleatoare, definite pe $\{E, \mathcal{K}, P\}$, satisfăcînd condițiile :

$$(x_j)_{1 \leqslant j < \infty} \in (SK), \tag{5.1}$$

$$(x_j)_{1 \leqslant j < \infty} \subset \mathfrak{L}^2(E, \mathcal{K}, P), \tag{5.2}$$

$$M_1(x_j) = 0, \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{5.3}$$

$$M_2(x_j) = 1, \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{5.4}$$

$$P\{\xi \mid x_j(\xi) < a\} = F(a), \quad (1 \leqslant j < \infty). \tag{5.5}$$

Cu notațiile din § 3, considerăm :

— șirul $(Y_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ avînd termenul general

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n ; \tag{5.6}$$

— șirul $(w_n)_{1 \leqslant n < \infty}$ avînd temenul general

$$w_n = \sqrt{n} ;$$

— șirul $(n_r)_{1 \leqslant r < \infty}$ se consideră chiar șirul numerelor naturale ;

— $\theta = 0$;

— $\mathfrak{F}(a)$ repartiția normală :

$$\mathfrak{F}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Încă în 1952, F. J. Anscombe a arătat că pentru acest șir $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ condiția (C_3) este satisfăcută. A. Rényi a reluat această prolemă și în 1957, în lucrarea [16], înlocuind condiția (C_1) cu condiția mai generală :

$$(C_1') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} q > 0, \quad (q \text{ constantă})$$

a demonstrat, fără să utilizeze condiția (C_3) :

TEOREMA 3. *Fie șirul* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *satisfăcînd condițiile* (5.1) — (5.5) *și fie șirul* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *definit de* (5.6). *Condiția* (C_1') *implică* :

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{5.7}$$

Trei ani mai tîrziu, în 1960, A. Rényi extinde mai mult condiția (C_1') înlocuind-o cu condiția mai generală :

$$(C_1'') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda, \quad (\lambda : E \to R_+),$$

unde λ este o variabilă aleatoare pozitivă cu valori discrete, obținînd teorema mai generală [18] :

TEOREMA 4. *Fie șirul* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *satisfăcînd condițiile* (5.1) — (5.5) *și fie șirul* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *definit de* (5.6). *Condiția* (C_1'') *implică* :

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{5.8}$$

Cum evident teorema 3 este un caz particular al teoremei 4, o vom demonstra numai pe aceasta din urmă. Pentru aceasta avem însă nevoie de trei leme pregătitoare [16].

LEMA 4. *Fie* $\mathcal{H}$ *un spațiu Hilbert și fie* $(f_n)_{1\leqslant n<\infty} \subset \mathcal{H}$ *un șir de elemente avînd proprietățile* :

$$\|f_n\| \leqslant K, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} < f_k, f_n > = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.10}$$

atunci, pentru orice $g \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n > = 0. \tag{5.11}$$

Demonstrație : Fie $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ cel mai mic subspațiu care conține pe $(f_n)_{0\leqslant n<\infty}$. Evident, pentru $g \in \mathcal{H}_1$ de forma : $g = \sum_{k=0}^{m} c_k f_k$ avem

$$\lim_{n\to\infty} < g, f_n > = 0.$$

Fie acum $g \in \mathcal{H}_1$ oarecare. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\tilde{g} \in \mathcal{H}_1$ de forma

$$\tilde{g} = \sum_{k=0}^{m} c_k f_k,$$

astfel ca

$$\| g - \tilde{g} \| < \varepsilon$$

de unde rezultă că

$$| < g, f_n > - < \tilde{g}, f_n > | = | < g - \tilde{g}, f_n > | \leqslant \| g - \tilde{g} \| \cdot \| f_n \| \leqslant K \cdot \varepsilon$$

și deci

$$\lim_{n \to \infty} | < g, f_n > - < \tilde{g}, f_n > | \leqslant K \cdot \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă:

$$\lim_{n \to \infty} < g, f_n > = 0.$$

Fie acum complementul ortogonal al lui $\mathcal{H}_1$:

$$\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1 = \{ g \mid < g, h > = 0, h \in \mathcal{H}_1 \}$$

și fie $g \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$. Atunci evident:

$$< g, f_n > = 0, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Să considerăm acum un element arbitrar: $g \in \mathcal{H}$. El admite descompunerea unică:

$$g = g_1 + g_2, \qquad g_1 \in \mathcal{H}_1, \; g_2 \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1.$$

Rezultă

$$\lim_{n \to \infty} < g, f_n > = 0.$$

Definiție. *Fie* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat. Un șir de evenimente:* $(A_n)_{0 \leqslant n < \infty} \subset \mathcal{K}$ *se va numi „tare amestecat"* (*„strongly mixing"*)*), *cu densitatea* α, $(0 < \alpha < 1)$, *dacă pentru orice* $B \in \mathcal{K}$, $P(B) > 0$ *avem* (α *independent de* B):

$$\lim_{n \to \infty} P_B(A_n) = \alpha. \tag{5.12}$$

Lema 5. *Fie* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *un cîmp de evenimente probabilizat. Fie* $(A_n)_{0 \leqslant n < \infty}$ *un șir de evenimente astfel ca:* $A_0 = E$ *și* $P(A_n) > 0$, $(n = 1,2,\ldots)$. *Șirul* $(A_n)_{0 \leqslant n < \infty}$ *este tare amestecat cu densitatea* α, $(0 < \alpha < 1)$, *dacă și numai dacă:*

$$\lim_{n \to \infty} P_{A_k}(A_n) = \alpha, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.13}$$

*) Terminologie inspirată din definiția transformărilor „strongly mixing" din teoria ergodică [9].

Demonstrație. Considerăm spațiul Hilbert $\mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, P)$, cu produsul scalar obișnuit :

$$f,\ g \in \mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, \mathrm{P}), \qquad <f, g> = \int_E fgdP.$$

Să definim acum șirul :

$$f_n(\xi) = \begin{cases} 1 - \alpha, & \xi \in A_n \\ -\alpha, & \xi \notin A_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

După cum se calculează ușor :

$$<f_k, f_n> = P(A_k \cap A_n) - \alpha P(A_k) - \alpha P(A_n) + \alpha^2. \qquad (5.14)$$

Cum $A_0 = E$, din (5.13) rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \alpha.$$

De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} P(A_k \cap A_n) = P(A_k) \lim_{n\to\infty} P_{A_k}(A_n) = \alpha P(A_k)$$

și deci din (5.14) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} <f_k, f_n> = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (5.15)$$

adică chiar condiția (5.10) din lema 4. Cum pe de altă parte avem și

$$\|f_k\|^2 = <f_k, f_k> = P(A_k) - 2\alpha P(A_k) + \alpha^2 < 1 + \alpha^2, \qquad (5.16)$$

adică condiția (5.9) din lema 4, pe baza acestei leme :

$$\lim_{n\to\infty} <g, f_n> = 0$$

pentru orice $g \in \mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, P)$. În particular, fie $B \in \mathfrak{K}$, $P(B) > 0$, și să considerăm : $g = \chi_B$, unde χ_B este funcția caracteristică a mulțimii B. Cum

$$<\chi_B, f_n> = P(A_n \cap B) - \alpha P(B)$$

și deoarece

$$\lim_{n\to\infty} <\chi_B, f_n> = 0$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P_B(A_n) = \alpha.$$

LEMA 6. *Fie* $(x_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un șir de variabile aleatoare definite pe* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, $(x_n)_{1\leqslant n<\infty} \in (SK)$, *fie* $(C_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un șir de numere reale și fie* $(D_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *un șir de numere pozitive tinzînd la infinit. Notăm*

$$\eta_n = \frac{\zeta_n - C_n}{D_n},$$

unde

$$\zeta_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Dacă în toate punctele de continuitate ale lui $F(a)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid \eta_n(\xi) < a\} = F(a), \tag{5.17}$$

atunci oricare ar fi $B \in \mathfrak{K}$, $P(B) > 0$, *avem în toate punctele de continuitate ale lui* $F(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} P_B\{\xi \mid \eta_n^{'}(\xi) < a\} = F(a). \tag{5.18}$$

Demonstrație. Fie a un punct de continuitate al lui $F(a)$, cu $F(a) > 0$. Este suficient să considerăm numai astfel de valori ale lui a. Este evident că pentru $n \geqslant n_0$:

$$P\{\xi \mid \eta_n(\xi) < a\} > 0.$$

Alegem

$$A_0 = E, \quad A_n^{'} = \{\xi \mid \eta_{n+n_0}(\xi) < a\}.$$

Să introducem variabilele aleatoare :

$$x_n = \eta_n; \quad z_n = -\frac{\zeta_k}{D_n}.$$

Aceste variabile aleatoare satisfac lema 1. Deci

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\xi \,\middle|\, \eta_n(\xi) - \frac{\zeta_k(\xi)}{D_n} < a\right\} = F(a).$$

Evident

$$\eta_{ln} - \frac{\zeta_k}{D_n} = \frac{\zeta_n - \zeta_k - C_n}{D_n} = \frac{x_{k+1} + \ldots + x_n - C_n}{D_n}$$

este independentă de

$$\eta_{lk} = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{D_k}$$

și avem

$$\lim_{n\to\infty} P_{\{\xi \mid \eta_{lk}(\xi) < a\}}\left\{\xi \,\middle|\, \eta_n(\xi) - \frac{\zeta_k(\xi)}{D_n} < a\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left\{\xi \,\middle|\, \eta_n^{'}(\xi) - \frac{\zeta_k(\xi)}{D_n} < a\right\} = F(a). \tag{5.19}$$

Luînd acum

$$x_n = \eta_n - \frac{\zeta_k}{D_n} \qquad z_n = \frac{\zeta_k}{D_n}$$

pe cîmpul de evenimente probabilizat $\{E, \mathfrak{K}, P^*\}$, unde

$$P^*(A) = P_{\{\xi \mid \eta_k(\xi) < a\}}(A)$$

aceeași lemă 1, din § 2, ne dă

$$\lim_{n\to\infty} P_{\{\xi \mid \eta_k(\xi) < a\}} \{\xi \mid \eta_n(\xi) < a\} = F(a)$$

de unde, pe baza lemei 5, avem

$$\lim_{n\to\infty} P_B \{\xi \mid \eta_n(\xi) < a\} = F(a)$$

oricare ar fi $B \in \mathfrak{K}$, $P(B) > 0$.

Demonstrația teoremei 4. a) Să considerăm mai întîi cazul particular în care

$$N_n = [n\lambda]$$

și fie

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

valorile luate de către variabila aleatoare λ. Fie evenimentul:

$$A_k = \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\}.$$

Avem

$$P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\{\xi \mid Y_{[n\lambda]}(\xi) < a\sqrt{[n\lambda(\xi)]}\} \cap A_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \cdot P_{A_k}\{\xi \mid Y_{[n\lambda_k]}(\xi) < a\sqrt{[n\lambda_k]}\}.^*) \qquad (5.20)$$

Se știe, conform unui corolar al teoremei clasice a lui Lindeberg [14], că pentru un șir de variabile aleatoare $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ satisfăcînd condițiile (5.1)—(5.5) avem ca repartiție limită repartiția normală, adică

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_n(\xi) < a\sqrt{n}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{[n\lambda_k]}(\xi) < a\sqrt{[n\lambda_k]}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (5.21)$$

pentru orice k. Cum $P(A_k) > 0$, pe baza lemei 6**), rezultă:

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}\{\xi \mid Y_{[n\lambda_k]}(\xi) < a\sqrt{[n\lambda_k]}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (5.22)$$

---

*) Acei termeni pentru care $P(A_k) = 0$ dispar din sumă.

**) Șirul $(y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ definit pe $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ se spune că este „tare amestecat", dacă oricare ar fi $B \in \mathfrak{K}$, $P(B) > 0$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} P_B\{\xi \mid y_n(\xi) < a\} = F(a)$$

în toate punctele de continuitate ale „densității" $F(a)$.

oricare ar fi k, pentru care $P(A_k) > 0$. Cum

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = 1,$$

din (5.20) și (5.22) rezultă

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{5.23}$$

b) Scriem identitatea evidentă:

$$\frac{Y_{N_n}}{\sqrt{N_n}} = \frac{Y_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} + \sqrt{\frac{[n\lambda]}{N_n}} \left(\frac{Y_{N_n} - Y_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} \right) + \frac{Y_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} \left(\sqrt{\frac{[n\lambda]}{N_n}} - 1 \right). \tag{5.24}$$

Condiția (C_1'') implică:

$$\frac{N_n}{[n\lambda]} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1. \tag{5.25}$$

Cele arătate la punctul *a*) și lema 2 implică:

$$\frac{Y_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} \left(\sqrt{\frac{[n\lambda]}{N_n}} - 1 \right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \tag{5.26}$$

Rămîne să arătăm că:

$$\frac{Y_{N_n} - Y_{[n\lambda]}}{\sqrt{[n\lambda]}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{5.27}$$

Să introducem pentru aceasta evenimentele:

$$B_{n,c} = \{\xi \mid |N_n(\xi) - [n\lambda(\xi)]| < cn\}, \tag{5.28}$$

$$C_{n,\lambda_k,\varepsilon} = \left\{ \xi \left| \frac{|Y_{N_n}(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)|}{\sqrt{[n\lambda_k]}} > \varepsilon, \right. \right\}, \tag{5.29}$$

$$D_M = \{\xi \mid \lambda(\xi) \geqslant \lambda_M\}. \tag{5.30}$$

Avem

$$P\left\{ \xi \left| \frac{Y_{N_n}(\xi) - Y_{[n\lambda]}(\xi)}{\sqrt{[n\lambda_k]}} \right| > \varepsilon \right\} = P(D_M) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{M-1} P(A_k \cap B_{n,c} \cap C_{n,\lambda_k,\varepsilon}) + P(\complement B_{n,c}). \tag{5.31}$$

Inegalitatea lui Kolmogorov implică:

$$P(A_k \cap B_{n,c} \cap C_{n,\lambda_k,\varepsilon}) \leqslant$$

$$\leqslant P\{\xi \mid \max_{[n\lambda_k]-cn \leqslant m \leqslant [n\lambda_k]+cn} |Y_n(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)| > \varepsilon\sqrt{[n\lambda_k]}\} \leqslant \frac{2c}{\varepsilon^2[\lambda_k]}. \tag{5.32}$$

Din (5.31) şi (5.32) avem

$$P\left\{\xi \mid \left|\frac{Y_{N_n}(\xi) - Y_{[n\lambda]}(\xi)}{\sqrt{[n\lambda]}}\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant P(D_M) + \frac{2c}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{[\lambda_k]} + P(\mathbb{C}B_{n,c}).$$

Fie $\eta > 0$ arbitrar de mic. Alegem pe M aşa de mare ca :

$$P(D_M) < \frac{\eta}{3}.$$

Alegem pe c aşa de mic ca :

$$\frac{2c}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{[\lambda_k]} < \frac{\eta}{3}.$$

Alegem pe $n_0 = n_0(\varepsilon, \eta)$ aşa de mare pentru ca $n \geqslant n_0$ să implice :

$$P(\mathbb{C}B_{n,c}) < \frac{\eta}{3}$$

Deci : $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ fiind daţi, există $n_0(\varepsilon, \eta)$ astfel ca pentru $n \geqslant n_0$ să avem

$$P\left\{\xi \mid \left|\frac{Y_{N_n}(\xi) - Y_{[n\lambda]}(\xi)}{\sqrt{[n\lambda]}}\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \eta$$

deci avem (5.27). Din cele demonstrate la punctul *a*) şi din (5.26) şi (5.27), pe baza lemei 1, rezultă (5.8).

§ 6. TEOREMA LUI ANSCOMBE GENERALIZATĂ

Aceşti paşi odată făcuţi, reîntorcîndu-se la gradul de generalitate al teoremei lui Anscombe, se pune problema modului în care utilizînd în loc de condiţia (C_1) condiţia mult mai largă (C_1') trebuie modificate condiţiile (C_2) şi (C_3) astfel încît rezultatul teoremei să rămînă valabil. Această problemă a fost rezolvată în lucrarea [6].

Cu notaţiile din § 3, să considerăm următoarele condiţii :

$$(C_1') \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r \to \infty]{P} \lambda, \tag{6.1}$$

unde λ este o variabilă aleatoare cu valorile discrete pozitive :

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

(C_2'') În orice punct de continuitate al lui $\mathfrak{F}(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant aw_n\} = \mathfrak{F}(a) \tag{6.2}$$

oricare ar fi k, $(k = 1, 2, \ldots)$, astfel ca $P(A_k) > 0$, unde

$$A_k = \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\}$$

(C_3'') $\varepsilon > 0$ și $\eta > 0$ fiind dați, există $n_0(\varepsilon, \eta)$ și numărul pozitiv mic $c(\varepsilon, \eta)$, astfel ca $n \geqslant n_0(\varepsilon, \eta)$ să implice

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m\in J_{k,n}} \left(\{\xi \| Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)| \geqslant \varepsilon w_{[n\lambda_k]}\} \cap \{\xi | \lambda(\xi) = \lambda_k\}\right)\right) < \eta, \tag{6.3}$$

unde

$$J_{k,n} = \left]\,[n\lambda_k] - cn, \quad [n\lambda_k] + cn\,\right[\cap N.$$

TEOREMA 5. *Dacă avem condițiile* (C_1''), (C_2''), (C_3''), *atunci în toate punctele de continuitate ale lui* $\mathfrak{F}(a)$ *avem*

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{[n_r\lambda]}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a) \tag{6.4}$$

COROLAR. *Să considerăm că este satisfăcută în plus condiția impusă șirului* $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$:

$$(C_4'') \qquad \frac{w_{[n\lambda]}}{w_{N_r}} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1. \tag{6.5}$$

Atunci

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{N_r}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a) \tag{6.6}$$

în toate punctele de continuitate ale lui $\mathfrak{F}(a)$.

Demonstrațiile teoremei 5 și corolarului se găsesc în lucrarea [6].

Remarcă. În cazul în care variabila aleatoare $\lambda(\xi)$ se înlocuiește cu constanta 1, condițiile (C_1''), (C_2''), (C_3'') se reduc la condițiile (C_1), (C_2), (C_3) ale lui F. J. Anscombe.

Caz particular. Fie șirul $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ de variabile aleatoare, definite pe $\{E, \mathcal{K}, P\}$, satisfăcînd condițiile :

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \in (SK), \tag{6.7}$$

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \subset \mathfrak{L}^2(E, \mathcal{K}, P), \tag{6.8}$$

$$M_1(x_j) = 0, \quad M_2(x_j) = 1, \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{6.9}$$

$$P\{\xi \mid x_j(\xi) < a\} = \mathfrak{F}(a), \quad (1 \leqslant j < \infty), \tag{6.10}$$

și considerăm șirul $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ avînd termenul general:

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{6.11}$$

Considerăm din nou, în loc de șirul $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$, chiar șirul numerelor naturale, iar drept șir $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ șirul de termen general $w_n = \sqrt{n}$. Șirul $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ satisface condițiile (C_2'') și (C_3'') cu $\mathcal{F}(a)$ repartiția normală. Că satisface condiția (C_2'') rezultă din considerațiile făcute în § 5, deoarece s-a demonstrat că șirul $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ este tare amestecat, deci satisface cu atît mai mult condiția (C_2''). În lucrarea [6], s-a demonstrat că șirul $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ satisface și condiția (C_3''), ceea ce arată că această condiție în aparență destul de restrictivă este satisfăcută de către o clasă destul de largă de șiruri: șirurile sumelor de variabile aleatoare independente, identic repartizate. Deci pentru aceste șiruri, condiția (C_1'') singură, este suficientă pentru ca să avem (6.6), deoarece prin modul în care s-a luat șirul $(w_n)_{1\leqslant n\leqslant\infty}$ condiția (C_4'') este evident satisfăcută dacă avem condiția (C_1'').

§ 7. PROBLEME DESCHISE

Vom enumera doar cîteva probleme deschise în tematica de care se ocupă această lucrare.

a) O problemă este găsirea de noi clase de șiruri $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ care satisfac condițiile (C_2''), (C_3''). După cum s-a văzut, clasa șirurilor sumelor de variabile aleatoare independente, identic repartizate, are proprietăți mai bogate decît cele cerute de condițiile din teorema 5. În această direcție ni se pare importantă lucrarea [9] în care A. Rényi și P. Révész au arătat că există lanțuri Markov care au proprietatea de a fi „strongly mixing", deci care satisfac cu atît mai mult condiția (C_2'') din teorema 5. Rămîne o problemă deschisă de a vedea care lanțuri Markov, sau cu legături complete satisfac condiția (C_3'').

b) În cazul șirurilor de sume normate de variabile aleatoare independente, neidentic repartizate, se pot obține condiții mult mai simple decît condiția (C''_3).

c) O altă problemă este studiul unor cazuri particulare ale teoremei 5, pentru cazul în care funcția de repartiție $\mathcal{F}(a)$ este o repartiție concretă, dar nu neapărat normală.

d) Obținerea de condiții satisfăcătoare în cazul în care λ este o variabilă aleatoare cu valori continue. Atît A. Rényi, cît și J. Mogyoródi, au anunțat menținerea rezultatelor lor și în acest caz. Totuși tratarea satisfăcătoare a cazului continuu se pare că necesită trecerea de la cîmpul de evenimente probabilizat clasic $\{E, \mathcal{K}, P\}$ la un alt cîmp mai bogat, în care noul clan de părți să fie închis și pentru reuniuni nu neapărat numărabile de mulțimi din clan. Aceiași dificultate apare și atunci cînd trecem de la șiruri de variabile aleatoare, la familii oarecare.

Primită la redacție la 15 februarie 1963

НЕКОТОРЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕОРИЕЙ АНСКОМБА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

РЕЗЮМЕ

В работе излагаются некоторые результаты, исходным пунктом которых является теорема Анскомба об асимптотическом распределении случайных последовательностей случайных переменных.

Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1 (Ф. Ж. Анскомб [1]). *Пусть заданы* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *— поле событий с вероятностями;* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *последовательность случайных переменных определенных на* $\{E, \mathcal{K}, P\}$; θ *действительное число;* $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *последовательность положительных чисел;* $(N_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *другая последовательность случайных переменных с положительными целыми значениями, определенных на* $\{E, \mathcal{K}, P\}$; $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *возрастающая последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности;* $\mathcal{F}(a)$ *функция распределения. Если выполнены условия:*

$$(C_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1,$$

$$(C_2) \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant a w_n\} = \mathcal{F}(a)$$

во всех точках непрерывности функци $\mathcal{F}(a)$

(C_3) *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *существует натуральное число* $n_0(\varepsilon, \eta)$ *и положительное число* $c(\varepsilon, \eta)$ *— такие, что при* $n \geqslant n_0$ *имеем*

$$P\Big(\bigcap_{|m-n|<cn} \{\xi \mid\mid Y_m(\xi) - Y_n(\xi)| < \varepsilon w_n\}\Big) > 1 - \eta.$$

Тогда:

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant a w_{n_r}\} = \mathcal{F}(a)$$

во всех точках непрерывности функции $\mathcal{F}(a)$.

Пусть $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ последовательность случайных переменных, определенных на $\{E, \mathcal{K}, P\}$, удовлетворяющих условиям

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \subset \mathcal{L}^2(E, \mathcal{K}, P), \tag{A}$$

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \in (SK). \tag{B}$$

Рассмотрим последовательность $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$, где

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{0}$$

Пусть $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ — последовательность натуральных чисел; $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ последовательность, определяемая соотношением

$$w_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2},$$

где D_k^2 рассеяние случайной величины x_k.

Теорема 2. (*Ж. Могиороди* [12]). *Если выполнены условия* (C_1) *и* (C_2), *то для того, чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) - \theta \leqslant a w_n\} = \mathfrak{F}(a).$$

во всех точках непрерывности функции $\mathfrak{F}(a)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$(C_3') \qquad \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} = 1,$$

где δ *действительное* $(\delta > -1)$.

Теорема 3. (*А. Реньи* [16]). *Пусть последовательность* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *удовлетворяет условиям* (A) *и* (B) *и кроме того*

$$M_1(x_j) = 0, \quad M_2(x_j) = 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant \infty), \qquad (C)$$

$$P\{\xi \mid x_j(\xi) < a\} = F(a) \qquad (1 \leqslant j \leqslant \infty). \qquad (D)$$

Пусть последовательность $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *определяется формулой* (0). *Из условия*

$$(C_1') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} q > 0 \qquad (q\text{—постоянная})$$

следует:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du.$$

Теорема 4. (*А. Реньи* [18]). *Пусть последовательность* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *удовлетворяет условиям* (A), (B), (C), (D) *и пусть* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *определяется формулой* (0). *Из условия*

$$(C_1'') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda,$$

где λ *положительная случайная переменная с дискретными значениями, определенная на* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$, *следует*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Теорема 5. (*С. Гуяшу* [6]). *Пусть* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *и* $(N_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *две последовательности случайных переменных, определенных на* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$. *Пусть* θ *действительное число,* $\mathfrak{F}(a)$ *функция распределения,* $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *последовательность положительных чисел и* $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *возрастающая последовательность натуральных чисел, стремящаяся к бесконечности. Если выполнены условия* (N_r *с положительными целыми значениями*):

$$(C_1'') \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} \lambda,$$

где λ *положительная случайная переменная на* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ *с дискретными значениями:* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$

(C_2''') *Во всех точках непрерывности функции* $\mathfrak{F}(a)$ *имеем*

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant aw_n\} = \mathfrak{F}(a)$$

для любого k $(k = 1, 2, \ldots,)$ *такого, что* $P(A_k) > 0$, *где* $A_k = \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\}$.

(C_3'') *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$ *существуют* $n_0(\varepsilon, \eta)$ *и положительное число* $c(\varepsilon, \eta)$ *такие, что при* $n \geqslant n_0$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m\in J_{k,n}} \left(\{\xi \| Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)| \geqslant \varepsilon w_{[n\lambda_k]}\} \cap \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\}\right)\right) < \eta$$

где:

$$J_{k,n} = \left]\,[n\lambda_k] - cn,\quad [n\lambda_n] + cn\,\right[\cap N.$$

Тогда во всех точках непрерывности функции $\mathfrak{F}(a)$ *имеем*:

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{[n_r\lambda]}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a).$$

Следствие. *Если, кроме того, выполнено условие*

(C_4'')
$$\frac{w_{[n_r\lambda]}}{w_{N_r}} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1,$$

то:

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{N_r}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a)$$

во всех точках непрерывности функции $\mathfrak{F}(a)$.

QUELQUES RECHERCHES SE RATTACHANT AU THÉORÈME D'ANSCOMBE CONCERNANT LA RÉPARTITION ASYMPTOTIQUE DES SUITES ALÉATOIRES DE VARIABLES ALÉATOIRES

RÉSUMÉ

L'auteur indique quelques résultats ayant comme point de départ le théorème de F. J. Anscombe sur la répartition asymptotique des suites aléatoires de variables aléatoires. Il démontre les théorèmes suivants :

Théorème 1. (F. J. Anscombe [1]) : *Considérons donnés* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ *un champ d'événements probabilisé ;* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *une suite de variables aléatoires définies sur* $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ *;* θ *un nombre réel ;* $(w_n)_{1\leqslant n\leqslant\infty}$ *une suite de nombres positifs ;* $(N_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *une autre suite de variables aléatoires avec des*

valeurs entières positives définies aussi sur $\{E, \mathfrak{K}, P\}$; $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *une suite croissante d'entiers positifs tendant vers l'infini* ; $\mathfrak{F}(a)$ *une fonction de répartition. Si les conditions*

$$(C_1) \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1 ;$$

$$(C_2) \qquad \lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant aw_n\} = \mathfrak{F}(a)$$

sont satisfaites en tous les points de continuité de $\mathfrak{F}(a)$.

(C_3) *Si on donne* $\varepsilon > 0$ *et* $\eta > 0$, *il existe un nombre naturel* $n_0(\varepsilon, \eta)$ *et un nombre positif petit* $c(\varepsilon, \eta)$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$ *nous ayons*

$$P\Big(\bigcap_{|m-n|<cn} \{\xi \| Y_m(\xi) - Y_n(\xi)| < \varepsilon w_n\}\Big) > 1 - \eta.$$

Alors

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant aw_{n_r}\} = \mathfrak{F}(a)$$

en tous les points de continuité de $\mathfrak{F}(a)$.

Soit $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ une suite de variables aléatoires définies sur $\{E, \mathfrak{K}, P\}$ et satisfaisant aux conditions

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \subset \mathfrak{L}^2(E, \mathfrak{K}, P), \qquad (A)$$

$$(x_j)_{1\leqslant j<\infty} \in (SK). \qquad (B)$$

Considérons la suite $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ ayant comme terme général :

$$Y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \qquad (0)$$

Pour la suite $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ nous prendrons la suite des nombres naturels ; comme suite $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ nous considérerons la suite ayant le terme général :

$$w_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}$$

où D_k^2 est la dispersion de la variable aléatoire x_k.

THÉORÈME 2. (J. Mogyoródi [12]) : *Dans l'hypothèse que les conditions* (C_1) *et* (C_2) *sont satisfaites, pour avoir*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) - \theta \leqslant aw_n\} = \mathfrak{F}(a)$$

en tous les points de continuité de $\mathfrak{F}(a)$, *il est nécessaire et suffisant que soit satisfaite la condition* :

$$(C_3') \qquad \lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{w_n}{w_{[n(1+\delta)]}} = 1$$

où δ *est réel* $(\delta > -1)$.

THÉORÈME 3. (A. Rényi [16]) : *Soit la suite* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *qui satisfait aux conditions* (A), (B) *et en outre*

$$M_1(x_j) = 0, \quad M_2(x_j) = 1 \quad (1 \leqslant j < \infty) \tag{C}$$

$$P\{\xi \mid x_j(\xi) < a\} = \mathfrak{F}(a) \quad (1 < j < \infty). \tag{D}$$

Soit la suite $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *définie par* (0). *La condition*

$$(C_1') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} q > 0 \qquad (q \text{ constant})$$

implique :

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

THÉORÈME 4. (A. Rényi [18]) : *Soit la suite* $(x_j)_{1\leqslant j<\infty}$ *qui satisfait aux conditions* (A), (B), (C), (D) *et soit la suite* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *définie par* (0). *La condition*

$$(C_1'') \qquad \frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \lambda$$

où λ *est une variable aléatoire positive ayant des valeurs discrètes, définie sur* $\{E, \mathcal{K}, P\}$, *implique*

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_n}(\xi) < a\sqrt{N_n(\xi)}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

THÉORÈME 5. (S. Guiaşu [6]) : *Soient* $(Y_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *et* $(N_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *deux suites de variables aléatoires définies sur* $\{E, \mathcal{K}, P\}$. *Soient* θ *un nombre réel,* $\mathfrak{F}(a)$ *une fonction de répartition,* $(w_n)_{1\leqslant n<\infty}$ *une suite de nombres positifs et* $(n_r)_{1\leqslant r<\infty}$ *une suite croissante de nombres entiers positifs tendant vers l'infini. Si l'on satisfait aux conditions* (N_r *avec des valeurs entières positives*) :

$$(C_1'') \qquad \frac{N_r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{P} \lambda$$

où λ *est une variable aléatoire positive sur* $\{E, \mathcal{K}, P\}$ *ayant des valeurs discrètes* : $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$;

(C_2'') *En tous points de continuité de* $\mathfrak{F}(a)$:

$$\lim_{n\to\infty} P_{A_k}\{\xi \mid Y_n(\xi) - \theta \leqslant a w_n\} = \mathfrak{F}(a)$$

quel que soit k $(k = 1, 2, \ldots,)$ *tel que* $P(A_k) > 0$ *là où* :

$$A_k = \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\} ;$$

(C_3'') $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ *étant données, il existe* $n_0(\varepsilon, \eta)$ *et le nombre positif faible* $c(\varepsilon, \eta)$ *tel que dès que* $n \geqslant n_0$ *nous avons* :

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m\in J_{k,n}} \left(\{\xi \| Y_m(\xi) - Y_{[n\lambda_k]}(\xi)| \geqslant \varepsilon w_{[n\lambda_k]}\} \cap \{\xi \mid \lambda(\xi) = \lambda_k\}\right)\right\} < \eta$$

où

$$J_{k,n} = \left]\left[n\lambda_k\right] - cn,\quad \left[n\lambda_k\right] + cn\right[\cap N$$

Dans ce cas, dans tous les points de continuité de la fonction $\mathfrak{F}(a)$ nous avons :

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant a w_{[n_r\lambda]}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a).$$

COROLLAIRE. *Si en outre est satisfaite la condition :*

$$(C_4'') \qquad \frac{w_{[n_r\lambda]}}{w_{N_r}} \xrightarrow[r\to\infty]{P} 1,$$

alors

$$\lim_{r\to\infty} P\{\xi \mid Y_{N_r}(\xi) - \theta \leqslant a w_{N_r}(\xi)\} = \mathfrak{F}(a)$$

en tous les points de continuité de la fonction $\mathfrak{F}(a)$.

BIBLIOGRAFIE

1. F. J. ANSCOMBE, *Large-sample theory of Sequential Estimation.* Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 600—607 (1952).
2. G. CIUCU, G. SÎMBOAN, *Teoria probabilităţilor şi statistică matematică. Culegere de probleme.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1962.
3. H. CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton, 1946.
4. Р. Л. ДОБРУШИН, *Лемма о пределе сложной случайной функции.* Успехи мат. наук, **10**, 157—159 (1955).
5. Б. В. ГНЕДЕНКО, А. Н. КОЛМОГОРОВ, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Москва, 1949.
6. S. GUIAŞU, *Repartiţia limită pentru şiruri aleatoare de variabile aleatoare.* Revue de math. pures et appl. **8** (1963).
7. P. R. HALMOS, *Measure Theory.* New York, 1950.
8. — *Introduction to Hilbert Space.* New York, 1951.
9. — *Lectures on Ergodic Theory.* Tokyo, 1956.
10. А. Н. КОЛМОГОРОВ, *Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей.* Вестник Моск. Ун., **10**, 29—38 (1953).
11. M. LOÈVE., *Probability Theory.* New York, 1955.
12. J. MOGYORÓDI, *On Limiting Distributions for Sums of a Random Number of Independent Random Variables.* Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. Sci., **6**, 365—371 (1961).
13. O. ONICESCU, *Numere şi sisteme aleatoare.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.
14. O. ONICESCU, G. MIHOC şi colab., *Calculul probabilităţilor şi aplicaţii.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956.
15. А. РЕНЬИ, *К теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин.* Acta, Math. Acad. Sci. Hung., **I**, 99—108 (1950).
16. A. RÉNYI, *On the Asymptotic Distribution of the Sum of a Random Number of Independent Random Variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 193—199 (1957).
17. — *On Mixing Sequence of Sets.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 215—228 (1958).
18. — *On the Central Limit Theorem for the Sum of a Random Number of Independent Random Variables.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **11**, 97—102 (1960).
19. A. RÉNYI, P. RÉVÉSZ, *On Mixing Sequences of Random Variables.* Acta. Math. Acad. Sci. Hung., **9**, 389—393 (1958).
20. H. ROBBINS, *The Asymptotic Distribution of the Sum of a Random Number of Random Variables.* Bull. Amer. Math. Soc., **54**, 1151—1161 (1948).
21. L. TAKÁCS, *On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., **8**, 169—191 (1957).

ASUPRA DETERMINĂRII MINIMELOR FUNCȚIILOR PSEUDOBOOLEENE

DE

P. IVĂNESCU *), IVO ROSENBERG **), S. RUDEANU *)

În lucrarea [1], R. Fortet a arătat că anumite probleme de programare liniară conduc la problema determinării minimelor unor polinoame cu coeficienți reali, ale căror variabile iau numai valorile 0 și 1. Ideile lui R. Fortet se pot aplica și la rezolvarea problemei transporturilor [2], precum și la minimizarea funcțiilor booleene [3].

Esența metodei de găsire a minimului, propuse în [1], constă în determinarea unor minime relative ale funcției, rămînînd ca dintre acestea să se aleagă apoi minimul absolut. În nota de față ne propunem să demonstrăm că prin varianta metodei lui R. Fortet, întrebuințată în [3], se obțin chiar minimele absolute, și numai ele.

§1. Definiția 1. *O funcție*

$$f(x_1, \ldots, x_n): L_2 \times \ldots \times L_2 = L_2^n \to R, \tag{1}$$

unde $L_2 = \{0,1\}$, *iar* R *este corpul numerelor reale, va fi numită funcție* pseudobooleană.

Observația 1. Orice funcție pseudobooleană poate fi scrisă sub forma unui polinom cu coeficienți reali, liniar în fiecare variabilă.

Într-adevăr, putem scrie

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 [f(1, x_2, \ldots, x_n) - f(0, x_2, \ldots, x_n)] + f(0, x_2 \ldots, x_n) =$$
$$= x_1 g(x_2, \ldots, x_n) + h(x_2, \ldots, x_n);$$

demonstrația se completează ușor prin inducție.

---

*) Institutul de matematică al Academiei R.P.R.
**) Asistent la Institutul politehnic din Brno, R. S. Cehoslovacă.

Definiția 2. *Punctul* $\tilde{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in L_2^n$, *se numește punct de minim* (*absolut*), *dacă*

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant f(x_1, \ldots, x_n), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n. \tag{2}$$

Metoda de minimizare a funcțiilor booleene propusă de R. Fortet [1] și modificată în [2], [3], constă în următoarele:

Să notăm, pentru necesitățile recurenței,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 g_1(x_2, \ldots, x_n) + h_1(x_2, \ldots, x_n). \tag{3.1}$$

Punînd

$$\bar{x} = 1 - x,$$

inegalitatea

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f(\bar{x}_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4.1}$$

se mai scrie

$$(x_1 - \bar{x}_1)\, g_1(x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0. \tag{4'.1}$$

Dacă introducem funcția

$$\varphi_1 : L_2^{n-1} \to L_2 \tag{5.1}$$

definită prin

$$\varphi_1(x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } g_1(x_2, \ldots, x_n) < 0, \\ 0, & \text{dacă } g_1(x_2, \ldots, x_n) > 0, \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } g_1(x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

atunci soluția generală a ecuației (4.1) este

$$x_1 = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n). \tag{7.1}$$

Mai departe, notăm

$$f_2(x_2, \ldots, x_n) = f_1(\varphi_1(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \tag{8.1}$$

și continuăm procedeul. Cu alte cuvinte, pentru orice indice i satisfăcînd inegalitățile $1 \leqslant i \leqslant n-1$, punem

$$f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_i g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) + h_i(x_{i+1}, \ldots, x_n); \tag{3.i}$$

considerăm apoi inegalitatea

$$f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{4.i}$$

care se mai scrie

$$(x_i - \bar{x}_i)\, g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant 0; \tag{4'.i}$$

introducem funcția

$$\varphi_i : L_2^{n-i} \to L_2 \tag{5.i}$$

definită prin

$$\varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) < 0, \\ 0, & \text{dacă } g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) > 0, \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{6.i}$$

și facem în $f_i(x_i, \ldots, x_n)$, substituția

$$x_i = \varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{7.i}$$

cu alte cuvinte am introdus funcția

$$f_{i+1}(x_{i+1}, \ldots, x_n) = f_i(\varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad x_{i+1}, \ldots, x_n). \tag{8.i}$$

În ultimul pas al metodei, obținem inecuația

$$f_n(x_n) \leqslant f_n(\bar{x}_n) \tag{4.n}$$

sau

$$(x_n - \bar{x}_n)\, g_n \leqslant 0, \tag{4'.n}$$

unde g_n nu depinde de variabilele $x_1, \ldots, x_n$. Relația (4'.n) ne dă

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } g_n < 0, \\ 0, & \text{dacă } g_n > 0, \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } g_n = 0. \end{cases} \tag{7.n}$$

Observația 2. Putem da următoarea expresie a funcțiilor $\varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Să notăm

$$M_i = \{(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in L_2^{n-i} \mid g_i(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) < 0\},$$
$$N_i = \{(\beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) \in L_2^{n-i} \mid g_i(\beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) = 0\}.$$

Atunci

$$\varphi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \bigvee_{(\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in M_i} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots x_n^{\alpha_n} \vee u_i \left[\bigvee_{(\beta_{i+1}, \ldots, \beta_n) \in N_i} x_{i+1}^{\beta_{i+1}} \ldots x_n^{\beta_n} \right],$$

unde u_i este un parametru arbitrar din L_2 și unde am considerat $\bigvee_{i \in \emptyset} y_i = 0$.

Algoritmul descris mai sus are la bază următoarea :

LEMĂ. *Punctele de minim ale funcției f satisfac relațiile (7.1),... ..., (7.i),..., (7.n).*

Într-adevăr, orice punct de minim $(x_1, \ldots, x_n)$ al funcției f satisface inegalitatea (4.1) și deci relația (7.1), de unde se deduce că este verificată și relația

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_2, \ldots, x_n).$$

Presupunem, prin inducție, că sînt verificate relațiile (7.i—1) și

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(x_i, \ldots, x_n).$$

Deoarece punctul de minim satisface

$$f_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant f_1(y_1, \ldots, y_{i-1}, \bar{x}_i\ x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

pentru orice $y_1, \ldots, y_{i-1}$, rezultă din egalitatea precedentă că acest punct verifică în particular relația (4.i), deci (7.i), deci

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f_{i+1}(x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

ceea ce completează demonstrația.

Conform acestei leme, metoda de minimizare la care ne referim, constă în determinarea punctelor din L_2^n care satisfac relațiile (7.n), (7.n−1),..., (7.1), urmînd ca apoi să se elimine eventualele puncte care nu sînt puncte de minim. În cele ce urmează vom arăta însă că toate punctele astfel găsite sînt de minim.

Într-adevăr, fie $(x_1', \ldots, x_n')$, $(x_1'', \ldots, x_n'')$, două puncte care satisfac relațiile (7.1), (7.2),..., (7.n); va fi suficient să arătăm că

$$f(x_1', \ldots, x_n') = f(x_1'', \ldots, x_n'').$$

Să presupunem contrariul; ar rezulta, de exemplu, că

$$f(x_1'', \ldots, x_n'') < f(x_1', \ldots, x_n'). \tag{9}$$

După cum am arătat în cursul demonstrației lemei, avem

$$f(x_1', \ldots, x_n') = f_n(x_n')$$

și, la fel,

$$f(x_1'', \ldots, x_n'') = f_n(x_n'')$$

astfel încît relația (9) se mai poate scrie

$$f_n(x_n'') < f_n(x_n'),$$

de unde rezultă $x_n'' \neq x_n'$, deci $x_n'' = \bar{x}_n'$ și

$$f_n(\bar{x}_n') < f_n(x_n'),$$

ceea ce contrazice faptul că x_n' satisface relația (4.n).

Am demonstrat astfel următoarea

TEOREMĂ. *Punctul* $(x_1, \ldots, x_n) \in L_2^n$ *satisface relațiile* (7.1),..., (7.n), *dacă și numai dacă este punct de minim absolut al funcției* f.

Înainte de a da un exemplu, vom face :

Observația 3. Pentru fiecare sistem de valori $\{x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*\}$, pentru care $g_i(x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) = 0$, valoarea funcției φ_i este un parametru arbitrar :

$$\varphi_i(x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*) = u_i^*,$$

deci funcția φ_i poate depinde de niște parametri arbitrari. Cu toate acestea, funcția $f_{i+1}(x_{i+1}, \ldots, x_n)$ nu depinde de acești parametri. Într-adevăr fie

$$\psi_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) < 0, \\ 0, & \text{dacă } g_i(x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0. \end{cases}$$

Se vede din (6.i) că $\varphi_i g_i = \psi_i g_i$, deci

$$f_{i+1} = \varphi_i g_i + h_i = \psi_i g_i + h_i$$

nu depinde de parametrii lui φi.

Exemplu. Să căutăm minimul funcției pseudobooleene

$$f_1 = 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 5x_1x_2x_3 + 3x_2x_4 + 9x_4x_5.$$

Aici

$$g_1 = 2 - 5x_2x_3$$

și deci

$$x_1 = \varphi_1 = x_2x_3. \tag{10}$$

Deci

$$f_2 = -3x_2x_3 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_2x_4 + 9x_4x_5$$

și

$$g_2 = -3x_3 + 3 + 3x_4$$

adică

$$x_2 = \varphi_2 = ux_3\bar{x}_4 = ux_3(1-x_4). \tag{11}$$

Conform observației 3, putem înlocui în f_2, $x_2 = \varphi_2 = 0$ și găsim

$$f_3 = -7x_3 + 9x_4x_5$$

(același rezultat se putea obține prin înlocuirea lui x_2 cu φ_2).

Deci avem $g_3 = -7$ și

$$x_3 = \varphi_3 = 1. \tag{12}$$

Prin urmare

$$f_4 = -7 + 9x_4x_5$$

și

$$g_4 = 9x_5,$$

$$x_4 = \varphi_4 = v\bar{x}_5 = v(1 - x_5). \tag{13}$$

Avem

$$f_5 = -7, \quad g_4 = 0$$

și

$$x_5 = w. \tag{14}$$

Din (14), (13), (12), (11), (10), găsim

$$x_5 = w, \quad x_4 = v(1-w), \quad x_3 = 1, \quad x_2 = u(1 - v + vw),$$

$$x_1 = u(1 - v + vw),$$

u, v, w fiind parametri arbitrari în L_2.

Pentru diversele valori ale parametrilor, găsim minimul funcției f:

$$f(0,0,1,0,0) = f(0,0,1,0,1) = f(1,1,1,0,0) = f(1,1,1,0,1) =$$
$$= f(0,0,1,1,0) = -7.$$

Primită la redacție la 3 martie 1963

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МИНИМУМОВ ПСЕВДОБУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В [1] Р. Форте показал, что некоторые задачи линейного программирования ведут к задаче об определении минимумов некоторых многочленов с действительными коэффициентами, переменные которых принимают только значения 0 и 1 (псевдобулевые функции, согласно определению 1). Идеи Форте можно применить и к решению транспортной задачи [2], а также к минимизации булевых функций [3]. Существо метода минимизации, предложенного в [1], состоит в определении некоторых относительных минимумов функции, из которых выбирается затем абсолютный минимум (определение 2). В настоящей заметке авторы доказывают, что использованием в [3] варианта метода Форте получаются абсолютные минимумы и только они. Приводится пример применения метода.

SUR LA DÉTERMINATION DES MINIMA DES FONCTIONS PSEUDO-BOOLÉENNES

RÉSUMÉ

R. Fortet a montré[1] que certains problèmes de programmation linéaire conduisent au problème de la détermination des minima des polynômes à coefficients réels, dont les variables ne prennent que les valeurs 0 et 1 (fonctions *pseudo-booléennes*, conformément à la définition 1). On peut également appliquer les idées de R. Fortet à la résolution du problème des transports [2] ainsi qu'à la minimisation des fonctions booléennes [3].

L'essence de la méthode de minimisation proposée dans [1] consiste dans la détermination des minima relatifs de la fonction, suivie du choix, parmi ceux-ci, du minimum absolu (définition 2). Dans cette note, les auteurs démontrent que par la variante de la méthode de R. Fortet, utilisée dans [3], on obtient tous les minima absolus, et seulement eux. On donne un exemple d'application de cette méthode.

BIBLIOGRAFIE

1. R. FORTET, *Applications de l'algèbre de Boole en recherche opérationnelle*. Revue française de recherche opérationnelle, *4*, 17—25 (1960).
2. P. IVĂNESCU, S. RUDEANU, *Asupra rezolvării problemei transporturilor prin metoda lui Egerváry. II.* Studii şi cercetări matematice, **XIV**, 59—67 (1963).
3. IVO ROSENBERG, P. IVĂNESCU, S. RUDEANU, *An Application of Discrete Linear Programming to the Minimization of Boolean Functions*. Revue de math. pures et appl., **VIII**, *3*, (1963).

FAMILII DE VARIETĂȚI MĂSURABILE ÎNTR-UN SPAȚIU RIEMANNIAN V_3 CU CURBURA CONSTANTĂ NEGATIVĂ

DE

MARIUS I. STOKA

Fie un spațiu riemannian V_3 cu curbura constantă negativă $k<0$, a cărui metrică este

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{-k\,(x^3)^2}. \tag{1}$$

Grupul de mișcări $G_6(x)$ al acestui spațiu este definit de operatorii [1] *).

$$\begin{aligned}
X_1 f &= [(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^1x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\\
X_2 f &= 2\,x^1\,x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^2\,x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\\
X_3 f &= x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},\quad X_4 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},\\
X_5 f &= \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_6 f = \frac{\partial f}{\partial x^2},
\end{aligned} \tag{2}$$

avînd structura

$$\begin{aligned}
&(X_1X_3) = -(X_2X_4) = -X_1, && (X_1X_4) = (X_2X_3) = -X_2,\\
&&& (X_1X_5) = (X_2X_6) = -2X_3,\\
&(X_1X_6) = -(X_2X_5) = 2X_4, && (X_3X_5) = (X_4X_6) = -X_5,\\
&&& (X_3X_6) = -(X_4X_5) = -X_6,\\
&(X_1X_2) = (X_3X_4) = (X_5X_6) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

*) p. 636.

În această lucrare determinăm familiile de curbe și de suprafețe măsurabile din acest spațiu. Pentru aceasta vom folosi anumite rezultate pe care le-am obținut anterior asupra grupurilor măsurabile și a măsurii familiilor de varietăți [2].

I

Vom da o altă formă operatorilor (2) ai grupului $G_6(x)$, mai simplă pentru calculele ulterioare.

Prin schimbarea de variabile

$$\overline{x}^1 = \frac{x^1}{x^3},\quad \overline{x}^2 = \frac{x^2}{x^3},\quad \overline{x}^3 = \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}{x^3},$$

putem presupune că metrica spațiului este

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(x^3\,\mathrm{d}x^1 - x^1\,\mathrm{d}x^3)^2 + (x^3\,\mathrm{d}x^2 - x^2\,\mathrm{d}x^3)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2}{-\,k\,(x^3)^2}, \tag{1'}$$

iar operatorii care definesc grupul de mișcări

$$\begin{aligned} X_1 f &= x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1},\quad X_2 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2},\quad X_3 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \\ X_4 f &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2}, \\ X_5 f &= \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \frac{\partial f}{\partial x^1} + 2\,x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \\ X_6 f &= \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2\,x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \end{aligned} \tag{2'}$$

având structura

$$\begin{aligned} &(X_1 X_3) = -(X_2 X_4) = -X_1, && (X_1 X_4) = (X_2 X_3) = -X_2, \\ &&& (X_1 X_5) = (X_2 X_6) = 2X_3, \\ &(X_1 X_6) = -(X_2 X_5) = -2X_4, && (X_3 X_5) = (X_4 X_6) = -X_5, \\ &&& (X_3 X_6) = -(X_4 X_5) = -X_6, \\ &(X_1 X_2) = (X_3 X_4) = (X_5 X_6) = 0. \end{aligned} \tag{3'}$$

Într-o lucrare anterioară [3] *) am determinat subgrupurile cu doi, trei și patru parametri ale grupului $G_6(x)$, obținînd

$$G_2' \equiv [X_5, X_3],\ G_2'' \equiv [X_1 + \lambda X_2,\ \eta X_2 - X_3],\ G_2''' \equiv [X_5, X_6],$$
$$G_2^{IV} \equiv [X_3, X_4],$$

*) p. 579. În această lucrare a apărut o greșeală și anume grupurile G_2''' și G_2^{IV} trebuie înlocuite cu grupul $G_2 \equiv [X_1 + \lambda X_2,\ \eta X_2 - X_3]$, $(\eta = 0{,}1)$. De asemenea, schimbînd pe x^1 cu x^2, grupul G_2'' devine identic cu acesta pentru $\lambda = 0$.

$G_2^V \equiv [X_1, X_2]$, $G_2^{VI} \equiv [X_1 \pm X_5, X_2 \mp X_6]$, $G_2^{VII} \equiv [X_1 + \lambda X_5 \pm \pm X_6, X_2 \pm X_5 - \lambda X_6]$,
$G_3' \equiv [X_3 + \lambda X_4, X_5, X_6]$, $G_3'' \equiv [X_4, X_5, X_6]$, $G_3''' \equiv [X_1, X_2, X_4]$,
$G_4' \equiv [X_3, X_4, X_5, X_6]$, $G_4'' \equiv [X_1, X_2, X_3, X_4]$, $(\eta = 0{,}1\,;\ \lambda = \text{const.})$.

Să considerăm o familie $\mathfrak{F}_1$ de suprafețe, depinzînd de un parametru, de ecuație

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha) = 0$$

și fie $G_r(x) \subseteq G_6(x)$ grupul maxim de invarianți al acestei familii. Dacă notăm cu $H_r(\alpha)$ grupul atașat grupului $G_r(x)$ față de familia $\mathfrak{F}_1$, aceasta admite măsură dacă grupul $H_r(\alpha)$ sau un subgrup al lui este măsurabil.

Grupul $H_r(\alpha)$ fiind un grup într-o variabilă, rezultă că are unul, doi sau trei parametri și poate fi adus la una din formele :

$$H_1(\alpha) : \alpha' = \alpha + a\,;$$
$$H_2(\alpha) : \alpha' = a\alpha + b\,;$$
$$H_3(\alpha) : \alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}.$$

În cazul în care $r = 1$, să notăm cu $Xf = \xi^i_{(x)} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $(i = 1{,}2{,}3)$, operatorul grupului $G_1(x)$.

Într-o lucrare anterioară am arătat [4] *) că, dacă coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului $G_r(x)$ sînt $\xi^i_h(x)$, iar ale grupului $H_r(\alpha)$ sînt $\eta^k_h(\alpha)$, atunci avem

$$\xi^i_h(x) \frac{\partial F^\lambda(x, \alpha)}{\partial x^i} + \eta^k_h(\alpha) \frac{\partial F^\lambda(x, \alpha)}{\partial \alpha^k} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n\,;$$
$$k = 1, \ldots, q\,;\ h = 1, \ldots, r\,;\ \lambda = 1, \ldots, n - p), \tag{4}$$

unde

$$F^\lambda(x^1, \ldots, x^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^q) = 0$$

sînt ecuațiile familiei $\mathfrak{F}_q$ de varietăți $\mathfrak{V}_p$.

În cazul nostru avem $n = 3$, $q = 1$, $r = 1$, $p = 2$, $\eta(\alpha) = 1$ și sistemul (4) devine

$$\xi^i(x) \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x^i} + \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Sistemul diferențial atașat acestei ecuații este

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \frac{dx^3}{\xi^3(x)} = d\alpha,$$

adică tocmai sistemul diferențial al grupului $G_1(x)$.

*) p. 198.

Deci, dacă ecuațiile finite ale grupului $G_1(x)$ sînt

$$x^i = f^i(x^1, x^2, x^3, a), \qquad (i = 1,2,3),$$

familia $\mathfrak{F}_1$ are ecuația

$$F[f^1(x, \alpha), f^2(x, \alpha), f^3(x, \alpha)] = 0 .$$

Am numit varietăți G_r-echivalente cu o varietate $\mathfrak{V}_p$, varietățile care se obțin din aceasta prin transformări ale grupului G_r, [5] *).

Deci, în cazul nostru, familia $\mathfrak{F}_1$ este familia varietăților G_1-echivalente cu o suprafață arbitrară din spațiul V_3, care nu este suprafață invariantă a grupului $G_1(x)$.

Familia $\mathfrak{F}_1$ este măsurabilă, avînd măsura

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} d\alpha.$$

Să considerăm acum cazul $r = 2$. Operatorii grupului $H_2(\alpha)$ sînt

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad A_2 f = \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Subgrupurile grupului $G_6(x)$ izomorfe cu $H_2(\alpha)$ sînt G_2' și G_2''. În cazul grupului G_2', sistemul (4) devine

$$\begin{cases} \dfrac{(x')^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + 2x^1 \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \\ x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

avînd soluția

$$F\left[x^1 - \alpha \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}, x^2\right].$$

Familia de suprafețe are ecuația

$$F\left[x^1 - \alpha \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}, x^2\right] = 0,$$

sau

$$[x^1 + F(x^2)]\, x^3 - \alpha[(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1] = 0. \qquad (5)$$

În cazul grupului G_2'', sistemul (4) se scrie

$$\begin{cases} x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^1} + \lambda x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \\ \eta x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^2} - x^3 \dfrac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

*) p. 933.

și are soluția

$$F(x^1 - \alpha x^3, \lambda x^1 - x^2 - \eta x^3).$$

Familia de suprafețe are deci ecuația

$$\lambda x^1 - x^2 - \eta x^3 = F(x^1 - \alpha x^3). \tag{6}$$

Grupul $H_2(\alpha)$ admite ca subgrupuri pe $H_1(\alpha)$ și grupul definit de operatorul $\alpha \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$, prin urmare familiile (5) și (6) admit măsurile

$$\mu_1(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} d\alpha \quad \text{și} \quad \mu_2(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Familiile (5) și (6) admit măsuri dar nu sînt măsurabile.

Grupurile G_3', G_3'', G_3''' nu sînt izomorfe cu grupul $H_3(\alpha)$ deci acesta nu poate fi grup atașat al unui grup de invariantă al familiei.

Rezultă

TEOREMA 1. *Familiile cu un parametru de suprafețe dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, care admit măsură, sînt de forma (5), (6); familiile cu un parametru măsurabil sînt familii de suprafețe G_1-echivalente cu o suprafață arbitrară, care nu este varietate invariantă a grupului $G_1(x)$, acesta fiind un subgrup cu un parametru al grupului (2') de mișcări al spațiului.*

În cazul familiilor cu un parametru de curbe, avem

TEOREMA 2. *Familiile cu un parametru de curbe dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, care admit măsură, sînt*

$$(x^1 + k_1)x^3 - \alpha[(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1] = 0, \; x^2 = k_2, \; (k_1, k_2 = \text{const.})$$

și

$$\lambda x^1 - x^2 - \eta x^3 = k_1, \quad x^1 - \alpha x^3 = k_2, \quad (\eta = 0,1),$$

iar familiile cu un parametru măsurabile sînt familii de curbe G_1-echivalente cu o curbă arbitrară care nu este varietate invariantă a grupului $G_1(x)$, acesta fiind un subgrup al grupului (1').

II

Să ne ocupăm de familiile $\mathfrak{F}_2$ cu doi parametri de suprafețe, de ecuație

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha^1, \alpha^2) = 0.$$

Fie $G_r(x) \subseteq G_6(x)$ grupul maxim de invarianță al acestei familii. Pentru ca familia $\mathfrak{F}_2$ să admită măsură, trebuie ca grupul $H_r(\alpha^1, \alpha^2)$, atașat lui $G_r(x)$ față de familie, sau un subgrup al lui să fie măsurabil. Rezultă $2 \leqslant r \leqslant 6$.

Să considerăm mai întîi cazul în care $r = 2$. Grupul $H_2(\alpha^1, \alpha^2)$, fiind un grup în două variabile cu doi parametri, pentru ca $\mathfrak{F}_2$ să admită măsură, trebuie să fie măsurabil.

Am arătat [6] *) că grupurile măsurabile în două variabile cu doi parametri sînt

$$H_2' \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},\ \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}\right], \quad H_2'' \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x^1},\ \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}\right].$$

Grupul $H_2'(\alpha^1, \alpha^2)$ are structura

$$(A_1 A_2) = A_1,$$

deci grupul de invarianță al familiei $\mathfrak{F}_2$ poate fi G_2' sau G_2''.

În cazul grupului G_2' sistemul (4) se scrie

$$\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \frac{\partial F}{\partial x^1} + 2x' \frac{\partial F}{\partial x^3} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$x^3 \frac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

și are soluția

$$F\left[x^1 - \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3},\ x^2,\ \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right].$$

Deci familia de suprafețe are ecuația

$$x^1 x^3 - \alpha^2 [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1] + x^3 F\left[x^2,\ \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right] = 0. \quad (7)$$

În cazul grupului G_2'', sistemul (4) devine

$$x^3 \frac{\partial F}{\partial x^1} + \lambda x^3 \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$\eta x^3 \frac{\partial F}{\partial x^2} - x^3 \frac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0,$$

având soluția

$$F(\lambda x^1 - x^2 - \eta x^3,\ x^1 - \alpha^2 x^3,\ \alpha^1 x^3).$$

Familia de suprafețe are deci ecuația

$$\lambda x^1 - x^2 - \eta x^3 + F(x^1 - \alpha^2 x^3,\ \alpha^1 x^3) = 0. \quad (8)$$

Familiile de suprafețe (7) și (8) sînt măsurabile admițînd măsura

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{d\alpha^1\, d\alpha^2}{(\alpha^1)^2}.$$

*) p. 126.

Grupul H_2'' (α^1, α^2) este abelian, deci grupul de invarianți al familiei are una din formele G_2''', G_2^{IV}, G_2^{V}, G_2^{VI}, G_2^{VII}.

În cazul grupului G_2''', sistemul (4) se scrie

$$\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3}\frac{\partial F}{\partial x^1}+2x^1\frac{\partial F}{\partial x^3}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^1}=0,$$
$$\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3}\frac{\partial F}{\partial x^2}+2x^2\frac{\partial F}{\partial x^3}+\frac{\partial F}{\partial \alpha^2}=0,$$

avînd soluția

$$F\left[x^1-\alpha^1\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3},\ \frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3},\ x^2-\alpha^2\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3}\right].$$

Familia de suprafețe are deci ecuația

$$(x^1)^2+(x^2)^2+1+x^3F\left[x^1-\alpha^1\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3},\ x^2-\right.$$
$$\left.-\alpha^2\frac{(x^1)^2+(x^2)^2+1}{x^3}\right]=0. \tag{9}$$

Analog, în cazul celorlalte grupuri $G_2^{IV},\ldots,G_2^{VII}$, obținem familiile de suprafețe,

$$x^3+e^{\alpha^1}F\left[(x^1)^2+(x^2)^2,\ \frac{x^1\sin\alpha^2+x^2\cos\alpha^2}{x^1\cos\alpha^2-x^1\sin\alpha^2}\right]=0, \tag{10}$$

$$x^1-\alpha^1x^3+F(x^2-\alpha^2x^3,x^2)=0, \tag{11}$$

$$(x^1)^2+(x^2)^2\pm(x^3)^2+1+x^3F\left[x^1\pm\alpha^1\frac{(x^1)^2+(x^2)^2\pm(x^3)^2+1}{x^3},\ x^2\pm\right.$$
$$\left.\pm\alpha^2\frac{(x^1)^2+(x^2)^2\pm(x^3)^2+1}{x^3}\right]=0. \tag{12}$$

Familiile (9), (10), (11), (12) sînt măsurabile, avînd măsura

$$\mu(\mathcal{A})=\int_{\mathcal{A}_\alpha}d\alpha^1d\alpha^2.$$

Dacă $r=3$, grupul maxim de invarianți al familiei $\mathfrak{F}_2$ poate avea una din formele G_3', G_3'', G_3'''.

În lucrarea citată mai sus, [6], am determinat grupurile măsurabile în două variabile. Grupurile în două variabile izomorfe cu grupurile G_3', G_3'', G_3''' sînt nemăsurabile, admițînd cel puțin două măsuri distincte.

Deci familiile $\mathfrak{F}_2$ care admit ca grupuri de invarianță grupuri cu trei parametri, sînt nemăsurabile.

Dacă $r=4$, grupul maxim de invarianță al familiei $\mathfrak{F}_2$ poate avea una din formele G_4', G_4''. Grupurile în două variabile izomorfe cu grupurile G_4', G_4'' sînt nemăsurabile, admițînd cel puțin două măsuri distincte, deci familiile $\mathfrak{F}_2$ care admit ca grupuri de invarianță grupuri cu patru parametri sînt nemăsurabile.

Grupul $G_6(x)$ nu admite nici un subgrup cu cinci parametri.

În cazul $r = 6$, grupul maxim de invarianță al familiei $\mathfrak{F}_2$ este grupul G_6 de mișcări al spațiului V_3.

Am arătat că orice grup în două variabile izomorf cu grupul G_6 poate fi adus să aibă transformările infinitezimale [1] *)

$$A_1 f = [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2] \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + 2\alpha^1 \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_2 f = 2\alpha^1 \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2] \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_3 f = \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_4 f = \alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_5 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad A_6 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}.$$

Acest grup este nemăsurabil, admițînd mai multe măsuri distincte, deci familiile $\mathfrak{F}_2$ care admit grupul G_6 ca grup maxim de invarianță sînt nemăsurabile.

Rezultă

TEOREMA 3. *Familiile măsurabile cu doi parametri de suprafețe, dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, sînt de formele* (7), (8), (9), (10), (11), (12).

În cazul familiilor cu doi parametri de curbe, avem

TEOREMA 4. *Familiile măsurabile cu doi parametri de curbe, dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, sînt*

$$[x^1 + F_1(x^2)]\, x^3 - \alpha^3 [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1] = 0,$$

$$\alpha^1 [(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1] = x^3 F_2(x^2);$$

$$\lambda x^1 - x^2 - \eta\, x^3 + F_1(\alpha^1 x^3) = 0, \quad x^1 = \alpha^2 x^3 + F_2(\alpha^1 x^3);$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1 + x^3 F_1\left[x^2 - \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right] = 0,$$

$$x^1 - \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} = F_2\left[x^2 - \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right];$$

$$x^3 + e^{\alpha^1} F_1[(x^1)^2 + (x^2)^2] = 0, \quad \frac{x^1 \sin \alpha^2 + x^2 \cos \alpha^2}{x^1 \cos \alpha^2 - x^1 \sin \alpha^2} = F_2[(x^1)^2 + (x^2)^2];$$

$$x^1 = \alpha^1 x^3 + F_1(x^3), \; x^2 = \alpha^2 x^3 + F_2(x^3);$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + 1 + x^3 F_1\left[x^2 \pm \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + 1}{x^3}\right] = 0,$$

$$x^1 \pm \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + 1}{x^3} = F_2\left[x^2 \pm \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 \pm (x^3)^2 + 1}{x^3}\right].$$

*) p. 639.

III

Vom determina acum familiile măsurabile $\mathfrak{F}_3$ cu trei parametri de suprafețe. Fie

$$F(x^1, x^2, x^3, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) = 0,$$

ecuația unei astfel de familii și $G_r(x) \subseteq G_6(x)$ grupul ei maxim de invarianță. Pentru ca familia $\mathfrak{F}_3$ să admită măsură, trebuie ca grupul $H_r(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$, atașat lui $G_r(x)$ față de familie, sau un subgrup al lui, să fie măsurabil. Rezultă $3 \leqslant r \leqslant 6$.

Să considerăm mai întîi cazul în care $r = 3$. Dintre grupurile măsurabile în trei variabile, singurul care este izomorf cu unul din grupurile G_3', G_3'', G_3''' este grupul

$$H_2' \equiv \left[(\alpha+1)\,\alpha^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + (a+1)\,\alpha^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + a\,\alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},\ \alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^1},\ \alpha^3 \frac{\partial f}{\partial \alpha^2}\right],$$

care este izomorf cu grupul G_3' cu $\lambda = 0$, [6].

În acest caz sistemul (4) devine

$$x^3 \frac{\partial F}{\partial x^3} + (a+1)\,\alpha^1 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} + (a+1)\,\alpha^2 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + a\,\alpha^3 \frac{\partial F}{\partial \alpha^3} = 0,$$

$$\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \frac{\partial F}{\partial x^1} + 2\,x^1 \frac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha^3 \frac{\partial F}{\partial \alpha^1} = 0,$$

$$\frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3} \frac{\partial F}{\partial x^2} + 2\,x^2 \frac{\partial F}{\partial x^3} + \alpha^3 \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} = 0$$

avînd soluția

$$F\left[\frac{\alpha^3 x^1 \sigma - \alpha^1}{(\alpha^3)^{a+1}},\ \frac{\alpha^3 x^2 \sigma - \alpha^2}{(\alpha^3)^{a+1}},\ \frac{\sigma}{\alpha^3}\right],$$

unde

$$\sigma = \frac{x^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}.$$

Deci familia de suprafețe este

$$F\left[\frac{\alpha^3 x^1 \sigma - \alpha^1}{(\alpha^3)^{a+1}},\ \frac{\alpha^3 x^2 \sigma - \alpha^2}{(\alpha^3)^{a+1}},\ \frac{\sigma}{\alpha^3}\right] = 0, \tag{13}$$

avînd măsura

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{d\alpha^1\, d\alpha^2\, d\alpha^3}{(\alpha^3)^{\frac{3a+2}{a}}}.$$

Dacă $r = 4$, nici unul din grupurile în trei variabile măsurabile nu sînt izomorfe cu grupurile G_4', G_4''. Deci, în acest caz, nu avem familii de suprafețe măsurabile.

În cazul $r = 6$, grupul maxim de invarianță al familiei este grupul $G_6\,(x)$. Am arătat că orice grup cu trei variabile izomorf cu grupul G_6, poate fi adus, prin schimbări de variabile la una din formele [1] *)

$$H_6'(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3): \quad A_1 f = [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + 2\,\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2\,\eta_1\,\alpha^1\alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_2 f = 2\,\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2\,\eta_1\,\alpha^2\alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_3 f = \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \eta_1\,\alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_4 f = \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_5 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad A_6 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \quad (\eta_1 = 0{,}1);$$

$$H_2''(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3): \quad A_1 f = [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2 + \varepsilon(\alpha^3)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + 2\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2\,\alpha^1\alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_2 f = 2\,\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + [-(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + \varepsilon(\alpha^3)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2\,\alpha^2\alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_3 f = \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \alpha^3\frac{\partial f}{\partial \alpha^3}, \quad A_4 f = \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2},$$

$$A_5 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad A_6 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}, \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

$$H_6'''(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3): \quad A_1 f = [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + 2\,\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2(\lambda\,\alpha^1 - \alpha^2)\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_2 f = 2\,\alpha^1\alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - [(\alpha^1)^2 - (\alpha^2)^2]\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + 2(\alpha^1 + \lambda\,\alpha^2)\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_3 f = \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} + \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_4 f = \alpha^2\frac{\partial f}{\partial \alpha^1} - \alpha^1\frac{\partial f}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial f}{\partial \alpha^3},$$

$$A_5 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^1}, \quad A_6 f = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^2}, (\lambda = \text{const.}).$$

*) p. 646.

Dintre acestea numai grupurile H_6' cu $\eta = 1$ și H_6'' sînt măsurabile. În cazul grupului H_6' cu $\eta = 1$, familia de suprafețe are ecuația

$$\left[x^1 + \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right]^2 + \left[x^2 + \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right]^2 + \\ + 1 = k\,\alpha^3 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}, \quad (k = \text{const.}), \tag{14}$$

iar în cazul grupului H_6'',

$$\left[x^1 + \alpha^1 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right]^2 + \left[x^2 + \alpha^2 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right]^2 - \\ - \varepsilon \left[\alpha^3 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right]^2 + 1 = k\,\alpha^3 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}, \tag{15}$$

unde $k = \text{const.}$

În ambele cazuri măsura familiei este

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{\mathrm{d}\,\alpha^1\,\mathrm{d}\,\alpha^2\,\mathrm{d}\,\alpha^3}{(\alpha^3)^3}.$$

Rezultă

TEOREMA 5. *Familiile măsurabile cu trei parametri de suprafețe, dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, sînt de formele* (13), (14), (15).

Ținînd seama că familiile (14) și (15) sînt congruențe de suprafețe, rezultă că familiile de curbe sînt intersecții de suprafețe de tipul (13). Avem deci

TEOREMA 6. *Familiile măsurabile cu trei parametri de curbe, dintr-un spațiu V_3 cu curbura constantă negativă, sînt*

$$\frac{\alpha^3 x^i x^3}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1} = \alpha^i + (\alpha^3)^{a+1} F_i\left[\alpha^3 \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}{x^3}\right], \quad (i = 1,2).$$

Primită la redacție la 10 februarie 1963

СЕМЕЙСТВА ИЗМЕРИМЫХ МНОГООБРАЗИЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ V_3 ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

РЕЗЮМЕ

Исходя из ранее полученных результатов о группе движений пространства V_3 постоянной отрицательной кривизны и о мере семейств многообразий, автор определяет семейства измеримых кривых и поверхностей этого пространства, зависящие от одного, двух и трех параметров.

FAMILLES DE VARIÉTÉS MESURABLES DANS UN ESPACE DE RIEMANN V_3 À COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE

RÉSUMÉ

Partant des résultats obtenus antérieurement au sujet du groupe de mouvements d'un espace V_3 à courbure constante négative, et au sujet de la mesure des familles de variétés, l'auteur détermine les familles de courbes et de surface mesurables de cet espace, dépendant de un, deux et trois paramètres.

BIBLIOGRAFIE

1. M. STOKA, *Über die Bewegungsgruppe eines Riemannschen Raumes V_3 mit konstanter negativer Krümmung*. Rev. math. pures et appl., **VII**, *4* (1962).
2. — *Géométrie intégrale dans un espace E_n*. Revista de Matematicas y Fisica Teoria, **XIV**, (1962).
3. — *Asupra subgrupurilor grupului de mișcări al unui spațiu riemannian V_3 cu curbură constantă negativă*. St. cerc. mat., **XIII**, *4* (1962).
4. — *Famiglie di varietà misurabili in uno spazio E_n*. Rend. di Circ. Mat. di Palermo, *3* (1959).
5. — *Măsura unei mulțimi de varietăți dintr-un spațiu R_n*. Bul. științ. Acad. R.P.R., **VII**, *4* (1955).

ASUPRA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE MATRICIALE A LUI D'ALEMBERT

DE

CONSTANTIN GH. POPA

1. Ecuația funcțională a lui d'Alembert :

$$f(x+y)+f(x-y)=\varphi(y)\cdot f(x), \tag{1}$$

unde $f(x)$, $\varphi(x)$ sînt funcții reale de argument real, care pentru $\varphi(x)=f(x)$ se reduce la ecuația funcțională a lui d'Alembert-Poisson :

$$f(x+y)+f(x-y)=f(y)\,f(x), \tag{2}$$

a fost integrată de S. Kaczmarz în ipoteza că $f(x)$ este o funcție măsurabilă neidentic nulă [1].

Vrem să integrăm această ecuație în altă ipoteză, deoarece calea pe care o vom urma în această integrare o vom folosi și cînd vom trece la ecuațiile matriciale corespunzătoare. De altfel ipoteza pe care o facem impune funcției $\varphi(x)$ numai o condiție locală.

La matrici, am găsit studiată ecuația (2) numai în [2], dar numai pentru matrici de ordinul doi.

PROPOZIȚIA 1. *Dacă funcția* $\varphi(x)$ *este continuă lateral în origine iar* $f(x)$ *este mărginită și neidentic nulă, atunci soluția ecuației* (*1*) *este*

$$f(x)=\alpha\sum_{p=0}^{\infty}a^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\beta\sum_{p=0}^{\infty}a^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!},\qquad \alpha^2+\beta^2>0$$

$$\varphi(x)=2\sum_{p=0}^{\infty}a^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

unde α, β, a sînt constante reale arbitrare.

Demonstrație. În primul rînd observăm că schimbînd în (1) pe y în $-y$, din continuitatea laterală în origine la stînga (dreapta) a funcției

$\varphi(x)$ rezultă și continuitatea la dreapta (la stînga) a acestei funcții, deoarece membrul stîng al acestei ecuații rămîne neschimbat. De altfel se constată fără dificultate că $\varphi(x)$ este o funcție pară dacă $f(x)$ nu este identic nulă. Prin urmare $\varphi(x)$ este continuă în origine în ipoteza făcută.

St. Mazurkiewicz [3], [4] a demonstrat că dacă o funcție $f(x)$ este mărginită pe un interval (a, b) și satisface pentru orice x de pe acest interval condiția :

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)] = 0, \tag{3}$$

atunci $f(x)$ este aproape peste tot continuă pe (a, b).

Din (1), făcînd $y = 0$ și admițînd că $f(x)$ nu este identic nulă, rezultă că $\varphi(0) = 2$. Dacă apoi se scade $2f(x)$ din ambii membri ai acestei egalități și se ține seama de ipoteza făcută că $\varphi(x)$ este continuă în origine, obținem că

$$\lim_{y \to 0} [f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)] = \lim_{y \to 0} [\varphi(y) - 2] \cdot f(x) = 0,$$

oricare ar fi x.

Prin urmare, conform propoziției lui Mazurkiewicz, amintite mai sus, $f(x)$ este aproape peste tot continuă pe întreaga axă reală. Dar se știe [5] că o condiție necesară și suficientă ca o funcție să fie integrabilă Riemann pe un interval, este ca această funcție să fie mărginită și aproape peste tot continuă pe acest interval, condiții care sînt îndeplinite de funcția $f(x)$. Prin urmare $f(x)$ este integrabilă (R) pe orice interval finit.

Din (1), împărțind cu $f(x)$ — unde x este o valoare pentru care $f(x) \neq 0$ — se vede că $\varphi(y)$ este de asemenea o funcție integrabilă (R), fiind suma a două funcții integrabile.

Pe de altă parte, cum $\varphi(0) = 2$ și $\varphi(x)$ este continuă în acest punct prin ipoteză, există un număr $\alpha > 0$, astfel încît $\varphi(x) > 1$, pentru orice $x \in [0, \alpha]$. Conform inegalității precedente avem

$$\int_0^\alpha \varphi(x)\,dx \geqslant \int_0^\alpha dx = \alpha.$$

Acum integrînd egalitatea (1) în raport cu y avem

$$\int_0^\alpha f(x+y)\,dy + \int_0^\alpha f(x-y)\,dy = f(x) \int_0^\alpha \varphi(y)\,dy.$$

Făcînd în stînga egalității în prima integrală substituția $x + y = t$, iar în a doua $x - y = t$, rezultă

$$F(x) = \int_x^{x+\alpha} f(t)\,dt - \int_x^{x-\alpha} f(t)\,dt = f(x) \int_0^\alpha \varphi(y)\,dy.$$

Dar se știe că integrala nedefinită este o funcție continuă de limitele sale, după care se vede că $F(x)$ este o funcție continuă în orice punct x. Cum

$$\int_0^\alpha \varphi(y)\,dy \neq 0,$$

rezultă din egalitatea mai sus că și $f(x)$ este continuă oricare ar fi x.

Pe de altă parte, o integrală nedefinită este derivabilă în raport cu limitele sale variabile, în orice punct în care funcția integrată este continuă. Cum $f(x)$ am văzut că este continuă pe întreaga axă reală, rezultă că $F(x)$ este derivabilă de asemenea pe întreaga axă. De aici, în baza aceleiași egalități, se deduce că și $f(x)$ este derivabilă oricare ar fi x.

În sfîrșit, fixînd un x pentru care $f(x) \neq 0$, din (1) se vede că și $\varphi(y)$ este derivabilă oricare ar fi y, $\varphi(y)$ fiind o sumă de două funcții derivabile.

Dacă ultima egalitate se derivează în raport cu x se obține

$$f(x+\alpha)-f(x-\alpha)=f'(x)\int_0^\alpha \varphi(y)\,dy.$$

Cum membrul stîng al acestei egalități este o funcție derivabilă, rezultă că $f'(x)$ este derivabilă și așa mai departe. Se vede deci că $f(x)$ este derivabilă indefinit. Din egalitatea de mai sus se vede că $f'(x)$ este mărginită, deoarece membrul stîng este o diferență de două funcții mărginite, după care rezultă că derivatele succesive de orice ordin sînt mărginite. În concluzie, $f(x)$ se poate dezvolta în serie Taylor, iar suma acestei serii va fi $f(x)$ pe intervalul de convergență al acesteia.

Acum, din (1), fixînd un x pentru care $f(x) \neq 0$, se vede că $\varphi(y)$ are derivate de orice ordin, fiind suma a două funcții care au această proprietate. De asemenea, $\varphi(x)$ este mărginită împreună cu derivatele sale de orice ordin pe întreaga axă reală, pentru aceleași motive ca mai sus. Rezultă deci că și $\varphi(x)$ se poate dezvolta în serie Taylor.

Dacă se derivează relația (1) de două ori în raport cu y și facem apoi $y = 0$ se obține

$$f''(x) = a\,f(x), \qquad a = \frac{\varphi''(0)}{2}. \tag{4}$$

Din (4) rezultă prin inducție :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} a^p f(x), & n = 2p, \\ a^p f'(x), & n = 2p+1. \end{cases} \tag{5}$$

Dacă punem $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$, rezultă că

$$f(x)=\alpha\sum_{p=0}^{\infty} a^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \beta\sum_{p=0}^{\infty} a^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}, \tag{6}$$

unde este evident că seria de puteri din dreapta egalității are raza de convergență $R = \infty$.

Soluția (6) se poate exprima sub formă finită astfel:

$$\left.\begin{array}{ll} a) \text{ dacă } a = 0 & \text{avem } f(x) = \alpha + \beta x; \\ b) \text{ dacă } a > 0 \text{ punînd } a = b^2 & \text{avem } f(x) = \alpha \operatorname{ch} bx + \lambda \operatorname{sh} bx, \\ c) \text{ dacă } a < 0 \text{ punînd } a = -b^2 & \text{avem } f(x) = \alpha \cos bx + \lambda \sin bx, \end{array}\right\} \quad (7)$$

unde $\lambda = \frac{\beta}{b}$, α, b, λ fiind numere reale oarecare, $b \neq 0$ și $\alpha^2 + \lambda^2 > 0$, deoarece am făcut ipoteza că $f(x)$ nu este identic nulă.

Evident, soluțiile (7) se puteau obține direct integrînd ecuația diferențială (4). Am preferat să dăm soluția sub forma (6), deoarece sub această formă o vom întîlni la punctele următoare cînd vom trece la funcții matriciale.

Pentru a determina funcția $\varphi(x)$, facem în (1) $x = 0$ și înlocuim apoi pe $f(x)$ cu valoarea (6). Obținem

$$2\alpha \sum_{p=0}^{\infty} a^p \frac{y^{2p}}{(2p)!} = \varphi(y)\,\alpha,$$

de unde, dacă $\alpha \neq 0$, avem

$$\varphi(x) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} a^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}, \quad (8)$$

care conduce la:

$$\left.\begin{array}{ll} a) \text{ dacă } a = 0 & \text{avem } \varphi(x) = 2 \\ b) \text{ dacă } a > 0 & \text{avem } \varphi(x) = 2 \operatorname{ch} bx \\ c) \text{ dacă } a < 0 & \text{avem } \varphi(x) = 2 \cos bx \end{array}\right\} \quad (9)$$

Dacă $\alpha = 0$, atunci folosind relațiile (7) pe care le înlocuim în (1) și ținînd seama de faptul că $\beta \neq 0$, deoarece $f(x)$ am admis că nu este identic nulă, se obține pentru $\varphi(x)$ tot valorile (9).

2. Să considerăm acum ecuația

$$A(x + y) + A(x - y) = A(x)\ A(y), \quad (10)$$

unde $A(x) = (a_{ij}(x))$ sînt matrici pătratice, ale căror elemente sînt funcții $a_{ij}(x)$, reale definite pe întreaga axă reală.

Făcînd în (10) $x = y = 0$, se vede că $U = \frac{1}{2} A(0)$ este o matrice idempotentă. Făcînd în aceeași ecuație $y = 0$, se obține că

$$A(x) = A(x)\ U, \quad (11)$$

care arată că U are efect nul la dreapta față de $A(x)$, oricare ar fi x.

Dar U fiind idempotentă, există o matrice T nesingulară (cu elemente reale) astfel încît matricea:

$$\bar{U} = T \cup T^{-1}$$

să fie de forma

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} E_{pp} & 0_{p,\,n-p} \\ 0_{n-p,\,p} & 0_{n-p,\,n-p} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

unde E_{pp} este matricea unitate de rang p (unde p este rangul matricii U), iar cu zero am notat matricile nule ale căror ordine le-am specificat prin indicii inferiori respectivi. Dar este evident că dacă $A(x)$ este o soluție a ecuației (10), atunci și

$$\bar{A}(x) = TA(x)\,T^{-1}, \tag{13}$$

este o soluție a aceleiași ecuații. Dacă descompunem pe $\bar{A}(x)$ în blocuri ca și pe $\frac{1}{2}\bar{A}(0) = \bar{U}$, adică

$$\bar{A}(x) = \begin{pmatrix} A_{pp}(x) & A_{p,\,n-p}(x) \\ A_{n-p,\,p}(x) & A_{n-p,\,n-p}(x) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

atunci din relația (11) avem

$$\begin{pmatrix} A_{pp}(x) & A_{p,\,n-p}(x) \\ A_{n-p,\,p}(x) & A_{n-p,\,n-p}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{pp} & 0_{p,\,n-p} \\ 0_{n-p,\,p} & 0_{n-p,\,n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{pp}(x) & 0_{p,\,n-p} \\ A_{n-p,\,p}(x) & 0_{n-p,\,n-p} \end{pmatrix},$$

care conduce la:

$$A_{p,\,n-p}(x) = 0, \quad A_{n-p,n-p}(x) = 0.$$

Deoarece $\frac{1}{2}A(0) = U$, rezultă că mai avem

$$A_{pp}(0) = 2E_{pp}, \qquad A_{n-p,\,p}(0) = 0_{n-0,\,p}. \tag{15}$$

Punînd condiția ca (14) să verifice ecuația (10), rezultă:

$$A_{pp}(x+y) + A_{pp}(x-y) = A_{pp}(x)\,A_{pp}(y), \tag{16}$$

$$A_{n-p,\,p}(x+y) + A_{n-p,\,p}(x-y) = A_{n-p,\,p}(x)\,A_{pp}(y), \tag{17}$$

care sînt ecuații de tipul (1) și respectiv (2). Observăm că în (16) $A_{pp}(x)$ sînt matrici pătratice, în timp ce $A_{n-p,\,p}(x)$ din (17) sînt în general matrici dreptunghiulare.

Dacă facem în (16) și (17) $x = 0$, ținînd seama de (15) avem:

$$A_{pp}(x) = A_{pp}(-x), \; A_{n-p,\,p}(x) = -A_{n-p,\,p}(-x), \tag{18}$$

care arată că $A_{pp}(x)$ este o funcție matricială pară, iar $A_{n-p,p}(x)$ o funcție matricială impară.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă $A_{pp}(x)$ este mărginită oricare ar fi x, continuă lateral în origine și verifică ecuația funcțională (16) iar $A_{pp}(0) = 2E_{pp}$, atunci*

$$A_{pp}(x) = 2\left[E_{pp} + A\frac{x^2}{2!} + \ldots + A^q\frac{x^{2q}}{(2q)!} + \ldots\right],$$

unde A este o matrice pătratică oarecare de ordin p.

Demonstrație. Deoarece $A_{pp}(x)$ este o funcție pară (18), din continuitatea laterală în origine rezultă că este continuă în acest punct. Fiind continuă în origine și nesingulară, există o vecinătate a acestui punct în care $A_{pp}(x)$ este nesingulară. Prin urmare, ținînd seama de (16), avem

$$\lim_{y\to 0}[A_{pp}(x+y)+A_{pp}(x-y)-2A_{pp}(x)]=\lim_{y\to 0}A_{pp}(x)\,[A_{pp}(y)-2E_{pp}]=0.$$

După [3], [4] rezultă că $A_{pp}(x)$ este aproape peste tot continuă. Fiind mărginită și aproape peste tot continuă, este integrabilă (R), după care din (16) avem

$$\int_0^\alpha A_{pp}(x+y)\,dy+\int_0^\alpha A_{pp}(x-y)\,dy = A_{pp}(x)\int_0^\alpha A_{pp}(y)\,dy.$$

Făcînd aceleași substituții ca mai înainte se obține

$$\int_x^{x+\alpha} A(t)\,dt-\int_x^{x-\alpha} A(t)\,dt = A_{pp}(x)\int_0^\alpha A_{pp}(y)\,dy.$$

Cum $A_{pp}(x)$ este continuă și nesingulară în origine, dacă α este suficient de mic, atunci $\int_0^\alpha A_{pp}(y)\,dy$ este de asemenea nesingulară. Pe de altă parte, membrul stîng al egalității este o funcție continuă de x, după care rezultă că $A_{pp}(x)$ este o funcție continuă de x. Dar dacă $A_{pp}(x)$ este continuă, atunci integralele din stînga egalității sînt derivabile, în raport cu limitele lor care depind de x ,după care deducem că $A_{pp}(x)$ este derivabilă oricare ar fi x. Derivînd ultima egalitate de mai sus obținem :

$$A(x+\alpha)-A(x-\alpha) = A'_{pp}(x)\cdot\int_0^\alpha A_{pp}(y)\,dy. \tag{19}$$

Cum membrul stîng al acestei egalități este derivabil, rezultă că $A_{pp}(x)$ are derivată de ordinul al doilea ș.a.m.d. Deci $A_{pp}(x)$ este derivabilă indefinit. Pentru a determina pe $A_{pp}(x)$ vom stabili treptat cîteva relații. În primul rînd dacă în (16) schimbăm pe x cu y și ținem seama de faptul că $A_{pp}(x)$ este pară, atunci primul membru al acestei egalități își păstrează valoarea, după care avem :

$$A_{pp}(x)\,A_{pp}(y) = A_{pp}(y)\;A_{pp}(x), \tag{20}$$

care arată că matricile $A_{pp}(x)$ sînt două cîte două permutabile. Derivînd (16) în raport cu x și apoi cu y se obține:

$$A'_{pp}(x+y) + A'_{pp}(x-y) = A_{pp}(y)\,A'_{pp}(x),$$
$$A'_{pp}(x+y) - A'_{pp}(x-y) = A'_{pp}(y)\,A_{pp}(x).$$

Făcînd în ultima egalitate $x = 0$ și ținînd seama de faptul că $A_{pp}(0) = 2E_{pp}$, se obține $A'_{pp}(y) = -A'_{pp}(-y)$, după care făcînd în prima egalitate $y = 0$, se obține că $A'_{pp}(0) = 0$.

Apoi dacă se derivează (16) de două ori în raport cu x și apoi de două ori în raport cu y se obține că:

$$A''_{pp}(y)\;A_{pp}(x) = A_{pp}(y)\,A''_{pp}(x),$$

în care făcînd $x = 0$, rezultă că

$$A''_{pp}(y) = A_{pp}(y)\,\frac{A''_{pp}(0)}{2}. \tag{21}$$

Dacă punem $A = \dfrac{A''_{pp}(0)}{2}$, din (21) se obține prin inducție:

$$A^{(n)}_{pp}(x) = \begin{cases} A'_{pp}(x)\,A^q, & n = 2q+1, \\ A_{pp}(x)\,A^q, & n = 2q. \end{cases} \tag{22}$$

Din (19) se vede că $A'_{pp}(x)$ este mărginită o dată cu $A_{pp}(x)$, după care din (22) rezultă că $A^{(n)}(x)$ este mărginită în orice punct x, dacă $A_{pp}(x)$ este mărginită.

Prin urmare dacă dezvoltăm pe $A_{pp}(x)$ în serie Taylor în origine, suma acestei serii este chiar $A_{pi}(x)$. Dar din (22) făcînd $x = 0$, rezultă:

$$A^{(n)}_{pp}(0) = \begin{cases} 0_{pp}, & n = 2q+1, \\ 2A^q, & n = 2q. \end{cases} \tag{23}$$

Deci avem

$$A_{pp}(x) = 2\left[E_{pp} + \frac{A}{2!}x^2 + \frac{A^2}{4!}x^4 + \dots\right]. \tag{24}$$

Observăm că în cazul particular cînd $A(x) = A_{pp}(x)$ sînt matrici de ordinul întîi, obținem soluțiile (6) unde trebuie să luăm $\varphi(x) = f(x)$. Într-adevăr, pentru $A = 0$ seria de mai sus dă $A(x) = 2$. Dacă $A < 0$, atunci punînd $A = -B^2$ obținem:

$$A(x) = 2\sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} = 2\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q B^{2q}\frac{x^{2q}}{(2q)!} = 2\cos Bx.$$

Dacă $A > 0$ făcînd în această serie $A = +B^2$ se obține

$$A(x) = 2\sum_{q=0}^{\infty} B^{2q}\frac{x^{2q}}{(2q)!} = 2\cos hBx = e^{Bx} + e^{-Bx}.$$

Acum putem trece la integrarea ecuației (17).

PROPOZIȚIA 3. *Dacă $A_{pp}(x)$ este o funcție matricială de variabilă reală, mărginită pe întreaga axă reală, continuă laterală în origine unde ia valoarea $2E_{pp}$, satisface ecuația funcțională (16), iar împreună cu funcția matricială de variabilă reală $A_{n-p,p}(x)$, care este mărginită pe întreaga axă reală, verifică ecuația (17), ultima avînd în $x = 0$ valoarea $0_{n-p,p}$, atunci*

$$A_{pp}(x) = 2\sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!}, \quad A_{n-p,p}(x) = 2B\sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!},$$

unde A este o matrice pătratică de ordinul p arbitrară, iar B o matrice arbitrară cu dimensiunile $(n-p)\,x\,p$.

Demonstrație. Prima parte a propoziției de mai sus exprimă tocmai conținutul propoziției 2. Urmează deci să ne ocupăm numai de partea a doua a acestei propoziții.

Din (17) scăzînd din ambii membri $2A_{n-p,p}(x)$ și ținînd seama de faptul că $A_{pp}(y)$ este continuă în origine unde are valoarea $2E_{pp}$, deducem :

$$\lim_{y\to 0}\,[A_{n-p,p}(x+y) + A_{n-p,p}(x-y) - 2A_{n-p,p}(x)] =$$
$$= \lim_{y\to 0} A_{n-p,p}(x)\cdot[A_{pp}(y) - 2E_{pp}] = 0_{n-p,p}.$$

Conform relației (3), rezultă că $A_{n-p,p}(x)$ este aproape peste tot continuă, după care se vede că $A_{n-p,p}(x)$ este integrabilă. Atunci (17) se poate integra în raport cu y pe segmentul $[0, \alpha]$:

$$\int_0^{\alpha} A_{n-p,p}(x+y)\,dy + \int_0^{\alpha} A_{n-p,p}(x-y)\,dy = A_{n-p,p}(x)\int_0^{\alpha} A_{pp}(y)\,dy.$$

Dacă α este suficient de mic, atunci cum $A_{pp}(y)$ este continuă și nesingulară în origine, rezultă că și $\int_0^{\alpha} A_{pp}(y)\,dy$ este nesingulară. Ținînd seama de aceasta și făcînd în integralele din partea stîngă a egalității precedente substituțiile $x + y = t$, respectiv $x - y = t$, se obține

$$\int_x^{x+\alpha} A_{n-p,p}(t)\,dt - \int_x^{x-\alpha} A_{n-p,p}(t)\,dt = A_{n-p,p}(x)\int_0^{\alpha} A_{pp}(y)\,dy.$$

Cum membrul stîng al acestei egalități este o funcție continuă, deoarece o integrală nedefinită este o funcție continuă de limitele sale, se vede din această egalitate că $A_{n-p,p}(x)$ este continuă oricare ar fi x. Atunci integralele din stînga egalității sînt derivabile în raport cu limitele sale în orice punct x, după care rezultă că $A_{n-p,p}(x)$ este derivabilă oricare ar fi x. Prin derivare se obține

$$A_{n-p,p}(x+\alpha) - A_{n-p,p}(x-\alpha) = A'_{n-p,p}(x)\int_0^{\alpha} A_{pp}(y)\,dy,$$

de unde se vede că $A_{n-p,p}(x)$ se poate deriva indefinit. Tot din această egalitate se vede că $A'_{n-p,p}(x)$ este o funcție mărginită o dată cu $A_{n-p,p}(x)$, după care rezultă că în general $A^{(q)}_{n-p,p}(x)$ este mărginită pe întreaga axă reală.

Se vede deci că $A_{n-p,p}(x)$ se poate dezvolta în origine în serie Taylor, iar suma acesteia este chiar această funcție.

Dacă se derivează (17) în raport cu x și y, se obține :

$$A'_{n-p,p}(x+y) + A'_{n-p,p}(x-y) = A'_{n-p,p}(x)\,A_{pp}(y),$$
$$A'_{n-p,p}(x+y) - A'_{n-p,p}(x-y) = A_{n-p,p}(x)\,A'_{pp}(y).$$

Dacă în a doua relație se face $x = 0$ și se ține seama de faptul că $A_{n-p,p}(0) = 0$ (vezi (15)),

se vede că

$$A'_{n-p,p}(y) = A'_{n-p,p}{}'(-y),$$

care arată că această funcție matricială este pară. Acum dacă ținem seama de acest rezultat și facem în prima relație $x = 0$, obținem că :

$$A'_{n-p,p}(x) = BA_{pp}{}'(x), \quad B = \frac{1}{2}A'_{n-p,p}(0) \tag{25}$$

după care rezultă că :

$$A^{(q)}_{n-p,p}(x) = BA^{(q-1)}_{pq}(x). \tag{26}$$

Deci, ținînd seama de (23), se obține

$$A_{n-p,p}(x) = 2B\left[\frac{Ex}{1!} + \frac{Ax^3}{3!} + \frac{A^2x^5}{5!} + \ldots + \frac{A^q x^{2q}+1}{(2q+1)!} + \ldots\right], \tag{27}$$

unde A are semnificația de la punctul precedent.

Același rezultat se poate obține direct din (25), unde după înlocuirea lui $A_{pp}(x)$ cu valoarea sa dată de (24) se poate integra termen cu termen, ținînd seama și de faptul că

$$A_{n-p,p}(0) = 0_{n-p,p}.$$

Acum putem să dăm soluția ecuației (10).

PROPOZIȚIA 4. *Dacă $A(x)$ este o funcție matricială de variabilă reală, care verifică ecuația (10), este mărginită pe întreaga axă reală și este continuă lateral în origine, atunci* :

$$A(x) = T\begin{pmatrix} 2\sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} & 0 \\ 2B\sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{28}$$

unde A este o matrice pătratică oarecare, de ordin p, B o matrice oarecare de ordin $(n-p)\times p$, T o matrice pătratică nesingulară oarecare de ordin n, iar 0 sînt matrici nule.

Demonstrația este evidentă după propozițiile anterioare. Într-adevăr, în condițiile propoziției 4, rezultă că sînt îndeplinite condițiile din propozițiile 2 și 3, după care rezultă (24) și (27), care conduc la:

$$\bar{A}(x)=\begin{pmatrix} 2\sum_{q=0}^{\infty}A^q\frac{x^{2q}}{(2q)!} & 0 \\ 2B\sum_{q=0}^{\infty}A^q\frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} & 0 \end{pmatrix}.$$

Din (13) rezultă apoi (28).

3. Să considerăm acum sistemul de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} A(x+y)+A(x-y)&=A(x)A(y)\\ B(x+y)+B(x-y)&=B(x)A(y)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

unde $A(x)$, $B(x)$ sînt funcții matriciale definite pe întreaga axă reală. Din prima ecuație se vede că $A(x)$ sînt matrici pătratice, în timp ce $B(x)$ pot fi și dreptunghiulare. Sistemul (29) coincide cu ecuațiile deja considerate (16) și (17), cu deosebirea că aici nu avem neapărat $A(0)=2E$ și $B(0)=0$.

În cazul particular cînd $B(x)$ și $A(x)$ sînt funcții reale, atunci din a doua ecuație (29) se arată imediat că dacă $B(x)$ nu este identic nulă, atunci $A(x)$ verifică prima dintre ecuațiile acestui sistem. La funcții matriciale aceasta nu are loc cu necesitate.

Într-adevăr, dacă în a doua ecuație (29) în loc de y punem $y+z$ și apoi $y-z$ și adunăm egalitățile obținute, ținînd seama de această ecuație se obține:

$$B(x)\,[A(y)\,A(z)]=B(x)\,[A(y+z)+A(y-z)], \tag{30}$$

oricare ar fi x, y, z. În cazul funcțiilor matriciale este însă evident că nu se poate în general „simplifica" cu factorul $B(x)$, care după cum am văzut poate fi chiar o matrice dreptunghiulară, nici măcar neapărat pătratică. La funcții reale, dacă $B(x)$ nu este identic nulă, se obține prima din ecuațiile (29), simplificînd în (30) cu $B(x)$.

Sînt desigur cazuri cînd se poate simplifica cu factorul $B(x)$ în egalitatea de mai sus, de exemplu cazul cînd $B(x)$ este o matrice pătratică nesingulară cel puțin pentru o valoare a lui x.

Nu este însă necesară o condiție chiar atît de restrictivă. R. Penrose a demonstrat în [6] că oricare ar fi matricea dreptunghiulară A de dimensiuni $n\times p$, aceasta are o inversă $A^{\perp}$ de dimensiuni $p\times n$; astfel încît produsele

$$A^{\perp}A=U,\qquad AA^{\perp}=V$$

sînt matrici pătratice idempotente, toate avînd același rang cu A.

Prin urmare, dacă $B(x)$ are dimensiunile nxp, unde p este ordinul matricii $A(x)$, înmulțind egalitatea (30) cu $B^{\perp}(x)$ se obține

$$U_p(x)\,[A(y)\,A(z)] = U_p(x)\,[A(y+z) + A(y-z)].$$

Atunci dacă pentru un x, $B_{n,p}(x)$ are rangul p, rezultă că $U_p(x)$ este nesingulară și deci se poate simplifica cu această matrice. Rezultă astfel prima din ecuațiile (29) ca o consecință a celei de-a doua ecuații a acestui sistem.

Integrarea sistemului (23) se poate face în condițiile propozițiilor anterioare și pe calea urmată la punctul precedent.

PROPOZIȚIA 5. *Dacă $A(x)$, $B(x)$ sînt funcții matriciale de variabilă reală, care verifică sistemul (29), sînt mărginite pe întreaga axă reală, iar $A(x)$ este continuă lateral în origine, atunci $A(x)$ are valoarea (28) iar $B(x)$ are valoarea :*

$$B(x) = \begin{pmatrix} B_1 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} + C_1 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} & 0 \\ B_2 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} + C_2 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} & 0 \end{pmatrix} T^{-1}, \qquad (31)$$

unde A este o matrice pătratică oarecare, B_1, B_2, C_1, C_2 matrici dreptunghiulare oarecare (supuse la condiții numai în ce privește ordinele lor, care trebuie să fie astfel ca operațiile și descompunerile în celule să se poată efectua), iar T o matrice pătratică oarecare, de același ordin cu $A(x)$.

Demonstrație. După propoziția 4, rezultă că $A(x)$ are valoarea (28). Rămîne deci să aflăm numai pe $B(x)$.

Înmulțind prima ecuație a sistemului (29) la stînga cu T^{-1} și la dreapta cu T, iar a doua ecuație la dreapta cu T și notînd

$$\bar{A}(x) = T^{-1} A(x)\, T = \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ A_2(x) & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } \begin{aligned} A_1(x) &= 2 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} \\ A_2(x) &= 2B \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \end{aligned}$$

$$\bar{B}(x) = B(x)\, T = \begin{pmatrix} B_1(x) & B_3(x) \\ B_2(x) & B_4(x) \end{pmatrix},$$

unde $B(x)$ a fost descompus în celule în același mod ca și $A(x)$, se vede că aceste funcții matriciale verifică și ele un sistem de tipul (29) :

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}(x+y) + \bar{A}(x-y) &= \bar{A}(x)\,\bar{A}(y), \\ \bar{B}(x+y) + \bar{B}(x-y) &= \bar{B}(x)\,\bar{A}(y). \end{aligned}\right\} \qquad (29')$$

Făcînd în a doua ecuație (29′) $y = 0$ și ținînd seama de faptul că $A_1(0) = 2E$, $A_2(0) = 0$, rezultă că

$$\overline{B}(x) = \overline{B}(x) \begin{pmatrix} E & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}. \tag{30′}$$

Înlocuind cu valoarea de mai sus pe $\overline{B}(x)$, se obține din această egalitate că $B_3(x) = 0$, $B_4(x) = 0$. Acum înlocuind în a doua ecuație (29′) pe $A(x)$ și $B(x)$ cu valorile lor, rezultă sistemul:

$$\left.\begin{aligned} B_1(x+y) + B_1(x-y) &= B_1(x)\, A_1(y), \\ B_2(x+y) + B_2(x-y) &= B_2(x)\, A_1(y). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Dar ecuațiile (32) sînt ambele de tipul (17), cu deosebirea că aici $B_1(x)$ și $B_2(x)$ nu se anulează neapărat în origine.

Procedînd exact ca la integrarea ecuației (17) se arată că în ipotezele făcute, $B_i(x)$ sînt derivabile indefinit și au derivate mărginite de orice ordin. Rezultă că aceste funcții matriciale se dezvoltă în serii Taylor ale căror sume sînt funcțiile respective.

Atunci, dacă se derivează ecuațiile (32) de două ori în raport cu y, se obține

$$\begin{aligned} B_1''(x+y) + B_1''(x-y) &= B_1(x)\, A_1''(y), \\ B_2''(x+y) + B_2''(x-y) &= B_2(x)\, A_1''(y). \end{aligned}$$

Dacă facem în aceste ecuații $y = 0$ și ținem seama de faptul că $A_1''(0) = 2A$, obținem:

$$\left.\begin{aligned} B_1''(x) &= B_1(x)\, A, \\ B_2''(x) &= B_2(x)\, A. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Din (33) prin inducție rezultă că avem în general:

$$B_1^{(n)}(x) = \begin{cases} B_1(x)\, A^q, & n = 2q \\ B_1'(x)\, A^q, & n = 2q+1 \end{cases}; \quad B_2^{(n)}(x) = \begin{cases} B_2(x)\, A^q, & n = 2q \\ B_2'(x)\, A^q, & n = 2q+1. \end{cases} \tag{34}$$

Notînd cu $B_1 = B_1(0)$, $C_1 = B_1'(0)$; $B_2 = B_2(0)$, $C_2 = B_2'(0)$, se obțin prin dezvoltare în serie, soluțiile:

$$\left.\begin{aligned} B_1(x) &= B_1 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} + C_1 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \\ B_2(x) &= B_2 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} + C_2 \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Înlocuind valorile (35) se obține soluția (31). c.c.t.d. Din (31) se vede că în cazul cînd $B(x)$ este o funcție scalară, atunci se obține soluția (6).

Observăm din (31) că această soluție se poate pune sub forma:

$$B(x) = B \begin{pmatrix} \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q}}{(2q)!} & 0 \\ 0 & \sum_{q=0}^{\infty} A^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{31'}$$

unde

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Primită la redacție la 20 decembrie 1962.

О МАТРИЧНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДАЛАНБЕРА

РЕЗЮМЕ

В данной работе сначала изучаются функциональные уравнения (1) и (2), которые интегрируются в предположении, что $f(x)$ ограниченна по всей действительной оси и не равна тождественно нулю, а $\varphi(x)$ односторонне непрерывна при $x = 0$, получая известные выражения (6) и (8).

Затем изучается уравнение (10), где $A(x)$ — действительная матричная функция действительного переменного, ограниченная и односторонне непрерывная в начале. Указывается, что в этих предположениях общее решение дается формулой (24).

В последней части работы изучена матричная система (29), которая интегрируется в предположении, что $B(x)$ ограниченна, а $A(x)$ является ограниченной и односторонне непрерывной в начале, и получены значения (28) для $A(x)$ и (31′) для $B(x)$.

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE MATRICIELLE DE D'ALEMBERT

RÉSUMÉ

L'auteur étudie d'abord les équations fonctionelles (1) et (2) qui s'intègrent dans l'hypothèse que $f(x)$ est bornée sur tout l'axe réel et n'est pas identiquement nulle, et $\varphi(x)$ est continue latéralement dans l'origine; on trouve les solutions communes (6) et (8).

On passe ensuite à l'équation (10) où $A(x)$ est une fonction matricielle réelle de variable réelle, bornée et continue latéralement dans l'origine. On montre que dans ces hypothèses la solution générale est également donnée par (24).

Dans la dernière partie on étudie le système matriciel (29) qui est intégré dans l'hypothèse que $B(x)$ est borné, et $A(x)$ borné et continu latéralement dans l'origine, et on trouve les valeurs (28) pour $A(x)$ et (31′) pour $B(x)$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. KACZMARCZ, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x) + f(x+y) = 2\varphi(y)\, f\left(x + \frac{y}{2}\right)$. Fund. Math., **6**, 122–129 (1924).
2. OCT. EM. GHEORGHIU, *Asupra unui sistem de ecuații funcționale care generalizează ecuația funcțională a lui d'Alembert-Poisson*. Com. Acad. R.P.R., **IX**, *9*, 879 (1959).
3. ST. MAZURKIERVICZ, *Sur la dérivée première généralisée*. Prace mat. fiz., **XXVII**, 79–85 (1917).
4. — *Sur la relation entre l'existence de la dérivée seconde généralisée et la continuité de la fonction*. Prace mat. fiz., **XXX**, 225–242 (1919).
5. FR. RIESZ et B. ST. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, 1955, p. 23.
6. R. PENROSE, *A Generalized Inverse for Matrices*. Cambridge-Phylosophical Society, **51**, 406–413.

O PROBLEMĂ DINAMICĂ DE STOCARE

DE

B. BEREANU

În practică se întîlnește următoarea problemă : producția sezonieră, omogenă a centrelor A_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ se repartizează lunar centrelor de consum B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$. În lunile în care producția totală depășește necesarul pentru consum, export etc. întreg excedentul este stocat în depozitele D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$; din aceste stocuri se satisfac necesitățile în lunile deficitare, se formează rezervele etc. Considerăm cunoscute : producțiile și consumurile lunare planificate ale centrelor (în general diferite de la lună la lună), cheltuielile unitare de transfer între diferitele centre (presupuse a nu depinde de cantitățile transferate), capacitățile de stocare și stocurile inițiale în D_k. Se cere să se determine planuri lunare de repartiție pentru consum și stocare astfel încît cererile centrelor de consum să fie satisfăcute și să se minimizeze cheltuielile anuale de transfer. În unele cazuri problema se complică prin faptul că depozitele în care se face stocarea pot fi utilizate pentru păstrarea mai multor produse (cazul antrepozitelor frigorifere polivalente, de exemplu *)). De asemenea uneori intervin elemente aleatorii cum sînt necesitățile pentru export. Dacă cheltuielile directe**) de antrepozitare nu sînt aceleași în toate centrele D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ prezintă interes să se țină seama și de aceste cheltuieli în funcția criteriu care se minimizează.

§ 1. CAZUL UNUI SINGUR PRODUS

1.1. Introducem următoarele notații :

a_i^n $(1 \leqslant i \leqslant m\,;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$ producția centrului A_i în etapa n ;
b_j^n $(1 \leqslant j \leqslant p\,;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$ consumul centrului B_j în etapa n ;

*) E. Trattner mi-a atras atenția asupra problemei utilizării raționale a unui sistem de antrepozite frigorifere pentru păstrarea alimentelor.

**) Cheltuieli proporționale cu cantitatea antrepozitată.

$\mathbf{d}(d_k) \in E^r$, vectorul capacităților maxime de depozitare; d_k este capacitatea maximă de depozitare în D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$;

$\mathbf{x}(x_k) \in E^r$, vectorul stocurilor inițiale; x_k este stocul inițial în D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$;

$\| \mathbf{u} \| = \sum_{k=1}^{r} u_k$, unde $\mathbf{u}$ este un vector cu componente nenegative din E^r;

$s_n(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \| + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_i^\nu - \sum_{j=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} b_j^\nu$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$, stocul total la sfîrșitul etapei a n-a dacă stocul inițial a fost $\mathbf{x}$. (1.1.1)

Prin analogie,

$s_0(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|$, stocul inițial total;

$\mathcal{C}(c_{ij})$ matricea $(m + r) \times (p + r)$ a costurilor de transfer între A_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$.

Depozitele D_k figurează atît ca expeditori, $m + 1 \leqslant i \leqslant m + r$, cît și ca destinatari, $p + 1 \leqslant j \leqslant p + r$. Cheltuielile de transfer cuprind cheltuielile de transport și alte cheltuieli proporționale cu cantitatea transferată.

$\mathbf{x}$ trebuie să satisfacă următoarele condiții impuse de interpretarea economică a modelului:

$$0 \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{d} \tag{1.1.2}$$

$$0 \leqslant s_n(\mathbf{x}) \leqslant \| \mathbf{d} \|, \qquad (1 \leqslant n \leqslant N). \tag{1.1.3}$$

(În (1.1.2) 0 este vectorul din E^r cu toate componentele nule).

Notăm cu S_1 mulțimea vectorilor care satisfac (1.1.2), (1.1.3).

Observăm că S_1 este o mulțime convexă.

Se verifică că o condiție necesară și suficientă ca S_1 să nu fie vidă este

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} a_i^\nu - \sum_{j=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{n} {}^{\nu}_{j} \right| \leqslant \| \mathbf{d} \|, \qquad (1 \leqslant n \leqslant N). \tag{1.1.4}$$

Vom presupune că datele problemei verifică (1.1.4).

Dacă $\mathbf{x} \in S_1$ la fiecare etapă n, există planuri de repartiție $\{x_{ij}^n\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m + r;\ 1 \leqslant j \leqslant p + r;\ 1 \leqslant r \leqslant N)$ care satisfac restricțiile problemei de transpo corespunzătoare. Funcția criteriu

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m+r} \sum_{j=1}^{p+r} c_{ij}\, x_{ij}^n \tag{1.1.5}$$

își atinge minimul pe compactul determinat de aceste restricții. Există deci un plan de repartiție

$$\{\bar{x}_{ij}^n\} \quad (1 \leqslant i \leqslant m + r;\ \ 1 \leqslant j \leqslant p + r;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$$

nu neapărat unic, optim: compatibil la fiecare etapă cu restricțiile impuse de producție, consum și capacitatea depozitelor D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ și care minimizează cheltuielile totale date de (1.1.5). Acest minim este o funcție de $\mathbf{x}$.

Notăm

$$\Phi(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\{x_{ij}^n\}} \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m+r} \sum_{j=1}^{p+r} c_{ij}\, x_{ij}^n . \tag{1.1.6}$$

Ca orice problemă de decizie în mai multe etape, această problemă poate fi rezolvată în principiu ca o problemă de programare cu o singură etapă. Vezi de exemplu [1]. Acest mod de abordare prezintă însă serioase dezavantaje. Deoarece numărul restricțiilor și al variabilelor care caracterizează procesul la fiecare etapă se multiplică cu numărul etapelor, se ajunge, în multe cazuri, la probleme practic nerezolvabile folosind chiar un calculator electronic. În afară de aceasta este posibil ca în cursul procesului anumite date ale problemei să se modifice datorită unor cauze neprevăzute și deci soluția optimă calculată pentru întreg procesul să nu mai fie utilizabilă. Abordînd problema cu metodele programării dinamice, dimensiunile problemelor de optimizare care intervin sînt cele corespunzătoare unei singure etape a procesului, iar caracterul recurent al construcției soluției este deosebit de potrivit pentru utilizarea unui calculator electronic. De asemenea, după cum s-a remarcat în [2], metoda programării dinamice, asigură flexibilitatea necesară pentru a face față unor schimbări ale datelor problemei în cursul procesului dacă la o anumită etapă intervin modificări în datele problemei, pentru etapa respectivă; elementele calculate inițial furnizează planul optim pentru restul procesului în noile condiții.

1.2. Observăm că de fapt la fiecare etapă n, pentru a obține un plan optim, este suficient a alege convenabil r parametrii : componentele vectorului stocurilor la sfîrșitul etapei n pe care-l vom nota cu $\mathbf{y}^n(\mathbf{x})$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Într-adevăr, dacă $\mathbf{y}^n(\mathbf{x})$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ este vectorul stocurilor la sfîrșitul etapei n, în cadrul unui plan optim, $\bar{x}_{ij}^n$ $(1 \leqslant i \leqslant m + r;\ 1 \leqslant j \leqslant p + r)$ se obțin rezolvînd problema obișnuită de transporturi

$$[a_1^n, \ldots, a_m^n y_1^{n-1}(\mathbf{x}), \ldots, y_r^{n-1}(\mathbf{x});\ b_1, \ldots, b_p\, y_1^n(\mathbf{x}), \ldots, y_r^n(\mathbf{x});\ \mathcal{C}] \tag{1.2.1}$$

$a_1^n, \ldots, a_m^n, y_1^{n-1}(\mathbf{x}), \ldots, y_r^{n-1}(\mathbf{x})$ sînt „producțiile" centrelor de „producție"; $b_1, \ldots, b_p, y_1^n(\mathbf{x}), \ldots, y_r^n(\mathbf{x})$, „consumurile" iar $\mathcal{C}$ este matricea costurilor. Într-adevăr, dacă $\{\bar{x}_{ij}^n\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m + r;\ 1 \leqslant j \leqslant p + r)$ n-ar fi o soluție optimă a problemei de transporturi (1.2.1), înlocuind $\{\bar{x}_{ij}^n\}$ cu o soluție optimă a acestei probleme, s-ar putea obține un alt plan mai bun.

Deci combinînd metoda programării dinamice în sensul lui Bellman [3] pentru întreg procesul cu metodele programării liniare — pentru a determina alegerea optimă la fiecare etapă — dimensiunile problemelor de optimizare corespunzătoare se reduc considerabil.

Procesul considerat depinde nu numai de stocul inițial $\mathbf{x}$ și numărul N al etapelor ci și de etapa n la care începe. Ca urmare, în relația de recurență care se obține aplicînd principiul optimalității, apar doi indici (etapa la care începe procesul și durata sa). Pentru a evita această situație care îngreunează calculul efectiv și deoarece ne interesează cheltuielile minime corespunzătoare unui proces care începe la etapa 1 și sfîrșește la etapa N, vom defini regresiv funcția $\Phi(\mathbf{x})$. Notăm $f_l(\mathbf{x})$ = cheltuielile

totale dacă procesul începe la etapa l, sfîrșește la etapa N, stocul inițial este $\mathbf{x}$, și se utilizează un plan optim. (Funcția criteriu corespunzătoare se obține din (i.i.5) dacă însumarea, după n, începe de la l) $(1 \leqslant l \leqslant N)$. (i.2.2.)

— S_l $(1 \leqslant l \leqslant N)$, mulțimea vectorilor $\mathbf{x}$ din E^r pentru care $f_l(\mathbf{x})$ există.

Deoarece S_1 nu este vidă, rezultă prin recurență că S_l $(1 \leqslant l \leqslant N)$ nu este vidă. Mulțimile S_l sînt convexe.

Fie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^r$ care verifică

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in S_l, \\ &0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{d}, \\ &\| \mathbf{y} \| = \| \mathbf{x} \| + \sum_{i=1}^{m} a_i^l - \sum_{j=1}^{p} b_j^l. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Notăm $g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = costul minim în problema obișnuită de transporturi :

$$[\, a_1^l, \ldots, a_m^l, x_1, \ldots, x_r;\ b_1^l, \ldots, b_p^l, y_1, \ldots, y_r;\ \mathcal{C}\,] \quad (1 \leqslant l \leqslant N), \tag{1.2.4}$$

unde $\mathbf{x}(x_k)$, $\mathbf{y}(y_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$, verifică relațiile (1.2.3).

TEOREMA 1. *Avem* $\Phi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$, *unde* $f_1(\mathbf{x})$ *se determină prin relațiile* $f_N(\mathbf{x}) = \operatorname{Min}_{\mathbf{y}} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *cînd* $\mathbf{x} \in S_N$ *iar* $\mathbf{y} \in E^r$ *satisface* $0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant d$, $\| \mathbf{y} \| = \| \mathbf{x} \| + \sum_{i=1}^{m} a_i^N - \sum_{j=1}^{p} b_j^N$, (1.2.5)

$$f_l(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\mathbf{y} \in S_{l+1}} [\, g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y}) \,], \quad \mathbf{x} \in S_l (1 \leqslant l \leqslant N - 1). \tag{1.2.6}$$

(Min *indică minimul absolut, ca peste tot în această lucrare*).

Teorema rezultă aplicînd principiul optimalității al lui Bellman [3] și ținînd seama de (1.2.2) și (1.2.4).

Observație. Dacă ne interesează numai $\Phi(\mathbf{x}^\circ)$, cazul unor anumite stocuri inițiale, sau, mai general, $\| \mathbf{x} \| = s_0$ — stocul total inițial este dat, dar nu și repartiția sa între diferitele depozite — rezultă din (1.1.1) că $s_n(\mathbf{x}) = s_n$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$, unde s_n sînt constante care se determină din (i.i.i).

Putem în acest caz înlocui (1.2.5), (1.2.6) cu

$$f_N(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\substack{0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{d} \\ \| \mathbf{y} \| = s_n}} g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (0 \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{d},\ \| \mathbf{x} \| = s_{N-1}), \tag{1.2.5'}$$

$$f_l(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\substack{0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{d} \\ \| \mathbf{y} \| = s_l}} [\, g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y}) \,], \quad \| \mathbf{x} \| = s_{l-1} \underset{0 \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}}{} (1 \leqslant l \leqslant N - 1). \tag{1.2.6'}$$

1.3. La punctele 1.1 și 1.2 nu am ținut seamă de cheltuielile de depozitare. Vom presupune, pentru simplificare, că costul unitar direct*) de

*) Proporțional cu cantitatea depozitată.

depozitare, la depozitul D_k, este c_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ în toate etapele și că modificările intervenite în situația stocurilor în etapa n afectează cheltuielile directe de depozitare de la începutul etapei $(n+1)$. Dacă situația inițială a stocurilor ar rămîne aceeași în decursul celor N etape, costul corespunzător de depozitare ar fi $N\left(\sum_{k=1}^{r} c_k x_k\right) = C(\mathbf{x})$. Dacă în etapa n o unitate din depozitul D_k este expediată la un centru de consum, costurile se reduc cu c_k $(N-n)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$; iar dacă în această etapă în D_k se depozitează suplimentar o unitate, costurile cresc cu c_k $(N-n)$. De asemenea dacă se transferă o unitate din D_k în $D_{k'}$ costurile se modifică cu

$$(c_{k'} - c_k)\,(N-n).$$

Să notăm cu $\mathcal{C}_n$ matricea definită prin:

$$\begin{aligned}
&c_{ij}^n = c_{ij}, && (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant p;\ 1 \leqslant n \leqslant N),\\
&c_{ij}^n = c_{ij} - c_k(N-n), && (i = m+k;\ 1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant j \leqslant p,\ 1 \leqslant n \leqslant N),\\
&c_{ij}^n = c_{ij} + c_k(N-n), && (1 \leqslant i \leqslant m;\ j = p+k;\ 1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant n \leqslant N), \quad (1.3.1)\\
&c_{ij}^n = c_{ij} + (c_{k'} - c_k)(N-n), && (i = m+k;\ j = p+k';\ 1 \leqslant k', k' \leqslant r;\\
& && 1 \leqslant n \leqslant N).
\end{aligned}$$

Dacă $g_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ = costul minim în problema obișnuită de transporturi:

$$[a_1^l, \ldots, a_m^l, x_1, \ldots, x_r;\ b_1^l, \ldots, b_p^l, y_1, \ldots, y_r;\ \mathcal{C}_l]\ (1 \leqslant l \leqslant N) \quad (1.3.2)$$

cînd $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ satisfac (1.2.3) iar

$\Phi^*(\mathbf{x})$ = minimul cheltuielilor de transfer și depozitare, avem:

TEOREMA 2. *Avem* $\Phi^*(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) + f_1^*(\mathbf{x})$, *unde* $f_1^*(\mathbf{x})$ *se determină din*:

$$f_N^*(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\mathbf{y}} g_N^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ cînd } \mathbf{x} \in S_N \text{ și } \mathbf{y} \in E^r \text{ satisface } 0 \leqslant \mathbf{y} \leqslant \mathbf{d},$$

$$\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \sum_{i=1}^{m} a_i^N - \sum_{j=1}^{p} b_j^N;$$

$$f_l^*(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\mathbf{y} \in S_{l+1}} [g_l^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_{l+1}^*(\mathbf{y})], \quad \mathbf{x} \in S_l, \quad (1 \leqslant l \leqslant N-1). \quad (1.3.3)$$

Acest rezultat se obține din teorema 1, observînd că în afară de cheltuielile $C(\mathbf{x})$ care nu depind de planul ales, datele problemei considerate la punctul 1.3 se deosebesc de cele de la punctul 1.1 prin aceea că la etapa n, matricea costurilor $\mathcal{C}(c_{ij})$ este înlocuită cu $\mathcal{C}_n(c_{ij})$ definită de (1.3.1).

Teoremele 1 și 2 permit nu numai calculul minimelor căutate ca funcții de stocul inițial $\mathbf{x}$, ci și determinarea planurilor optime corespunzătoare. Pentru a arăta aceasta vom avea nevoie de un rezultat care nu este lipsit de interes în sine, deoarece corespunde unei probleme practice frecvent întîlnită, pe care o vom numi *problema transportului cu prioritate*.

1.4. Fie A_i, a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ centrele de producție și cantitățile produse dintr-un produs omogen; B_j, b_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ centrele de consum ale aceluiași produs și necesitățile lor de consum. Presupunem că producția totală este mai mică decît necesarul total și că necesitățile primelor l centre trebuie să fie satisfăcute integral. Utilizînd notațiile obișnuite, modelul matematic este următorul:

să se determine

$$x_{ij} \geqslant 0, \qquad (1 \leqslant i \leqslant m;\ \ 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1.4.1}$$

astfel ca

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i, && (1 \leqslant i \leqslant m), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j, && (1 \leqslant j \leqslant l), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &\leqslant b_j, && (l+1 \leqslant j \leqslant n) \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

iar

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\ x_{ij} \tag{1.4.3}$$

să ia valoarea minimă.

Presupunem că

$$\sum_{j=1}^{l} b_j < \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.4.4}$$

(dacă una dintre inegalități este înlocuită prin egalitate, problema de mai sus se reduce la problema obișnuită a transportului).

Vom numi acest model matematic *problema transportului cu prioritate.*

Considerăm următoarea problemă:

să se minimizeze

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y_{ij} + k \sum_{j=1}^{l} y_{m+1,j} \tag{1.4.5}$$

dacă

$$y_{ij} \geqslant 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant m+1;\ \ 1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1.4.6}$$

satisfac

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} &= a_i, && (1 \leqslant i \leqslant m), \\ \sum_{j=1}^{n} y_{m+1,j} &= \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = a_{m+1}, \\ \sum_{i=1}^{m+1} y_{ij} &= b_j, && (1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

În (1.4.5) k este un număr pe care-l putem alege arbitrar de mare.

Se verifică ușor că dacă $\{y_{ij}^*\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ este o soluție optimă a acestei probleme,

$$x_{ij}^* = y_{ij}^*, \qquad (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n) \quad (1.4.8)$$

este o soluție optimă a *problemei transportului cu prioritate*, (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3); dar (1.4.5), (1.4.6), (1.4.7) este o problemă obișnuită de transport cu $(m+1)$ centre de producție și n centre de consum. Producția centrului suplimentar este $\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, iar producțiile și consumurile celorlalte centre sînt aceleași ca în (1.4.2). Costurile c'_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m+1;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ ale acestei probleme de transport satisfac:

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= c_{ij}, && (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant n), \\ c'_{m+1,j} &= k, && (1 \leqslant j \leqslant l), \\ c'_{m+1,j} &= 0, && (l+1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

TEOREMA 3. *Dacă* $\{y_{ij}^*\}$ $(1 \leqslant i \leqslant m+1;\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ *este o soluție a problemei de transport* (1.4.5), (1.4.6), (1.4.7) *atașată* problemei transportului cu prioritate (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3), *o soluție a acesteia din urmă se obține din* (1.4.8).

1.5. Fie X o submulțime convexă în E^m și Y o submulțime convexă în E^n. Produsul cartezian $Z = X \times Y$ definit prin

$$\begin{aligned} Z = \{(z_1, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+n});\ &(z_1, \ldots, z_m) \in X, \\ &(z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}) \in Y\} \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

este o submulțime convexă a spațiului $E^m \times E^n$ [4]. Identificăm acest spațiu cu E^{m+n} și dacă $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in Y$, notăm $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ vectorul $\mathbf{z}$ corespunzător în Z și prin analogie scriem $Z = (X, Y)$.

Vom presupune în continuare că X, Y și deci Z sînt mulțimi închise și mărginite.

Cu notațiile introduse avem:

LEMA 1. *Dacă* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *este o funcție convexă de* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *pe* Z, $f(\mathbf{x})$ *definită de*

$$f(\mathbf{x}) = \operatorname*{Min}_{\mathbf{y} \in Y} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.5.2)$$

este o funcție convexă de $\mathbf{x}$ *pe* X.

Demonstrație. Fie $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2 \in X$ și λ, $\mu \geqslant 0$ satisfăcînd $\lambda + \mu = 1$.

Avem

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) = \operatorname*{Min}_{\mathbf{y} \in Y} L(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2, \mathbf{y}).$$

Putem, evident, înlocui $\mathbf{y}$ cu $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}^1 + \mu \mathbf{y}^2$, unde $\mathbf{y}^1$ și $\mathbf{y}^2$ variază independent pe Y.

Deci

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) = \min_{(\mathbf{y}^1 \in Y, \mathbf{y}^2 \in Y)} L(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2, \lambda \mathbf{y}^1 + \mu \mathbf{y}^2). \tag{1.5.3}$$

$L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fiind convexă în $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, din (1.5.3) urmează

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leqslant \min_{(\mathbf{y}^1 \in Y, \mathbf{y}^2 \in Y)} [\lambda L(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1) + \mu L(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)] =$$

$$= \lambda \min_{\mathbf{y}^1 \in Y} L(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1) + \mu \min_{\mathbf{y}^2 \in Y} L(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2). \tag{1.5.4}$$

Deci

$$f(\lambda \mathbf{x}^1 + \mu \mathbf{x}^2) \leqslant \lambda f(\mathbf{x}^1) + \mu f(\mathbf{x}^2),$$

adică $f(\mathbf{x})$ este convexă pe X.

Un rezultat asemănător se găsește în [3] *).

TEOREMA 4. *Funcțiile* $f_l(\mathbf{x})$ $(1 \leqslant l \leqslant N)$ *definite de* (1.2.5), (1.2.6) *sînt convexe și continue pe* S_l $(1 \leqslant l \leqslant N)$. *În particular,* $\varphi(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$ *este o funcție convexă și continuă pe mulțimea* S_1 *definită de* (1.1.2), (1.1.3).

Demonstrație. a) $f_N(\mathbf{x})$ *este convexă și continuă pe* S_n. Într-adevăr, $f_N(\mathbf{x})$ este minimul funcției criteriu corespunzătoare problemei de transport cu prioritate :

$$[a_1^N, \ldots, a_m^N, x_1, \ldots, x_r; b_1^N, \ldots, b_p^N, c_1, \ldots, c_r; \mathcal{C}]$$

(Centrele ale căror necesități trebuie satisfăcute în întregime sînt centrele de consum B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$.

Din (1.4.7) și lemele 1 și 2 din [5] rezultă convexitatea și continuitatea pe S_N a funcției $f_N(\mathbf{x})$.

b) Presupunem că $f_{l+1}(\mathbf{x})$ este convexă și continuă pe S_{l+1}. Să arătăm că aceasta atrage după sine că $f_l(\mathbf{x})$ este convexă și continuă pe S_l.

Din aceleași considerente ca la punctul *a*), $g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este convexă și continuă în $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pe (S_l, S_{l+1}).

Rezultă că și

$$g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y})$$

este convexă și continuă în $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pe (S_l, S_{l+1}).

Din (1.2.6) și lema 1 urmează că $f_l(\mathbf{x})$ este convexă pe S_l și deci continuă în fiecare punct interior al acestei mulțimi.

Fie $\mathbf{x}^\circ$ un punct frontieră al mulțimii S_l și $\{\mathbf{x}^i\}$ un șir astfel că $\mathbf{x}^i \in S_l$ și

$$\lim_{i \to \infty} \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^\circ.$$

Dacă $\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^i)$ este un vector minimizant în (1.2.6) cînd $\mathbf{x} = \mathbf{x}^i$,

$$\lim_{i \to \infty} f_l(\mathbf{x}^i) = \lim_{i \to \infty} \{g_l(\mathbf{x}^i, \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^i)) + f_{l+1}(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}^i))\} \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\mathbf{y} \in S_{l+1}} \{g_l(\lim_{i \to \infty} \mathbf{x}^i, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y})\} = f_l(\lim_{i \to \infty} \mathbf{x}^i). \tag{1.5.5}$$

*) p. 21.

Avem însă, datorită convexității funcției f_l,

$$\lim_{i\to\infty} f_l(\mathbf{x}^i) \leqslant f_l\left(\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}^i\right). \tag{1.5.6}$$

Din (1.5.5) și (1.5.6) urmează

$$\lim_{i\to\infty} f_l(\mathbf{x}^i) = f_l\left(\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}^i\right).$$

Din *a*) și *b*) rezultă prin recurență teorema 4.

1.6. Din definiția funcției $g_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rezultă că $f_N(\mathbf{x})$ se obține rezolvînd o *problemă de transporturi cu prioritate* :

$$[a_1^N, \ldots, a_m^N\ x_1, \ldots, x_r;\ b^N, \ldots, b^N\ c_1, \ldots, c_r;\ \mathcal{C}].$$

În această problemă centrele cu prioritate în livrare (ale căror necesități trebuie satisfăcute în întregime) sînt B_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$. Din teorema 3 rezultă că $f_N(\mathbf{x})$ este minimul funcției criteriu într-o problemă parametrică de transport în care parametrii „producțiile" centrelor D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, sînt componentele vectorului $\mathbf{x} \in S_N$.

Fie T_N^i și $\varphi_N^i(\mathbf{x})$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ regiunile caracteristice și costurile minime caracteristice în sensul din [6]. Regiunile caracteristice sînt submulțimi convexe ale mulțimii S_N fără puncte interioare comune și a căror reuniune este S_N ; costurile minime caracteristice sînt funcții liniare de x_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$. Atît inegalitățile liniare care definesc T_N^i, cît și $\varphi_N^i(\mathbf{x})$ pot fi determinate prin procedeul propus în [6]. Avem deci

$$f_N(\mathbf{x}) = \varphi_N^i(\mathbf{x}),\ (\mathbf{x} \in T_N^i;\ 1 \leqslant i \leqslant \rho_N), \tag{1.6.1}$$

unde

$$\varphi_N^i(\mathbf{x}) = a_{0,N}^i + \sum_{k=1} a_{k,N}^i x_k,\ (1 \leqslant i \leqslant \rho_N). \tag{1.6.2}$$

Vom spune că $f_N(\mathbf{x})$ este o funcție liniară pe porțiuni.

Stocurile în D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ corespunzătoare soluțiilor caracteristice sînt componentele vectorului $\mathbf{y}^N(\mathbf{x})$ — alegerea optimă într-un proces cu o singură etapă care începe în etapa $(N-1)$ și sfîrșește în etapa N, dacă stocul inițial în acest proces este $\mathbf{x}$.

Pe de altă parte, $g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este minimul funcției criteriu în problema parametrică de transporturi (1.2.4). Parametrii sînt componentele vectorului $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ care satisfac $\mathbf{x} \in S_l$, $\mathbf{y} \in S_{l+1}$.

Din aceleași considerații care au condus la (1.6.1), (1.6.2), rezultă

$$g_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_l^i + \gamma_l^i(\mathbf{x}) + \beta_l^i(\mathbf{y})\ [(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U_i;\ 1 \leqslant i \leqslant \rho_l'\ ]. \tag{1.6.3}$$

În (1.6.3), $\gamma_l^i(\mathbf{x})$, $\beta_l^i(\mathbf{y})$ sînt funcții liniare de componentele vectorului $\mathbf{x}$, respectiv $\mathbf{y}$ iar b_l^i sînt constante ; U_i sînt submulțimi convexe și mărginite din E^{2r} definite prin inegalități liniare care satisfac :

$$\bigcup_{i=1}^{\rho_l'} U_i = (S_l, S_{l+1}). \tag{1.6.4}$$

Pentru calculul efectiv al programului optim nu vom avea de fapt nevoie de determinarea funcțiilor care intervin în (1.6.3).

Să presupunem că am calculat valorile funcției $f_{l+1}(\mathbf{x})$ pentru vectori $\mathbf{x} \in S_{l+1}$ convenabil aleși, potrivit preciziei de calcul necesară.

Să determinăm $f_l(\mathbf{x}^\circ)$, unde $\mathbf{x}^\circ \in S_l$.

Calculăm $g_l(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y})$ pentru $\mathbf{y} \in S_{l+1}$, utilizînd aceeași rețea folosită în calculul lui $f_{l+1}(\mathbf{x})$. Se poate utiliza în acest scop o metodă de post-optimizare [7].

Din (1.2.6) avem

$$f_l(\mathbf{x}^\circ) = \min_{\mathbf{y} \in S_{l+1}} [g_l(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y})]. \tag{1.6.5}$$

Din teorema 4 rezultă că

$$g_l(\mathbf{x}^\circ, \mathbf{y}) + f_{l+1}(\mathbf{y})$$

este o funcție convexă și continuă de $\mathbf{y}$ și deci orice minim relativ al acestei funcții este minim absolut. Aceasta ușurează considerabil determinarea minimului în (1.6.5) și a alegerii optime $\mathbf{y}^l(\mathbf{x}^\circ)$. În acest mod se determină $f_l(\mathbf{x})$ și $\mathbf{y}^l(\mathbf{x})$ pentru $\mathbf{x} \in S_l$, în nodurile unei rețele corespunzătoare.

Presupunem că am calculat

$$\mathbf{y}^1(\mathbf{x}),\ \mathbf{y}^2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ \mathbf{y}^N(\mathbf{x}). \tag{1.6.6}$$

Deoarece stocul final în etapa n este stocul inițial în etapa $(n+1)$, urmează din (1.6.6) că pentru un stoc inițial dat $\mathbf{x}^\circ$ programul optim este

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}^1 &= \mathbf{y}^1(\mathbf{x}^\circ) \\ \bar{\mathbf{y}}^2 &= \mathbf{y}^2(\bar{\mathbf{y}}^1) \\ &\cdots\cdots \\ \bar{\mathbf{y}}^n &= \mathbf{y}^n(\bar{\mathbf{y}}^{n-1}) \\ &\cdots\cdots \\ \bar{\mathbf{y}}^N &= \mathbf{y}^N(\bar{\mathbf{y}}^{N-1}) \end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Observație. După cum se vede, determinarea programului optim necesită foarte multe calcule și deci metoda poate fi aplicată efectiv dacă r, numărul depozitelor, este mic. Dar funcțiile din (1.6.6) o dată determinate, permit calculul cu ajutorul formulelor (1.6.7) a planului optim pentru orice $\mathbf{x} \in S_l$, dacă este necesar, utilizînd interpolare liniară. Aceasta prezintă o deosebită importanță în practică pentru că asigură posibilitatea de a face față unor modificări neprevăzute în cursul îndeplinirii planului.

Într-adevăr, dacă la sfîrșitul etapei $(n-1)$ sîntem obligați, datorită unor asemenea modificări, să alegem $\mathbf{y}^\star \neq \bar{\mathbf{y}}^{n-1}$, avem $\bar{\mathbf{y}}^n = \mathbf{y}^n(\mathbf{y}^\star)$ și formulele (1.6.7) permit determinarea planului optim pentru subprocesul care urmează.

§ 2. GENERALIZĂRI

2.1. O metodă asemănătoare se poate aplica și în cazul depozitelor polivalente, adică a depozitelor în care se pot stoca mai multe produse.

În acest caz fie

a_{il}^n $(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant l \leqslant s;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$, cantitatea produsă de centrul A_i din produsul l în etapa n;

b_{jl}^n $(1 \leqslant j \leqslant p;\ 1 \leqslant l \leqslant s;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$, consumul centrului B_j din produsul l în etapa n;

$\mathbf{d}\,(d_k) \in E^r$, vectorul capacităților maxime de depozitare; $d_k > 0$ este capacitatea maximă de depozitare într-o unitate standard (de exemplu m^3) în D_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$;

f_l $(1 \leqslant l \leqslant s)$, coeficientul de transformare al unei unități din produsul l în unitatea standard aleasă;

$\mathbf{x}\,(x_{lk}) \in E^{rs}$, vectorul stocurilor inițiale; $x_{lk} \geqslant 0$ este stocul inițial din produsul l în depozitul D_k $(1 \leqslant l \leqslant s;\ 1 \leqslant k \leqslant r)$;

g_l $(1 \leqslant l \leqslant s)$, coeficientul de transformare al unei unități din produsul l în unitatea standard utilizată în calcularea cheltuielilor de transfer.

2.2. Problema revine la determinarea numerelor

$$\bar{x}_{ijl}^n \geqslant 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant p;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$$

— cantitatea transferată din centrul i (centru de producție sau stocare) în j (centru de consum sau stocare) din produsul l în etapa n — care minimizează cheltuielile de transfer

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m+r} \sum_{j=1}^{p+r} \sum_{l=1}^{s} g_l\, c_{ij}\, x_{ijl}^n, \tag{2.2.1}$$

variabilele x_{ijl}^n $(1 \leqslant i \leqslant m + r;\ 1 \leqslant j \leqslant p + r;\ 1 \leqslant l \leqslant s;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$ satisfăcînd în fiecare etapă restricțiile impuse de producția și consumul fiecărui produs și capacitățile existente de depozitare *). Aceste restricții nu sînt totdeauna compatibile. Condiția de compatibilitate revine la o relație analogă cu (1.1.4).

Din considerații asemănătoare cu cele de la punctul 1.2 rezultă că la fiecare etapă n este suficient a alege convenabil rs parametrii, pentru a obține un program optim:

$$y_{kl}^n(\mathbf{x}) \quad (1 \leqslant k \leqslant r;\ 1 \leqslant l \leqslant s),$$

stocul din produsul l la sfîrșitul etapei n la depozitul k.

Metoda de rezolvare este asemănătoare cu cea expusă pentru cazul depozitelor în care se stochează un singur produs.

Uneori problema în practică se mai complică prin aceea că depozitarea a două produse anumite în același depozit este incompatibilă.

2.3. Presupunem că consumurile b_j^n $(1 \leqslant j \leqslant p;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$ sau unele dintre ele sînt variabile aleatoare pe un spațiu cu probabilitate (Ω, k, P), care satisfac

$$\delta_{jn} \leqslant b_j^n(\omega) \leqslant \delta'_{jn}, \quad (1 \leqslant j \leqslant p;\ 1 \leqslant n \leqslant N), \tag{2.3.1}$$

*) De exemplu restricțiile privind capacitatea de depozitare sînt:

$$\sum_{i=1}^{m+r} \sum_{l=1}^{s} f_l\, x_{i,p+k,l}^n \leqslant d_k \quad (1 \leqslant n \leqslant N;\ 1 \leqslant k \leqslant r)$$

iar δ_{jn}, δ'_{jn} $(1 \leqslant j \leqslant p\,;\ 1 \leqslant n \leqslant N)$, $\mathbf{x}$ (stocul inițial) verifică :

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_i^{\nu} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n} \delta'_{j\nu} \geqslant 0, && (1 \leqslant n \leqslant N),\\
&\|\mathbf{x}\| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_i^{\nu} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n} \delta_{j\nu} \leqslant \|\mathbf{d}\|, && (1 \leqslant n \leqslant N),\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_i^{\nu} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n} \delta_{j\nu} \leqslant \|\mathbf{d}\|, && (1 \leqslant n \leqslant N),\\
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_i^{\nu} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{n} \delta'_{j\nu} \geqslant -\|\mathbf{d}\|, && (1 \leqslant n \leqslant N).
\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Relațiile (2.3.1) și (2.3.2) corespund condițiilor (1.1.3) și (1.1.4) și împreună cu

$$\theta \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}$$

asigură compatibilitatea restricțiilor.

Funcția criteriu devine

$$\varphi(\omega) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{m+r}\sum_{j=1}^{p+r} c_{ij}\, x_{ij}^{n}(\omega). \tag{2.3.3}$$

În anumite condiții este natural să se considere optim acel plan care minimizează valoarea medie a funcției criteriu.

Primită la redacție la 25 februarie 1963

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СКЛАДИРОВАНИЯ

РЕЗЮМЕ

Изучается следующая задача многоэтапного складирования: минимизировать сумму транспортных издержек и прямых издержек складирования однородного изделия, произведенного в m центрах, потребленного в p центрах и складываемого в r складах в N-этапном процессе. Производство и потребление является сезонным, но известно для всех этапов. К такой задаче ведет, например, рациональное использование системы рефрижераторных складов. Если сочетать метод функционального уравнения Бэллмана для многоэтапного процесса с методом параметрического линейного программирования, для решения на каждом этапе минимизации, то размеры задачи значительно сокращаются. При этом используются некоторые предыдущие результаты автора о параметрической транспортной задаче [6] и теорема 3 › транспортной задаче с предпочтением.

Доказывается, что если $\mathbf{x}(x_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ является вектор начальных запасов, существующих на складах, то минимальные издержки N-этапного процесса представляют собой выпуклую непрерывную функцию $\Phi(\mathbf{x})$, определенную на замкнутом выпуклом множестве в E^r. Оптимальная программа определяется (1.6.7).

Эти результаты доказываются по индукции, используя принцип оптимальности и лемма 1.5.

В § 2 рассматриваются некоторые обобщения. Случай s изделий, которые могут быть складированы вместе на r складах, ведет к задаче динамического программирования с sr переменными.

A DYNAMIC INVENTORY PROBLEM

ABSTRACT

The author investigates the following multistage inventory problem: minimize the total transportation and direct storing costs of a homogeneous commodity produced in m centres, consumed in p centres and stored in r warehouses in an N-stages process. The productions and consumptions are seasonal but known for all N stages. The rational operation of a system of refrigerating warehouses leads for instance, in certain conditions, to such a problem.

By combining Bellman's functional, equation technique for the multistage process with the method of parametric linear programming for solving the minimization problem at each stage, the dimensionality of the problem is considerably reduced. Use is made of certain earlier results of the author on parametric transportation problems [6] and of theorem 3 on the problem of transportation with priority (1.4.1), (1.4.2), (1.4.3).

It is proved that if $\mathbf{x}(x_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant r)$ is the vector of initial stocks existing in the r warehouses at the beginning of the process, the minimum cost of the N-stages process is a function $\Phi(\mathbf{x})$ convex and continuous on a closed convex set in E^r. The optimal program is provided by (1.6.7). These results are proved by induction using the principle of optimality and the lemma of 1.5.

In § 2 are considered some generalizations. The case of s commodities which can be stored together in r warehouses leads to a dynamic programming with sr variables.

BIBLIOGRAFIE

1. GEORGE B. DANTZIG, *On the Status of Multistage Linear Programming*, Management Science, **6**, 1, 53—72, (1959).
2. G. MIHOC, V. URSEANU, *Matematici aplicate în statistică*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1962.

3. R. BELLMAN, *Dynamic Programming*. Princeton, 1957.
4. H. G. EGGLESTON, *Convexity*. Cambridge University, Press, 1958.
5. A. MADANSKY, *Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems*. Management Science, **6**, 197–204, (1959/1960).
6. B. BEREANU, *Problema stocastică a transportului. II. Cazul consumurilor aleatoare*. Comunicările Academiei R.P.R., **XIII**, *4*, 333–337, (1963).
7. E. BALAȘ, P. IVĂNESCU, *În legătură cu problema transporturilor. II. Probleme de transporturi cu parametrii*. St. și cerc. mat., **XII**, *2*, 413–427 (1961).

UN MODEL MATEMATIC AL FONEMULUI

DE

SOLOMON MARCUS

MODUL DE A PUNE PROBLEMA

Problema principală care ne preocupă în articolul de față ar putea fi formulată în felul următor :

Care sînt, din punct de vedere formal, etapele prin care, pornindu-se de la valorile acustice sau articulatorii ale sunetelor limbii, se ajunge la valorile lor distinctive, relevante din punctul de vedere al funcției lingvistice. Mai precis, care sînt criteriile cu ajutorul cărora se selecționează din mulțimea $\mathfrak{V}(x)$ a tuturor valorilor acustice (sau articulatorii) ale sunetului x, partea $\mathfrak{F}(x)$ a valorilor relevante ale lui x?

Bineînțeles că pentru a răspunde la această problemă este nevoie în prealabil să dăm enunțului problemei o formă exactă, susceptibilă de o tratare matematică. Va trebui deci să construim un analog formal al sunetelor, al valorilor, al relevanței etc.

Modul de a pune problema se inspiră din lucrările clasice ale lui R. Jakobson, C. G. M. Fant și M. Halle [4], A. Martinet [6] precum și din lucrările mai recente ale lui G. E. Peterson și Frank Harary [7], S. K. Șaumean [9] și I. I. Revzin [8]. Multe dintre noțiunile și faptele pe care le vom pune în evidență constituie un analog formal al unor noțiuni sau fapte din lucrările citate.

Menționăm totodată că reconstrucția logică a noțiunii de fonem a făcut, de curînd, obiectul unei ample analize întreprinse de Tadeusz Batóg, pe baza mereologiei lui Lesniewski ; o problemă similară, dar tratată cu alte metode, a fost abordată de J. Greenberg [3].

VALORI ȘI SUNETE

Fie $\mathfrak{V}$ o mulțime de elemente numite valori. Să considerăm o partiție P a mulțimii :

$$\mathfrak{V} = \bigcup_i \mathfrak{V}_i.$$

Două valori din aceeași mulțime $\mathcal{V}_i$ se numesc *omogene*; două valori din mulțimi $\mathcal{V}_i$ diferite se numesc *eterogene*.

Exemple de valori: sonor, surd, moale, tare, deschis, închis, fricativ, ocluziv, continuu. Valorile „sonor" și „surd" intră în aceeași mulțime $\mathcal{V}_i$; la fel „moale" și „tare", „deschis" și „închis". Valorile „sonor" și „moale" sînt eterogene.

Fie E o mulțime de elemente numite *sunete ale vorbirii* sau, pe scurt, *sunete*.

Fiecărui sunet x i se asociază o parte $\mathcal{V}(x)$ a lui $\mathcal{V}$, astfel încît, pentru orice i natural, intersecția

$$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}(x)$$

este formată exact dintr-un element.

Două valori v_1 și v_2 se numesc compatibile dacă există un sunet x astfel încît

$$v_1 \in \mathcal{V}(x) \text{ și } v_2 \in \mathcal{V}(x).$$

Două valori care nu sînt compatibile se numesc *incompatibile*.

De exemplu, în limba rusă valorile „surd" și „fricativ" sînt compatibile; valorile „sonor" și „moale" sînt de asemenea compatibile. În schimb, „tare" și „deschis" sînt incompatibile.

RAPORTUL DINTRE COMPATIBILITATE ȘI OMOGENITATE

PROPOZIȚIA 1. *Dacă v_1 și v_2 sînt valori compatibile, atunci v_1 și v_2 sînt eterogene.*

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că v_1 și v_2 sînt omogene. Există deci o valoare j a lui i, astfel încît

$$v_1 \in \mathcal{V}_j, \quad v_2 \in \mathcal{V}_j.$$

Pe de altă parte, din faptul că v_1 și v_2 sînt compatibile, rezultă existența unui sunet z astfel încît

$$v_1 \in \mathcal{V}(z), \quad v_2 \in \mathcal{V}(z).$$

De aici deducem că intersecția

$$\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}(z)$$

conține cel puțin două valori: v_1 și v_2. Aceasta vine în contradicție cu definiția mulțimilor $\mathcal{V}(x)$. Deci presupunerea că v_1 ar fi omogen cu v_2 este falsă: v_1 și v_2 sînt eterogene.

COROLAR. *Dacă v_1 și v_2 sînt omogene, atunci v_1 și v_2 sînt incompatibile.*

Observație. Reciproca acestui corolar nu este adevărată. Într-adevăr, fie

$$\mathfrak{P} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},\ \mathfrak{P}_1 = \{v_1\},\ \mathfrak{P}_2 = \{v_2, v_3\},\ \mathfrak{P}_3 = \{v_4, v_5\}$$
$$E = \{x, y, z, w\},\ \mathfrak{P}(x) = \{v_1, v_2, v_4\},\ \mathfrak{P}(y) = \mathfrak{P}(z) = \{v_1, v_3, v_4\},$$
$$\mathfrak{P}(w) = \{v_1, v_3, v_5\}.$$

După cum vedem, v_2 și v_5 sînt incompatibile, dar eterogene.

PERECHI CONTRASTIVE

Vom spune că două valori v_1 și v_2 formează o *pereche contrastivă de valori* sau, pe scurt, o *pereche contrastivă*, dacă există două sunete x și y, astfel încît

$$\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(y) = \{v_1\},\quad \mathfrak{P}(y) - \mathfrak{P}(x) = \{v_2\}.$$

Din această definiție rezultă imediat că :

Dacă v_1 și v_2 formează o pereche contrastivă, atunci $v_1 \neq v_2$, iar v_2 și v_1 formează de asemenea o pereche contrastivă.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă valorile v_1 și v_2 formează o pereche contrastivă, atunci v_1 și v_2 sînt omogene.*

Demonstrație. Prin definiție, există două sunete x și y astfel încît

$$\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(y) = \{v_1\},\quad \mathfrak{P}(y) - \mathfrak{P}(x) = \{v_2\}.$$

Să punem

$$A_{xy} = \mathfrak{P}(x) \cap \mathfrak{P}(y).$$

Din însăși definiția perechii contrastive, rezultă că

$$\mathfrak{P}(x) = A_{xy} \cup \{v_1\},\quad \mathfrak{P}(y) = A_{xy} \cup \{v_2\}.$$

Fie k numărul natural pentru care

$$v_1 \in \mathfrak{P}_k.$$

Din faptul că, în conformitate cu definiția mulțimii $\mathfrak{P}(x)$, intersecția

$$\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}(x)$$

conține exact un element și ținînd seamă că

$$\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_k \cap (A_{xy} \cup \{v_1\}) = (\mathfrak{P}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathfrak{P}_k \cap \{v_1\})$$

rezultă, în baza apartenenței

$$v_1 \in \mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}(x),$$

că

$$\mathfrak{P}_k \cap A_{xy} = 0.$$

Însă

$$\mathfrak{P}_k \cap \mathfrak{P}(y) = \mathfrak{P}_k \cap (A_{xy} \cup \{v_2\}) = (\mathfrak{P}_k \cap A_{xy}) \cup (\mathfrak{P}_k \cap \{v_2\})$$

deci

$$\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}(y) = \mathcal{V}_k \cap \{v_2\}.$$

Deoarece mulțimea din primul membru al acestei egalități conține, prin definiție, exact un element, rezultă că

$$\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}(y) = \{v_2\}$$

deci

$$v_2 \in \mathcal{V}_k;$$

așadar, v_1 și v_2 sînt omogene.

Observație. Reciproca propoziției 2 nu este adevărată. Într-adevăr, fie

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad \mathcal{V}_1 = \{v_1, v_2\}, \quad \mathcal{V}_2 = \{v_3, v_4\},$$
$$E = \{x, y, z, w\}, \ \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y) = \{v_1 v_4\}, \ \mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(w) = \{v_2, v_3\}.$$

Observăm că $\mathcal{V}$ nu conține nici o pereche contrastivă de valori, deci, în particular, nici perechile omogene $\{v_1, v_2\}$ și $\{v_3, v_4\}$ nu sînt contrastive.

COROLAR. *Dacă valorile v_1 și v_2 formează o pereche contrastivă, atunci v_1 și v_2 sînt incompatibile.*

Demonstrație. Este suficient să aplicăm propoziția 2 și apoi corolarul propoziției 1.

Observație. După cum arată exemplul din observația la propoziția 2, reciproca acestui corolar nu este adevărată; există, uneori, valori incompatibile care nu formează o pereche contrastivă. În exemplul citat, nici o pereche de valori incompatibile nu este contrastivă.

SISTEME FONETICE POTENȚIALE

Fie un sistem

$$\{\mathcal{V}, P, E, \varphi\}$$

unde $\mathcal{V}$ este o mulțime de valori, P este o partiție a lui $\mathcal{V}$, E este o mulțime de sunete iar φ este o aplicație a mulțimii E în mulțimea părților lui $\mathcal{V}$, astfel încît, pentru orice $x \in E$ și pentru orice termen $\mathcal{V}_i$ al partiției P, mulțimea

$$\mathcal{V}_i \cap \varphi(x)$$

este formată exact dintr-un element. Un astfel de sistem se numește un *sistem fonetic potențial* sau, pe scurt, un *sistem fonetic.*

Există unele sisteme fonetice concrete în care orice pereche de valori incompatibile este contrastivă; în baza corolarului propoziției 2, va rezulta că, într-un astfel de sistem, noțiunea de pereche contrastivă se confundă cu noțiunea de pereche de valori incompatibile. Așa se întîmplă, de exemplu, în sistemul de valori acustice descris în [4].

Această situație sugerează următoarea definiție :

Vom spune că un sistem fonetic potențial este *complet*, dacă orice pereche de valori incompatibile este o pereche contrastivă.

După cum a rezultat din observația la propoziția 2, există valori omogene care nu formează o pereche contrastivă. Se pot construi sisteme fonetice potențiale în care orice pereche omogenă este contrastivă. Un astfel de sistem este furnizat de observația care urmează corolarului propoziției 1. Într-adevăr, perechea omogenă $\{v_2, v_3\}$ este contrastivă, deoarece

$$\mathfrak{P}(x) - \mathfrak{P}(y) = \{v_2\} \text{ iar } \mathfrak{P}(y) - \mathfrak{P}(x) = \{v_3\};$$

perechea omogenă $\{v_4, v_5\}$ este de asemenea contrastivă deoarece

$$\mathfrak{P}(z) - \mathfrak{P}(w) = \{v_4\} \text{ iar } \mathfrak{P}(w) - \mathfrak{P}(z) = \{v_5\}.$$

Această situație sugerează următoarea definiție :

Un sistem fonetic potențial se numește *semicomplet*, dacă orice pereche de valori omogene este contrastivă.

În baza corolarului propoziției 1 și a exemplului care urmează acestui corolar, are loc.

PROPOZIȚIA 3. *Orice sistem fonetic potențial complet este semicomplet, dar nu și reciproc.*

Observații. Noțiunea de pereche contrastivă este o precizare a unei noțiuni cunoscute. A se vedea, de exemplu, I. I. Revzin ([8] *), unde se folosește pentru această noțiune termenul de „trăsături omogene". Însă termenul de „omogen" a căpătat mai sus o altă accepțiune.

Exemple de perechi contrastive din limbile română și rusă : *surd* și *sonor*, *lung* și *scurt*, *moale* și *tare*, *deschis* și *închis*.

Caracterul contrastiv al perechii {surd, sonor} se verifică în limba română prin considerarea sunetelor D și T; într-adevăr, avem

$$\mathfrak{P}(T) - \mathfrak{P}(D) = \{\text{surd}\}, \quad \mathfrak{P}(D) - \mathfrak{P}(T) = \{\text{sonor}\}.$$

Caracterul contrastiv al perechilor {scurt, lung} și {închis, deschis} se verifică, în limba română, prin considerarea a patru variante adecvate ale sunetului E : E_1, E_2, E_3 și E_4, astfel încît

$$\mathfrak{P}(E_1) - \mathfrak{P}(E_2) = \{\text{scurt}\}, \quad \mathfrak{P}(E_2) - \mathfrak{P}(E_1) = \{\text{lung}\},$$
$$\mathfrak{P}(E_3) - \mathfrak{P}(E_4) = \{\text{închis}\}, \quad \mathfrak{P}(E_4) - \mathfrak{P}(E_3) = \{\text{deschis}\}.$$

TRĂSĂTURI

În limbile naturale, singurele valori interesante sînt acelea care participă măcar la o pereche omogenă ; cu alte cuvinte, acele valori v pentru care mulțimea $\mathfrak{P}_i$ cu proprietatea $v \in \mathfrak{P}_i$ conține cel puțin două valori. Această situație este un reflex al faptului că dacă o valoare v nu este omo-

*) p. 23.

genă cu nici o altă valoare, atunci v nu intră în nici o pereche contrastivă (ca urmare a propoziției 2).

O valoare v care nu este omogenă cu nici o altă valoare va fi numită o *trăsătură*. Dacă, în plus, $v \in \mathcal{V}(x)$, atunci spunem că v este o *trăsătură a sunetului* x. Următoarea propoziție arată lipsa de interes a acestei noțiuni.

PROPOZIȚIA 4. *Dacă v este o trăsătură a sunetului x, atunci v este o trăsătură a oricărui alt sunet.*

Demonstrație. Fie

$$\mathcal{V}(x) = \{v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,\ v_i(x),\ \ldots\}.$$

Fie j numărul natural cu proprietatea $v_j(x) = v$. Aceasta înseamnă că $\mathcal{V}_j = \{v\}$. Fie acum un alt sunet y. Avem

$$\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}(y) = \{v\} \cap \mathcal{V}(y)$$

și, deoarece mulțimea $\mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}(y)$ nu poate fi vidă, rezultă

$$v \in \mathcal{V}(y)$$

deci v este o trăsătură a lui y.

Vom spune că o valoare v este *parazită* dacă nu există nici un sunet x astfel încît $v \in \mathcal{V}(x)$. Ori de cîte ori nu se va specifica contrariul, existența valorilor parazite va fi exclusă, cu alte cuvinte vom presupune adevărată relația

$$\mathcal{V} = \bigcup_{x \in E} \mathcal{V}(x).$$

Evident, sistemele fonetice ale limbilor naturale nu conțin valori parazite.

ECHIVALENȚA ABSOLUTĂ. DISTANȚA

Două sunete x și y, astfel încît $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(y)$, vor fi numite *sunete absolut echivalente*.

Dacă admitem, prin definiție, că opoziția dintre două sunete x și y este opoziția dintre mulțimile $\mathcal{V}(x)$ și $\mathcal{V}(y)$, atunci putem spune că sunetele x și y sînt absolut echivalente dacă și numai dacă $\mathcal{V}(x)$ și $\mathcal{V}(y)$ sînt în opoziție zero.

Însă pentru ca opoziția dintre două sunete să poată reflecta într-un mod mai adecvat situația lor reciprocă, este indicat ca $\mathcal{V}(x)$ și $\mathcal{V}(y)$ să fie concepute ca mulțimi *ordonate* iar opoziția dintre ele să fie concepută ca o *opoziție ordonată*. Anume, vom considera, în $\mathcal{V}(x)$ și în $\mathcal{V}(y)$, ordinea indusă de partiția P. Vom pune

$$\mathcal{V}(x) = \{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots\},$$
$$\mathcal{V}(y) = \{v_1(y), v_2(y), \ldots, v_i(y), \ldots\},$$

unde

$$v_i(x) \in \mathcal{V}_i,\ v_i(y) \in \mathcal{V}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

După modelul distanței lui Hamming din teoria codurilor, vom introduce aici o măsură, o evaluare cantitativă a opoziției dintre $\mathcal{P}(x)$ și $\mathcal{P}(y)$. Anume, vom considera mulțimea $\mathcal{H}_{xy}$ a acelor numere naturale i pentru care $v_i(x) \neq v_i(y)$. Numărul cardinal al mulțimii $\mathcal{H}_{xy}$ este, prin definiție, *distanța dintre* $\mathcal{P}(x)$ *și* $\mathcal{P}(y)$. Acest număr cardinal măsoară opoziția dintre sunetele x și y. În cazul în care partiția P este finită, se verifică ușor că toate proprietățile distanței sînt satisfăcute.

Se observă că eventualele trăsături prezente în $\mathcal{P}(x)$ și $\mathcal{P}(y)$ au o contribuție nulă în distanța dintre $\mathcal{P}(x)$ și $\mathcal{P}(y)$. O altă observație evidentă: *Două sunete x și y sînt absolut echivalente dacă și numai dacă distanța dintre $\mathcal{P}(x)$ și $\mathcal{P}(y)$ este egală cu zero.*

SUNETE ABSTRACTE

Este clar că echivalența absolută satisface toate proprietățile unei relații de echivalență în E. Mulțimea E se împarte deci în clase de absolut echivalență; o astfel de clasă va fi numită un *sunet abstract*. Sunetul abstract asociat sunetului x va fi notat cu $[x]$.

Distanța lui Hamming induce în mulțimea $\mathcal{S}$ a sunetelor abstracte o distanță prin intermediul căreia $\mathcal{S}$ devine un *spațiu metric* asociat sistemului fonetic potențial $\{\mathcal{P}, P, E, \varphi\}$. Anume, distanța dintre $[x]$ și $[y]$ va fi, prin definiție, egală cu distanța dintre $\mathcal{P}(x')$ și $\mathcal{P}(y')$, unde $x' \in [x]$ iar $y' \in [y]$. Este clar că această distanță nu depinde de modul în care alegem pe x' în $[x]$ și pe y' în $[y]$.

UNELE ANALOGII CU TEORIA CODURILOR

Vom spune că spațiul metric $\mathcal{S}$ detectează erorile simple dacă, fiind date: $[x] \in \mathcal{S}$,

$$v \in \mathcal{P}(x) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \ldots\}$$

și o valoare $v' \neq v$, nu există nici un sunet y astfel încît

$$\mathcal{P}(y) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v', v_{j+1}, \ldots\}.$$

Printr-un raționament similar celui utilizat în teoria codurilor, se arată că:

Spațiul metric $\mathcal{S}$ detectează erorile simple dacă și numai dacă distanța dintre elementele sale este mai mare sau egală cu doi.

De aici vom deduce

PROPOZIȚIA 5. *Fie $\mathcal{E}$ spațiul metric asociat sistemului fonetic potențial $\{\mathcal{P}, P, E, \varphi\}$. Pentru ca $\mathcal{S}$ să detecteze erorile simple este necesar și suficient ca $\mathcal{P}$ să nu conțină nici o pereche contrastivă de valori.*

Demonstrație. Să presupunem că $\mathcal{S}$ detectează erorile simple. Rezultă că distanța dintre elementele sale este mai mare sau egală cu doi. Dacă ar exista două valori v_1 și v_2 care formează o pereche contrastivă, atunci

ar exista două sunete x și y pentru care $\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y) = \{v_1\}$ și $\mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x) = \{v_2\}$. Rezultă că distanța dintre $\mathcal{V}(x)$ și $\mathcal{V}(y)$ este mai mică sau egală cu doi. Însă, în baza propoziției 2, valorile v_1 și v_2 sînt omogene, deci distanța dintre $\mathcal{V}(x)$ și $\mathcal{V}(y)$ este egală cu unu, în contradicție cu ipoteza că $\mathcal{S}$ detectează erorile simple. Deci existența unei perechi contrastive de valori este exclusă.

Să presupunem acum că nu există nici o pereche contrastivă de valori. Să admitem, prin absurd, că $\mathcal{S}$ nu detectează toate erorile simple. În acest caz, există două sunete abstracte $[x] \in \mathcal{S}$, $[y] \in \mathcal{S}$, între care distanța este mai mică decît doi, deci egală cu unu (distanța nu poate fi nulă deoarece x și y sînt distincte). Rezultă că, punînd

$$\mathcal{V}(x) = \{v_1(x), v_2(x), \ldots, v_i(x), \ldots\},$$
$$\mathcal{V}(y) = \{v_1(y), v_2(y), \ldots, v_i(y), \ldots\},$$

există un număr natural j astfel încît $v_j(x) \neq v_j(y)$ și $v_i(x) = v_i(y)$ pentru orice $i \neq j$. Rezultă că

$$\mathcal{V}(x) - \mathcal{V}(y) = \{v_j(x)\} \text{ și } \mathcal{V}(y) - \mathcal{V}(x) = \{v_j(y)\},$$

deci valorile $v_j(x)$ și $v_j(y)$ formează o pereche contrastivă, în contradicție cu ipoteza. Deci $\mathcal{S}$ detectează toate erorile simple.

COROLAR. *Fie un sistem fonetic potențial* $\{\mathcal{V}, P, E, \varphi\}$ *al cărui spațiu asociat* $\mathcal{S}$ *detectează erorile simple. Pentru ca sistemul să fie complet, este necesar și suficient ca* $\mathcal{V}$ *să nu conțină valori incompatibile.*

Ținînd seamă de corolarul propoziției 1, rezultă că mai putem enunța următoarea propoziție :

Fie un sistem fonetic potențial $\{\mathcal{V}, P, E, \varphi\}$, *al cărui spațiu asociat* $\mathcal{S}$ *detectează erorile simple. Pentru ca sistemul să fie complet este necesar și suficient ca fiecare termen al partiției* P *să fie o mulțime formată dintr-un singur element.*

Pe baza definiției noțiunii de „trăsătură", mai are loc și următoarea propoziție :

Fie un sistem fonetic potențial $\{\mathcal{V}, P, E, \varphi\}$ *al cărui spațiu asociat* $\mathcal{S}$ *detectează erorile simple. Pentru ca sistemul să fie complet este necesar și suficient ca orice element din* $\mathcal{V}$ *să fie o trăsătură.*

Cele trei propoziții enunțate mai sus arată că sistemele fonetice potențiale care funcționează ca un cod detector de erori simple nu sînt complete decît în cazuri banale (a se vedea mai cu seamă ultima caracterizare a acestor sisteme). Explicația acestui fapt este naturală; completitudinea unui sistem fonetic corespunde cazului în care toate opozițiile posibile în sistem sînt efectiv utilizate, deci se realizează maximum de economie iar redundanța sistemului este nulă. Însă, după cum se știe, o anumită redundanță este totdeauna necesară pentru a putea detecta și corecta eventualele erori și o astfel de redundanță există efectiv în limbile naturale. Sistemele lingvistice naturale conțin totdeauna o anumită redundanță.

Este uşor de văzut că toate cele trei caracterizări ale completitudinii în sistemele fonetice detectoare de erori simple devin caracterizări ale semicompletitudinii unor astfel de sisteme, de îndată ce înlocuim, în enunţul lor, cuvîntul „complet" prin cuvîntul „semicomplet" iar cuvîntul „incompatibile" prin cuvîntul „omogene". Rezultă că, în sistemele fonetice detectoare de erori simple, semicompletitudinea se realizează numai în unele cazuri banale.

ŞIRURI REPERATE ŞI ŞIRURI PERMISE

Fie $\mathfrak{C}$ o anumită mulţime de şiruri de sunete ; despre aceste şiruri vom spune că sînt *reperate*. Uneori, în loc de şiruri vom spune *lanţuri*. Într-o limbă naturală, în rolul şirurilor reperate se iau de obicei cuvintele sau frazele limbii respective.

Orice sublanţ al unui lanţ reperat se numeşte *lanţ permis* sau *şir permis*. Este deci clar că orice şir reperat este permis, dar nu şi reciproc. Orice subşir al unui şir permis este de asemenea permis.

SISTEME FONEMATICE POTENŢIALE

Un sistem de obiecte $\{\mathfrak{V}, P, E, \varphi, S\}$, unde $\mathfrak{V}$, P, E şi φ sînt obiectele care compun un sistem fonetic potenţial iar S este mulţimea de şiruri reperate, se numeşte *sistem fonematic potenţial* sau pur şi simplu *sistem fonematic*.

În legătură cu şirurile reperate şi cele permise vom face următoarea :

IPOTEZĂ FUNDAMENTALĂ. *Dacă într-un şir reperat înlocuim un sunet x prin altul absolut echivalent cu x, atunci şirul nou obţinut este de asemenea reperat. Din această ipoteză fundamentală rezultă uşor că : dacă într-un şir permis înlocuim un sunet prin altul absolut echivalent, atunci şirul nou obţinut este de asemenea permis.*

Într-adevăr, fie s_x un şir permis care-l conţine pe x şi fie y absolut echivalent cu x. Fie s_y şirul obţinut din s_x prin înlocuirea lui x cu y. Şirul s_x este subşir al unui şir reperat σ_x. Fie σ_y şirul obţinut din σ_x prin înlocuirea lui x cu y. Prin ipoteza fundamentală, σ_y este reperat. Pe de altă parte, σ_y conţine pe s_y deci s_y este permis.

În baza acestei ipoteze, şirurile cu care lucrăm sînt, în fapt, şiruri de sunete abstracte ; proprietăţile pe care le vom considera vor fi invarianta prin relaţia de echivalenţă absolută.

Fiind date două şiruri de sunete $x_1\, x_2 \ldots x_i \ldots x_n$ şi $y_1 y_2 \ldots y_i \ldots y_n$, vom spune că aceste şiruri sînt *absolut echivalente* dacă x_i este absolut echivalent cu y_i pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă că un *şir absolut echivalent cu un şir reperat (permis) este de asemenea reperat (permis)*.

VALORI PERTINENTE

Vom spune că valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este o *valoare pertinentă a sunetului* x, dacă există o valoare v' astfel încît v și v' să formeze o pereche contrastivă și există un sunet y astfel încît

$$\mathcal{V}(y) = (\mathcal{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}.$$

Despre valorile v și v' spunem că formează o *pereche contrastivă în raport cu sunetul* x.

Chiar din definiția dată rezultă că:

Dacă $v \in \mathcal{V}(x)$ *este o valoare pertinentă a sunetului* x, *atunci* v *este o valoare pertinentă a oricărui sunet absolut echivalent cu* x.

Dacă v *și* v' *formează o pereche contrastivă în raport cu sunetul* x, *atunci* v *și* v' *formează o pereche contrastivă în raport cu orice sunet absolut echivalent cu* x.

Aceste proprietăți fac legitime următoarele definiții:

O valoare $v \in \mathcal{V}(x)$ este, prin definiție, pertinentă pentru sunetul abstract $[x]$, dacă există un sunet $y \in [x]$ care admite pe v ca valoare pertinentă.

Două valori v și v' formează, prin definiție, o pereche contrastivă în raport cu sunetul abstract $[x]$, dacă există un sunet $y \in [x]$ în raport cu care v și v' formează o pereche contrastivă.

VALORI LEGATE

Fiind date un sunet x și un șir permis s care-l conține pe x, vom spune că valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o *valoare legată în raport cu șirul* s, dacă are loc una dintre următoarele două situații:

1° v nu este o valoare pertinentă a lui x;

2° pentru orice valoare v', astfel încît v și v' formează o pereche contrastivă în raport cu x și pentru orice sunet y cu proprietatea

$$\mathcal{V}(y) = (\mathcal{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\},$$

șirul obținut din s prin înlocuirea lui x cu y nu este permis.

Este clar, în baza ipotezei fundamentale de mai sus, că

Dacă valoarea v *este, pentru sunetul* x, *o valoare legată în raport cu șirul permis* s *și dacă* u *este un sunet absolut echivalent cu* x, *atunci, notînd cu* t *șirul obținut din* s *prin înlocuirea lui* x *cu* u, t *este un șir permis, iar* v *este, pentru* u, *o valoare legată în raport cu șirul* t.

Vom spune că o valoare $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, *legată la stînga*, dacă oricare ar fi sunetul z pentru care xz este permis, valoarea v este, pentru x, legată în raport cu șirul xz.

Vom spune că o valoare $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, *legată la dreapta*, dacă oricare ar fi sunetul y pentru care șirul yx este permis, valoarea v este, pentru x, legată în raport cu șirul yx.

Vom spune că o valoare $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, *bilateral legată*, dacă ea este, pentru x, legată la stînga și legată la dreapta.

Vom spune că o valoare $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o *valoare proxim legată*, dacă, pentru orice șir permis de tipul yxz, valoarea v este, pentru x, legată în raport cu yxz.

Noțiunile de „valoare legată la dreapta", „valoare legată la stînga" „valoare bilateral legată" și „valoare proxim legată" sînt și ele invariante prin relația de echivalență absolută.

PROPOZIȚIA 6. *Dacă valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, legată la stînga, atunci v este, pentru x, o valoare proxim legată.*

Demonstrație. Fie un șir permis de tipul yxz. Trebuie să arătăm că v este, pentru x, o valoare legată în raport cu acest șir. Să presupunem, prin reducere la absurd, că această situație nu are loc. În acest caz, v este o valoare pertinentă a lui x; în plus, există o valoare v' care formează cu v o pereche contrastivă în raport cu x și există un sunet w cu proprietățile :

1° $\mathcal{V}(w) = (\mathcal{V}(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$;

2° șirul ywz este permis.

Din faptul că șirurile yxz și ywz sînt permise, rezultă că subșirurile xz și wz sînt de asemenea permise. Ținînd seamă că v' formează cu v o pereche contrastivă în raport cu x și observînd proprietatea 1° a sunetului w, se constată o contradicție cu ipoteza că v este, pentru x, legată la stînga.

În mod analog se demonstrează :

PROPOZIȚIA 6'. *Dacă valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, legată la dreapta, atunci v este, pentru x, o valoare proxim legată.*

Reciproca propozițiilor 6 și 6' nu este adevărată. Într-adevăr, are loc :

PROPOZIȚIA 7. *Există un sistem fonematic care conține un sunet z și o valoare v proxim legată pentru z, valoare care însă nu este, pentru z, nici legată la stînga, nici legată la dreapta.*

Demonstrație. Vom considera sistemul fonematic definit în felul următor : $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3,\}$ $E = \{x, y, z\}$, $\mathcal{V}_1 = \{v_1\}$, $\mathcal{V}_2 = \{v_2, v_3\}$, $\mathcal{V}(x) = \{v_1, v_2\}$, $\mathcal{V}(y) = \mathcal{V}(z) = \{v_1, v_3\}$. Vom presupune că există un singur șir reperat și anume $xyzyx$.

Valoarea v_3 este proxim legată pentru z, deoarece în unicul șir permis de tipul $\alpha\ z\ \beta$ — și anume în șirul yzy — înlocuirea valorii pertinente v_3 cu valoarea v_2, conduce la șirul yxy iar acest șir nu este permis.

Valoarea v_3 nu este bilateral legată pentru z. Într-adevăr, fie șirul permis zy; v_3 este o valoare pertinentă a lui z și nu este legată în raport cu șirul zy, deoarece înlocuind v_3 cu v_2 obținem șirul xy, care este tot un șir permis. Deci valoarea v_3 a lui z nu este legată la stînga. Pe de altă parte, în șirul permis yz, înlocuirea lui v_3 prin v_2 furnizează șirul yx, care este tot un șir permis. Deci v_3 nu este legată la dreapta. Propoziția 7 este complet demonstrată.

Prin definiție, vom spune că valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o *valoare legată* dacă v este, pentru x, legată în raport cu orice șir permis care-l conține pe x.

PROPOZIȚIA 8. *Valoarea $v \in \mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o valoare legată dacă și numai dacă v este, pentru x, o valoare proxim legată.*

Demonstrație. Necesitatea condiției este evidentă. Rămîne să stabilim suficiența. Să admitem că v este proxim legată și să presupunem, prin reducere la absurd, că există un șir permis $x_1x_2\ldots x_{i-1}x\ x_{i+1}\ldots x_n$ în raport cu care v nu este legată. Aceasta înseamnă că există o valoare v' și un sunet y astfel încît $\mathcal{V}(y)=(\mathcal{V}(x)-\{v\})\cup\{v'\}$, iar șirul $x_1x_2\ldots x_{i-1}y\ x_{i+1}\ldots x_n$ este permis. Ca subșiruri ale unor șiruri permise, șirurile $x_{i-1}\,x\,x_{i+1}$ și $x_{i-1}\,y\,x_{i+1}$ sînt de asemenea permise. Ținînd seamă de celelalte proprietăți ale valorilor v și v' și sunetelor x și y, rezultă că v nu este, pentru x, o valoare legată în raport cu șirul permis $x_{i-1}\,x\,x_{i+1}$, ceea ce vine în contradicție cu ipoteza că v este, pentru x, o valoare proxim legată. Propoziția 8 este astfel demonstrată.

COROLAR. *Dacă valoarea $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, legată la stînga sau la dreapta, atunci v este, pentru x, o valoare legată.*

Demonstrație. Rezultă imediat din propozițiile 6, 6′ și 8 de mai sus.

Prin definiție, vom spune că valoarea $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, *alternativă la stînga* (*la dreapta*, *bilateral*) dacă v nu este, pentru x, legată la stînga (la dreapta, bilateral).

Prin definiție, vom spune că valoarea $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, (*proxim*) *alternativă* dacă v nu este, pentru x (proxim) legată.

Din propozițiile de mai sus rezultă:

PROPOZIȚIA 9. *Dacă valoarea $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, proxim alternativă, atunci v este, pentru x, bilateral alternativă.*

PROPOZIȚIA 10. *Valoarea $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o valoare alternativă dacă și numai dacă v este, pentru x, proxim alternativă.*

PROPOZIȚIA 11. *Dacă $v\in\mathcal{V}(x)$ este, pentru x, o valoare alternativă, atunci v este, pentru x, bilateral alternativă.*

PROPOZIȚIA 12. *Există un sistem fonematic care conține un sunet z și o valoare v care este bilateral alternativă pentru z, dar nu este proxim alternativă pentru z.*

VALORI RELEVANTE

Mulțimea valorilor sunetului x care sînt, pentru x, alternative la stînga (la dreapta) va fi notată cu $\mathcal{A}_s(x)$ (respectiv $\mathcal{A}_d(x)$).

Mulțimea valorilor sunetului x care sînt, pentru x, bilateral alternative, va fi notată cu $\mathcal{A}_b(x)$.

Mulțimea valorilor sunetului x care sînt, pentru x, proxim alternative, va fi notată cu $\mathcal{A}_p(x)$.

Mulțimea valorilor sunetului x care sînt alternative pentru x, va fi notată cu $\mathcal{A}(x)$.

Din propozițiile 9, 10, 11 și 12 rezultă

PROPOZIȚIA 13. *Pentru orice sunet x avem*

$$\mathcal{A}(x)=\mathcal{A}_p(x)\subset\mathcal{A}_b(x)$$

și există, în unele sisteme fonematice, sunete x pentru care incluziunea este strictă.

Vom considera acum, în mulțimea șirurilor reperate, o relație de echivalență R, a cărei interpretare naturală este următoarea: două șiruri reperate sînt R-echivalente dacă au aceeași semnificație.

Fie $v \in \mathcal{A}(x)$. Vom spune că v este, pentru x, *relevantă în raport cu șirul reperat s care-l conține pe x*, dacă există o valoare v' și un sunet y astfel încît:

1° $\mathcal{V}(y) = \mathcal{V}(x) - \{v\} \cup \{v'\}$;

2° șirul σ obținut din s prin înlocuirea lui x cu y este reperat;

3° σ nu este R-echivalent cu s.

Fie $v \in \mathcal{A}(x)$. Dacă există un șir reperat s care-l conține pe x și în raport cu care v este, pentru x, relevantă, atunci spunem că v este o *valoare relevantă a lui x*.

Dacă, în definițiile de mai sus, înlocuim mulțimea $\mathcal{A}(x)$ prin mulțimea $\mathcal{A}_b(x)$, ceea ce obținem este o *valoare bilateral relevantă* a lui x.

FONEME

Să notăm cu $\mathcal{F}(x)$ mulțimea valorilor relevante ale lui x și cu $\mathcal{F}_b(x)$ mulțimea valorilor bilateral relevante ale lui x. Prin definiție, cuplul $\{x, \mathcal{F}(x)\}$ constituie *fonemul asociat sunetului x* sau fonemul indus de x; tot prin definiție, cuplul $\{x, \mathcal{F}_b(x)\}$ constituie *fonemul bilateral asociat lui x* sau fonemul bilateral indus de x.

Vom spune că două sunete x și y sînt *fonematic echivalente* dacă $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$; x și y sînt *bilateral fonematic echivalente* dacă $\mathcal{F}_b(x) = \mathcal{F}_b(y)$. Să notăm cu $\mathcal{C}(x)$ mulțimea sunetelor fonematic echivalente cu x și cu $\mathcal{C}_b(x)$ mulțimea sunetelor bilateral fonematic echivalente cu x. Cuplul $\{\mathcal{C}(x), \mathcal{F}(x)\}$ este *fonemul general* asociat lui x sau fonemul general indus de x; fiecare sunet $y \in \mathcal{C}(x)$ este, prin definiție, un *alofon* sau o *variantă*. $\mathcal{C}(x)$ este *componenta fizică* iar $\mathcal{F}(x)$ este *componenta relațională* a fonemului respectiv. Cuplul $\{\mathcal{C}_b(x), \mathcal{F}_b(x)\}$ este *fonemul general bilateral* asociat sunetului x sau fonemul general indus de x.

NEUTRALIZARE ȘI ARHIFONEM

Fie v o valoare relevantă a lui x. Fie s un șir reperat care conține pe x și fie v' o valoare și y un sunet cu proprietățile 1°, 2° și 3° din definiția valorii relevante în raport cu s. Fie τ un șir reperat care conține pe x. Să presupunem că au loc proprietățile:

α) șirul τ' obținut din τ prin înlocuirea lui x cu y este reperat;

β) τ' este R-echivalent cu τ. În aceste condiții, spunem că x definește, în șirul τ, o *poziție de neutralizare a deosebirii dintre v și v'*. Dacă, pentru *orice* șir reperat s care conține pe x, pentru *orice* valoare v' și pentru *orice* sunet y cu proprietățile 1°, 2°, 3° din definiția valorii relevante în raport cu s, x definește, în șirul τ, o poziție de neutralizare a deosebirii dintre v și v', atunci spunem că x definește, în șirul τ, o poziție de

neutralizare absolută sau *o poziție de neutralizare a deosebirii dintre v și celelalte valori omogene cu v.*

Fiind date două foneme generale $(\mathcal{C}(x), \mathcal{F}(x))$ și $(\mathcal{C}(y), \mathcal{F}(y))$, numim *arhifonem asociat celor două foneme mulțimea*

$$\mathcal{F}(x) \cap \mathcal{F}(y).$$

Un arhifonem este *normal*, dacă fiecare dintre mulțimile

$$\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y), \quad \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x)$$

este formată dintr-un element și numai unul.

Dacă există un sunet z, astfel încît

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(x) \cap \mathcal{F}(y),$$

atunci spunem că arhifonemul definit de membrul al doilea al ultimei egalități este *realizat*. Rezultă că există un fonem, și anume $(\mathcal{C}(z), \mathcal{F}(z))$, care admite drept componentă relațională arhifonemul $\mathcal{F}(x) \cap \mathcal{F}(y)$.

Fiecărui tip de opoziție dintre $\mathcal{F}(x)$ și $\mathcal{F}(y)$ îi corespunde un anumit tip de arhifonem. Dacă $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$, atunci arhifonemul asociat este chiar $\mathcal{F}(x)$. Dacă $\mathcal{F}(x) \cap \mathcal{F}(y) = 0$, atunci arhifonemul asociat este vid. Dacă $\mathcal{F}(x) \subset \mathcal{F}(y)$, arhifonemul asociat este *realizat*; într-adevăr, putem lua $z = x$. Dacă $\mathcal{F}(y) \subset \mathcal{F}(x)$, arhifonemul asociat este de asemenea realizat, după cum se vede punînd $z = y$.

Prima parte a modelului de mai sus este asemănătoare cu prima parte a modelului care descrie corespondența dintre planul conținutului și planul expresiei. A se vedea și capitolul II din [5].

Primită la redacție la 20 februarie 1963

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОНЕМЫ

РЕЗЮМЕ

Исходя из точки зрения из [4], строится математическая модель фонемы. Модель состоит из трех частей. В первой части определяется понятие фонетической системы в отсутствии любых синтагматических соображений и эта система исследуется с точки зрения теории кодов. Фонетическая система состоит из четырех объектов: V, P, E и φ, где V — множество элементов, называемых *значениями*, P — разбиение V, E — множество элементов называемых *звуками*, а φ — отображение E в множестве подмножеств V, такое, что для любого элемента V_i разбиения P и любого $x \in E$, множество

$$V_i \cap \varphi(x)$$

состоит строго из одного элемента. Если $v \in \varphi(x)$, то скажем, что v является *значением* x.

Во второй части определяется, при помощи *отмеченных последовательностей*, понятие фонематической системы и устанавливаются теоремы о поведении значений звуков относительно различных типов контекстов. Множество S отмеченных последовательностей является по определению некоторой части свободной полугруппы порожденной множеством E. Любая подпоследовательность отмеченной последовательности является *допустимой*. Фонематическая система — это фонетическая система к которой добавлен объект S.

Значение $v \in \varphi(x)$ является *пертинентным* для $x \in E$, если существует значение v' и звук y такие, что $\varphi(y) = (\varphi(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$. О v и v' мы говорим, что они образуют *контрастивную пару* относительно x. Если заданы звук x и допустимая последовательность s, которая содержит x, то скажем, что $v \in \varphi(x)$ является для x *связанным значением относительно* s, если имеет место одно из условий: 1° v не есть пертинентное значение для x; 2° для любого значения v' такого, что v и v' образуют контрастивную пару относительно x и для любого звука y такого, что $\varphi(y) = (\varphi(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$, последовательность, полученная из s заменой x на y не является допустимой. Если для любой допустимой последовательности типа xz (соотв. yx, yxz), где x фиксированно, v является для x связанным относительно s значением, то скажем, что v является для x *связанным слева*, значением (соответственно *связанным справа*, соответственно *ближайше связанным*).

Если v является, для x, связанным и слева и справа, то оно *двусторонне связано* для x. Если v является для x связанным значением относительно любой допустимой последовательности, содержащей x то скажем, что v является для x *связанным значением*. Доказывается, что: 1° Если v является, для x, связанным справа, то оно для x и ближайше связанно, однако обратное не верно; 2° v является для x связанным значением, если и только если оно является для x ближайше связанным.

На третьем этапе построения рассматривается еще отношение эквивалентности R в множестве отмеченных последовательностей.

Пусть v несвязанное значение x. Скажем, что v является для x релевантным, если существуют отмеченная последовательность, содержащая x, значение v' и звук y такие, что: 1° $\varphi(y) = (\varphi(x - \{v\}) \cup \{v'\}$; 2° последовательность σ, полученная из s заменой x на y, отмечена; 3° σ не является R-эквивалентной s. Пара $\{x, \mathcal{F}(x)\}$, где $\mathcal{F}(x)$ множество релевантных значений x, называется (*индивидуальней*) *фонемой, соответствующей элементу* $x \in E$. Пусть $\mathcal{C}(x)$ множество звуков y, для которых $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$. Пара $\{\mathcal{C}(x), \mathcal{F}(x)\}$ является *общей фонемой*, соответствующей элементу x.

Определяются также понятия о *двусторонней фонеме*, о *нейтрализации* и об *архифонеме*.

UN MODÈLE MATHÉMATIQUE DU PHONÈME

RÉSUMÉ

Partant du point de vue exprimé dans [4], l'auteur construit un modèle mathématique du phonème. Ce modèle est composé de trois parties. Dans la première on définit la notion de système phonétique en l'absence de toutes considérations syntagmatiques et on étudie ce système au point de vue de la théorie des codes. Un système phonétique est formé de quatre objets V, P, E et φ, où V est un ensemble d'éléments dits *valeurs*, P une partition de V, E un ensemble d'éléments appelés *sons* et φ une application de E dans l'ensemble des parties de V, ayant la propriété que quel que soit le terme V_i de la partition P et quel que soit $x \in E$, l'ensemble

$$V_i \cap \varphi(x)$$

est formé exactement d'un élément. Si $v \in \varphi(x)$, nous dirons que v est *une valeur de* x.

Dans la seconde partie, on définit, par l'introduction des *suites répérées*, la notion de système phonémathique et on donne des théorèmes relatifs au comportement des valeurs des sons par rapport à différents types de contextes. L'ensemble S des suites répérées est, par définition, une certaine partie du semi-groupe libre engendré par E. Toute sous-suite d'une suite répérée est une suite *permise*. Un système phonémathique est un système phonétique auquel on a ajouté l'objet S.

La valeur $v \in \varphi(x)$ est *pertinente* pour $x \in E$ s'il existe une valeur v' et un son y tel que $\varphi(y) = (\varphi(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$. Au sujet de v et v' nous dirons qu'ils forment une *paire contrastive* par rapport à x. Etant donnés un son x et une suite permise s contenant x, on dira que $v \in \varphi(x)$ est, pour x, *une valeur liée par rapport à* s, si nous sommes en présence de l'une des deux situations suivantes : 1° v n'est pas une valeur pertinente de x ; 2° pour toute valeur v', telle que v et v' forment une paire contrastive par rapport à x et pour tout son y ayant la propriété $\varphi(y) = (\varphi(x) - \{v\}) \cup \{v'\}$, la suite obtenue de s en remplaçant x par y n'est pas permise.

Si pour toute suite permise s du type xz (respectivement yx, yxz), à x fixe, v est, pour x, une valeur liée par rapport à s, alors nous dirons que v est, pour x, une valeur *liée à gauche* (respectivement *liée à droite*, respectivement *proximement liée*).

Si v est, pour x, liée à gauche et à droite, alors v est *bilatéralement liée* pour x. Si v est, pour x, une valeur liée par rapport à toute suite s permise, contenant x, alors nous dirons que v est, pour x, une valeur liée. On démontre que: 1° Si v est, pour x, liée à droite, alors v est, pour x, proximement liée, mais non pas aussi réciproquement ; 2° v est, pour x, une valeur liée si et seulement si elle est, pour x, proximement liée.

Dans la troisième étape de la construction on considère en outre une relation R d'équivalence dans l'ensemble des suites répérées.

Soit v une valeur non liée de x. Nous dirons que v est, pour x, *relevante*, s'il existe une suite répérée s contenant x, une valeur v' et un son y, de sorte que $1°\ \varphi(y)=(\varphi(x)-\{v\})\cup\{v'\}$; $2°$ la suite σ obtenue à partir de s en remplaçant x par y est répérée ; $3°$ σ n'est pas R — équivalent à s. On appelle *phonème* (*individuel*) *associé à* $x\in E$ le couple $\{x, \mathfrak{F}(x)\}$, où $\mathfrak{F}(x)$ est l'ensemble des valeurs relevantes de x. Soit $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des sons y tels que $\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{F}(y)$. Le couple $\{\mathcal{C}(x), \mathfrak{F}(x)\}$ est le *phonème général associé* à x.

On définit aussi les notions de *phonème bilatéral*, de *neutralisation* et *d'archiphonème*.

BIBLIOGRAFIE

1. Batóg Tadeusz, *Logiczna rekonstrukcja pojęcia fonemu*. Studia Logica, XI, 139—183, (1961).
2. — *Critical Remarks on Greenberg's Axiomatic Phonology*. Studia Logica, XII, 195—205, (1961).
3. Greenberg J. H. *An Axiomatization of the Phonologic Aspect of Language* : *Symposium on Sociological Theory*. L. Gross, Evanston, New York, 1959.
4. Jakobson R., Fant C. G. M., Halle M., *Preliminaries to Speech Analysis* : *the Distinctive Features and their Correlates*. 3-rd pr. Boston (Mass.), 1955.
5. Marcus Solomon, *Modele matematice în lingvistică*. Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
6. Martinet André, *Economie des changements phonétiques*. Berna, 1955.
7. Peterson Gordon E., Harary Frank, *Fondations of Phonemic Theory. Structure of Language and its Mathematical Aspects*, PSAM, Amer. Math. Soc., 139—165, (1961).
8. Ревзин И. И., *Модели языка*. Изд. Акад. Наук СССР, Москва, 1962.
9. Шаумян С. К., *Проблемы теоретической фонологии*. Изд. Акад. Наук С.С.С.Р., Москва, 1962.

O GENERALIZARE A FUNCȚIEI θ ȘI FOLOSIREA EI LA STUDIUL FUNCȚIILOR ELIPTICE

DE

N. PRAPORGESCU

După cum se știe, cu ajutorul funcției θ a lui Hermite se pot construi funcțiile fundamentale ale teoriei funcțiilor eliptice, în felul cum a fost concepută de Weierstrass.

În această lucrare folosim o formă gneralizată a funcției θ și construim toate celelalte funcții precedent menționate, precum și formulele de exprimare a acestora cu ajutorul funcțiilor lui Weierstrass. Acestea servesc la studiul funcțiilor eliptice, ale căror perioade fundamentale sînt un multiplu al perioadelor fundamentale ale funcțiilor eliptice obișnuite și *sînt situate în planuri diferite.*

§ 1. FUNCȚIA θ GENERALIZATĂ

1. Ne propunem să găsim funcții de forma

$$\theta(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\alpha_n v + \beta_n \tau + \gamma_n} \tag{1.1}$$

care să verifice ecuația

$${}_q\theta(v + q\tau, \tau) = {}_q\theta(v, \tau)\ e^{av + b\tau + c}, \tag{1.2}$$

v fiind o variabilă complexă iar τ, α, β, γ, a, b, c și q constante; q exceptează valorile ± 1 și $\pm i$.

Înlocuind pe (1.1) în (1.2) și schimbînd pe n cu $n - 1$, găsim că este suficient ca α, β, γ să satisfacă ecuațiile cu diferențe

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n + a, \tag{1.3}$$

$$q\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} = \beta_n + b, \tag{1.4}$$

$$\gamma_{n-1} = \gamma_n + c. \tag{1.5}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor (1.3) și (1.5) sînt

$$\alpha_n = -an + \alpha_0, \tag{1.6}$$

$$\gamma_n = -cn + \gamma_0, \tag{1.7}$$

α_0 și γ_0 fiind constante arbitrare, iar ecuația (1.4) scrisă sub forma

$$\beta_n - \beta_{n-1} = q\ \alpha_n + aq - b$$

are soluția generală

$$\beta_n = -\frac{1}{2} a q n^2 + \left(\frac{1}{2} aq - b + \alpha_0 q\right) n + \beta_0, \tag{1.8}$$

β_0 fiind o constantă arbitrară.

Convergența seriei (1.1) astfel obținută se demonstrează ca și pentru funcția lui Hermite ${}_1\theta$. Într-adevăr, lăsînd la o parte factorii independenți de n termenul general al acestei serii este

$$e^{An - \frac{1}{2} a q b n^2},$$

unde, pentru scurtare,

$$A = -av + \left(\frac{aq}{2} - b\right)\tau - c + \alpha_0 q \tau.$$

Dacă punem

$$\tau = \tau_1 + i\tau_2,\ A = A_1 + iA_2,\ a = a_1 + ia_2,$$

avem

$$\left| e^{An - \frac{a\tau}{2} n^2} \right| = e^{A_1 n - \frac{a_1\tau_1 - a_2\tau_2}{2} n_2} \leqslant e^{-n}$$

pentru $n \geqslant 1$, astfel că

$$n \geqslant 2 \frac{1 + A_2'}{a_1 b_1 - a_2 b_2},$$

A_2' fiind cea mai mare valoare pe care o poate lua A_2 în domeniul de variație a cantităților ce intră în A. Pentru $n < 0$ se găsește

$$-n > 2 \frac{1 - A_2'}{a_1 b_1 - a_2 b_2}.$$

În ambele cazuri se presupune că numitorul este pozitiv.

2. În general, avem formula

$${}_q\theta(v + lq\tau, \tau) = {}_q\theta(v, \tau)\, e^{l(av + b\tau + c) + \frac{l(l-1)}{2} aq\tau}, \tag{1.9}$$

l fiind un număr întreg pozitiv.

3. Dacă luăm

$$a = -\frac{2\pi i}{q},\ b = -\frac{\pi i}{q},\ c = -\frac{\nu\pi i}{q}$$
$$\alpha_0 = \mu\pi i,\ \beta_0 = \left(\frac{\mu q}{2}\right)^2 \pi i,\ \gamma_0 = 0, \tag{1.10}$$

din (1.6), (1.7) și (1.8) rezultă

$$\alpha_n = \pi i\left(\frac{2n}{q} + \mu\right),$$
$$\beta_n = \pi i\left\{\left(\frac{\mu q}{2}\right)^2 + \left(\mu q - 1 + \frac{1}{q}\right)n + n^2\right\} = \tag{1.11}$$
$$= \pi i\left|\left(\frac{\mu q}{2} + n\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{q}\right)n\right|,$$
$$\gamma_n = \pi i\frac{\nu n}{q},$$

și (1.1) devine :

$${}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i}{q}\left(n+\frac{\mu q}{2}\right)v + \pi i\tau\left[\left(n+\frac{\mu q}{2}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{q}\right)n\right] + \frac{\pi i\nu n}{q}}. \tag{1.12}$$

Cu substituția

$$v = qv' + \frac{1}{2}(q-1)\tau \tag{1.13}$$

sau

$$v' = q'v + \frac{1}{2}(q'-1)\tau\ \left(q' = \frac{1}{q}\right)$$

și notațiile

$$\mu' = \mu q,\ \nu' = \frac{\nu}{q},\quad Q_{\mu'} = e^{\frac{\pi i\mu'}{2}(1-q')\tau} = e^{\frac{\pi i\mu}{2}(q-1)\tau} = Q_{\mu q} \tag{1.14}$$

relația (1.12) se scrie

$${}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau) = \sum_n e^{2\pi i v'\left(n+\frac{\mu'}{2}\right) + \pi i\tau\left(n+\frac{\mu'}{2}\right) + \pi i\nu' n}\cdot Q_{\mu'}, \tag{1.15}$$

iar (1.9) devine

$${}_q\theta(v + lq\tau, \tau) = {}_q\theta_{\mu\nu}\cdot(v,\tau)\, e^{l\left[-\frac{2\pi i}{q}v - \frac{\pi i}{q}\tau - \frac{\pi i}{q}\nu\right] - \frac{l(l-1)}{2}\frac{2\pi i}{q}q\tau} =$$
$$= {}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau)\, e^{-\frac{\pi i}{q}l(2v + l'\tau + \nu)},\qquad (l' = 1 - q + ql) \tag{1.16}$$

Funcția ${}_q\theta_{\mu\nu}$ se poate studia cu ajutorul funcției ${}_1\theta_{\mu'\nu'}(v', \tau)$. Se constată apoi că ${}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau)$ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left({}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau)\, Q_{\mu'}^{-1}(\tau)\right) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}\left({}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau)\cdot Q_{\mu'}^{-1}(\tau)\right),$$

precum și relațiile

$${}_q\theta_{\mu+2q',\nu}(v) = {}_q\theta_{\mu\nu}(v)\, e^{-\pi i \nu'}, \quad {}_q\theta_{\mu,\nu+2q}(v) = {}_q\theta_{\mu\nu}(v)$$

$${}_q\theta_{\mu+\bar{\mu}'\,q',\,\nu+\nu'\,q}(v)\, Q^{-1}_{\mu q+\bar{\mu}'q'}(\tau) = {}_q\theta_{\mu\nu}\left(v + q\frac{\nu'+\mu'\tau}{2}\right) Q^{-1}_{\mu q}(\tau) \times$$

$$\times\, e^{\pi i q' \bar{\mu}'\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right) + \pi i\left(\frac{\bar{\mu}'}{2}\right)^2 \tau - \pi i \mu' \frac{\bar{\nu}'}{2}}, \tag{1.17}$$

pentru $\mu', \nu', \bar{\mu}', \bar{\nu}' = 0, 1, 2$, deduse din ecuația și relațiile corespunzătoare ale lui ${}_1\theta(v', \tau)$ ținînd seama și de (1.12), (1.13) și (1.14) [1]*); (1.14) este cuprinsă în (1.16) pentru $l = 1$, $\bar{\mu}' = 2$, $\bar{\nu}' = 0$.

§ 2. FUNCȚIILE ${}_q\vartheta$

1. Funcțiile ${}_q\vartheta$ se definesc la fel ca ${}_1\vartheta$ din teoria clasică:

$${}_q\vartheta_1(v) = -i_q\theta_{\frac{1}{q},q}(v,\tau), \quad {}_q\vartheta_2(v) = {}_q\theta_{\frac{1}{q},0}(v,\tau), \tag{2.1}$$

$${}_q\vartheta_3(v) = {}_q\theta_{00}(v,\tau), \quad {}_q\vartheta_0(v) = {}_q\theta_{0q}(v,\tau). \tag{2.2}$$

2. Cu notațiile

$$z = e^{\frac{\pi i}{q}v}, \quad h = e^{\frac{\pi i}{q}\tau}, \tag{2.3}$$

avem

$${}_q\vartheta_3(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^{n(1-q+nq)}\, z^{2n}, \tag{2.4}$$

precum și

$${}_q\vartheta_0(v) = \sum_n (-1)^n\, h^{n(1-q+nq)}\, z^{2n},$$

$${}_q\vartheta_1(v) = -i\sum_n (-1)^n\, h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+q\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}\, z^{2n+1},$$

$${}_q\vartheta_2(v) = \sum_n h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+q\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)}\, z^{2n+1}.$$

*) p. 198.

Acestea se mai scriu sub forma:

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_3(v) &= 1 + 2h\cos\frac{2\pi v}{q} + 2h^{2(1+q)}\cos\frac{4\pi v}{q} + 2h^{3(1+2q)}\cos\frac{6\pi v}{q} + \cdots \\
{}_q\vartheta_0(v) &= 1 - 2h\cos\frac{2\pi v}{q} + 2h^{2(1+q)}\cos\frac{4\pi v}{q} - 2h^{3(1+2q)}\cos\frac{6\pi v}{q} + \cdots \qquad (2.5) \\
{}_q\vartheta_2(v) &= 2h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)}\cos\frac{\pi v}{q} + 2h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)}\cos\frac{3\pi v}{q} + 2h^{\frac{5}{2}\left(1+\frac{3q}{2}\right)}\cos\frac{5\pi v}{q} + \cdots \\
{}_q\vartheta_1(v) &= 2h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)}\sin\frac{\pi v}{q} - 2h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)}\sin\frac{3\pi v}{q} + 2h^{\frac{5}{2}\left(1+\frac{3q}{2}\right)}\sin\frac{5\pi v}{q} + \cdots
\end{aligned}
$$

Pentru $v = 0$ avem

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_3(0) &= 1 + 2h + 2h^{2(1+q)} + 2h^{3(1+2q)} + \cdots \\
{}_q\vartheta_0(0) &= 1 - 2h + 2h^{2(1+q)} - 2h^{3(1+2q)} + \cdots \qquad (2.6) \\
{}_q\vartheta_2(0) &= 2h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)} + 2h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)} + 2h^{\frac{5}{2}\left(1+\frac{3q}{2}\right)} + \cdots \\
{}_q\vartheta_1'(0) &= \frac{2\pi}{q}\left[h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)} - 3h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)} + 5h^{\frac{5}{2}\left(1+\frac{3q}{2}\right)} - \cdots\right].
\end{aligned}
$$

În baza lui (1.15) și (2.1) se constată că avem și relațiile:

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_0(v) &= {}_1\vartheta_0(v'), \\
{}_q\vartheta_1(v) &= {}_1\vartheta_1(v')\,Q_1, \qquad (2.7) \\
{}_q\vartheta_2(v) &= {}_1\vartheta_2(v')\,Q_1, \\
{}_q\vartheta_3(v) &= {}_1\vartheta_3(v'),
\end{aligned}
$$

unde $Q_1 = h^{\frac{1}{2}(q-1)} = e^{\frac{\pi i}{2q}(q-1)\tau}$, precum și

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_3(v) &= 1 + 2h\cos\frac{2\pi v}{q} + 2h^{2(1+q)}\cos\frac{4\pi v}{q} + \cdots = \\
&= 1 + 2h\cos 2\pi v' + 2h^{2(1+q)}\cos 4\pi v' + \cdots = {}_1\vartheta_3(v'), \\
{}_q\vartheta_0(v) &= 1 - 2h\cos\frac{2\pi v}{q} + 2h^{2(1+q)}\cos\frac{4\pi v}{q} - \cdots = \qquad (2.8) \\
&= 1 - 2h\cos 2\pi v' + 2h^{2(1+q)}\cos 4\pi v' - \cdots = {}_1\vartheta_0(v'), \\
Q_1^{-1}\,{}_q\vartheta_2(v) &= \left[2h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)}\cos\frac{\pi v}{q} + 2h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)}\cos\frac{3\pi v}{q} + \cdots\right]Q_1^{-1} = \\
&= 2h^{\frac{1}{4}}\cos\pi v' + 2h^{\frac{q}{4}}\cos 3\pi v' - \cdots = {}_1\vartheta_2(v'), \\
Q_1^{-1}\,{}_q\vartheta_1(v) &= \left[2h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)}\sin\frac{\pi v}{q} - 2h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)}\sin\frac{3\pi v}{q} + \cdots\right]Q_1^{-1} = \\
&= 2h^{\frac{1}{4}}\sin\pi v' - 2h^{\frac{q}{4}}\sin 3\pi v' + \cdots = {}_1\vartheta_1(v').
\end{aligned}
$$

3. Cu ajutorul formulelor de transformare (1.13), (2.7) și cu notațiile (2.3) se deduc următoarele dezvoltări ale funcțiilor ${}_q\vartheta$ din acelea ale funcțiilor ${}_1\vartheta$, [1]*):

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_0(v) &= C\prod_{\nu}(1-h^{q(\nu-1)+1}z^{2})(1-h^{q(\nu+1)-1}z^{-2}),\\
Q_1^{+1}\,{}_q\vartheta_1(v) &= C(-i)\prod_{\varrho}h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}(z-z^{-1})(1-h^{q(\varrho-1)+1}z^{2})\\
&\qquad (1-h^{q(\varrho+1)-1}z^{-2}),\\
Q_1^{+1}\,{}_q\vartheta_2(v) &= C\prod_{\varrho}h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}(z+z^{-1})(1+h^{q(\varrho-1)+1}z^{2})(1+h^{q(\varrho+1)-1}z^{-2}),\\
{}_q\vartheta_3(v) &= C\prod_{\nu}(1+h^{q(\nu-1)+1}z^{2})(1+h^{(\nu+1)-1}z^{-2}),
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

unde $\nu = 1, 3, 5, \ldots$ și $q = 2, 4, 6, \ldots$

Pentru $v = 0$ din (2.9) obținem

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_3(0) &= C\prod_{\nu}\left(1+h^{q(\nu-1)+1}\right)\left(1+h^{q(\nu+1)-1}\right),\\
{}_q\vartheta_0(0) &= C\prod_{\nu}(1-h^{q(\nu-1)+1})(1-h^{q(\nu+1)-1})\\
Q_1\,{}_q\vartheta_1'(0) &= C\frac{2\pi}{q}h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}\prod_{\varrho}(1-h^{q(\varrho-1)+1})(1-h^{q(\varrho+1)-1}),\\
Q_1\,{}_q\vartheta_2(0) &= Ch^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}\prod_{\varrho}(1+h^{q(\varrho-1)+1})(1+h^{q(\varrho+1)-1}).
\end{aligned}
$$

Din acestea și din (2.6) deducem:

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_1'(0) &= C\frac{2\pi}{q}h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}\prod_{\varrho}(1-h^{q(\varrho-1)+1})(1-h^{q(\varrho+1)-1})\,Q_1^{-1} =\\
&= \frac{2\pi}{q}\left[h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{q}{2}\right)}-3h^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{q}{2}\right)}+5h^{\frac{5}{2}\left(1+3\frac{q}{2}\right)}-\ldots\right]
\end{aligned}
$$

care generalizează formula corespunzătoare din teoria clasică pentru $q=1$.

4. Relațiile (2.4) și (2.5) se mai pot scrie și sub forma **)

$${}_q\vartheta_3(v) = \sum_n h^{n^2q}\,e^{\frac{2\pi i n}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},$$

*) p. 202.

**) $n[1-q+nq+q-1] = n^2q,$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\left(1+q\left(n-\frac{1}{2}\right)+\left(q-1\right)\right]=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2q.$$

$$_q\vartheta_0(v) = \sum_n (-1)^n h^{n^2 q} e^{\frac{2\pi i n}{q}\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},$$

$$_q\vartheta_1(v) = \sum_n (-i)(-1)^n h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 q} e^{\frac{2\pi i n}{q}\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},$$

$$_q\vartheta_2(v) = \sum_n h^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 q} e^{\frac{2\pi i n}{q}\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}$$

și apoi

$$_q\vartheta_3(v) = 1 + 2h^q \cos\frac{2\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} +$$

$$+ 2h^{2^2 q} \cos\frac{4\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} + \cdots$$

$$_q\vartheta_0(v) = 1 - 2h^q \cos\frac{2\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} +$$

$$+ 2h^{2^2 q} \cos\frac{4\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} - \cdots$$

$$_q\vartheta_2(v) = 2h^{\frac{q}{4}} \cos\frac{\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} +$$

$$+ 2h^{\left(\frac{3}{2}\right)^2 q} \cos\frac{3\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} + \cdots$$

$$_q\vartheta_1(v) = 2h^{\frac{q}{4}} \sin\frac{\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} -$$

$$- 2h^{\left(\frac{3}{2}\right)^2 q} \sin\frac{3\pi\left(v - \frac{1}{2}(q-1)\tau\right)}{q} + \cdots$$

De asemenea, (2.9) se mai scrie

$$
{}_q\vartheta_0(v) = C\prod_\nu (1-h^{q\nu})\, e^{\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)} \times (1-h^{q\nu})\, e^{-\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},
$$

$$
Q_1\,{}_q\vartheta_1(v) = C(-i)\,h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}(z-z^{-1})\prod_g (1-h^{qg})\, e^{\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)} \times
$$

$$
\times (1-h^{qg})\, e^{-\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},
$$

$$
Q_1\,{}_q\vartheta_2(v) = Ch^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}}(z+z^{-1})\prod_g (1+h^{qg})\, e^{\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)} \times
$$

$$
\times (1+h^{qg})\, e^{-\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)},
$$

$$
{}_q\vartheta_3(v) = C\prod_\nu (1+h^{q\nu})\, e^{\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)\tau\right)} \times (1+h^{q\nu})\, e^{-\frac{2\pi i}{q}\left(v-\frac{1}{2}(q-1)q\right)}.
$$

Pentru $v = \frac{1}{2}(q-1)\tau$, din relațiile precedente deducem identitățile*)

$$
\begin{aligned}
{}_q\vartheta_3\left(\frac{1}{2}(q-1)\tau\right) &= 1 + 2h^q + 2h^{2^2 q} + \cdots \\
&= C\prod_\nu (1+h^{q\nu})^2 \\
{}_q\vartheta_0\left(\frac{1}{2}(q-1)\tau\right) &= 1 - 2h^q + 2h^{2^2 q} + \cdots \qquad (2.10) \\
&= C\prod_\nu (1-h^{q\nu})^2 \\
Q_1\,{}_q\vartheta_1'\left(\frac{1}{2}(q-1)\tau\right) &= \frac{2\pi}{q}\left[h^{\frac{q}{4}} - 3h^{\left(\frac{3}{2}\right)^2 q} + \cdots\right] Q_1 = \\
&= \frac{2\pi}{q} Ch^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}} \prod_g (1-h^{qg})^2 \\
Q_1\,{}_q\vartheta_2\left(\frac{1}{2}(q-1)\tau\right) &= \left[2h^{\frac{q}{4}} + 2h^{\left(\frac{3}{2}\right)^2 q} + 2h^{\left(\frac{5}{2}\right)^2 q} + \cdots\right] Q_1 = \\
&= 2C\prod_g h^{-\frac{q}{4}+\frac{1}{2}} (1+h^{qg})^2 .
\end{aligned}
$$

Constanta C se determină înlocuind aceste valori în (4.15).

*) $q(\nu-1)+1+q-1 = (q\nu,\quad q(\nu+1)-1-q+1 = q\nu,\quad q(g-1)+1+q-1 = qg,\quad q(g+1)-1-q+1 = qg$.

5. Din (2.7), ținînd seama de (1.13), construim următoarele tabele de transformare ale funcțiilor ${}_q\vartheta$ deduse din acele ale funcțiilor ${}_1\vartheta$ [1]*).

1	2	3	4
	$v+\frac{q}{2}$	$v+\frac{q\tau}{2}$	$v+\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}$
${}_q\vartheta_1$	${}_q\vartheta_2$	$im_1\vartheta_0$	$m_q\vartheta_3$
${}_q\vartheta_2$	${}_q\vartheta_1$	$m_q\vartheta_3$	$-im_q\vartheta_0$
${}_q\vartheta_3$	${}_q\vartheta_0$	$m_q\vartheta_2 Q_1^{-1}$	$im_1\vartheta_1 Q_1^{-1}$
${}_q\vartheta_0$	${}_q\vartheta_3$	$im_q\vartheta_1 Q_1^{-1}$	$m_q\vartheta_2 Q_1^{-1}$

(2.11)

$$h^{\frac{q}{4}-\frac{1}{2}} Z^{-1} = e^{\frac{\pi i}{q}\left[\left(\frac{q}{4}-\frac{1}{2}\right)\tau - v\right]}$$

	5	6	7
	$v+q$	$v+q\tau$	$v+q+q\tau$
${}_q\vartheta_1$	$-{}_q\vartheta_1$	$-K_q\vartheta_1$	$K_q\vartheta_1$
${}_q\vartheta_2$	$-{}_q\vartheta_2$	$K_q\vartheta_2$	$-K_q\vartheta_2$
${}_q\vartheta_3$	${}_q\vartheta_3$	$K_q\vartheta_3$	$K_q\vartheta_3$
${}_q\vartheta_0$	${}_q\vartheta_0$	$-K_0\vartheta_0$	$-K_q\vartheta_0$

(2.12)

$$K = h^{-1} z^{-2} = e^{-\frac{\pi i}{q}(\tau+2v)}$$

Aceste tabele se aplică astfel: ${}_q\vartheta_2\left(v+\frac{q}{2}\right) = i\ {}_q\vartheta_1(v)$ (col. 2); ${}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q\tau}{2}\right) = -im\ {}_q\vartheta_0(v)$ (col. 3); ${}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau+\frac{q}{2}+\frac{q\pi}{2}\right) = im\ {}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}$ (col. 4); ${}_q\vartheta_0(v+q+q\tau) = K\ {}_q\vartheta_0(v)$ (col. 7); ${}_q\vartheta_3\left(\frac{q}{2}+\right.$ $\left.+\frac{q-1}{2}\tau\right) = {}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)$ (col. 1); ${}_q\vartheta_0\left(\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}+\frac{q-1}{2}\tau\right) =$ $= m\ {}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}$ (col. 4).

*) p. 199.

§ 3. FUNCȚIILE ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$ ȘI ${}_q\wp$

1. Amintim că funcțiile ${}_1\sigma(u)$ sînt definite prin relațiile [1]*):

$$ {}_1\sigma(u') = 2\omega_1' \, {}_1d(u') \cdot \frac{{}_1\vartheta_1(v')}{{}_1\vartheta_1'(0)} \tag{3.1} $$

$$ {}_1\sigma_\alpha(u') = {}_1d(u') \cdot \frac{{}_1\vartheta_{\alpha+1}(v')}{{}_1\vartheta_{\alpha+1}(0)}, \quad (\alpha = 1, 2, 3,) $$

$$ {}_1\vartheta_4(v') = {}_1\vartheta_0(v'), \quad v' = \frac{u'}{2\omega_1'}, \quad d(u') = e^{{}_1\eta_1 \frac{u'^2}{2\omega_1'}} \tag{3.2} $$

ω_1' și ω_2' fiind constante așa ca $\tau = \dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} = r' + s'i$ $(s' > 0)$. Analog definim și funcțiile ${}_q\sigma(u)$ astfel

$$ {}_q\sigma_0(u) = 2\omega_1 \, {}_qd(u) \cdot \frac{{}_q\vartheta_1(v)}{{}_q\vartheta_1'\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \tag{3.3} $$

$$ {}_q\sigma_\alpha(u) = {}_qd(u) \frac{{}_q\vartheta_{\alpha+1}(v)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \tag{3.4} $$

$$ v = \frac{u}{2q'\omega_1}, \quad {}_qd(u) = e^{{}_q\eta_1 \cdot \frac{u^2}{2\omega_1 q'}}, $$

ω_1 și ω_2 fiind de asemenea constante proporționale cu ω_1' și ω_2', așa că $\tau = \dfrac{\omega_2'}{\omega_1'} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, iar ${}_q\eta_1$ este o constantă. Pentru simplificare factorul de proporționalitate îl luăm egal cu q, iar ${}_q\eta_1$ se va defini mai jos.

Din (1.13) deducem formulele de transformare a variabilelor u și u':

$$ \begin{aligned} u &= qu' - (q'-1)\,\omega_2 = qu' + (q-1)\,\omega_2', \\ u' &= q'(u + (q'-1)\,\omega_2) = q'(u - (q-1)\,\omega_2') = \\ &= q'u + (q'-1)\,\omega_2', \end{aligned} \tag{3.5} $$

relații reciproce ca și (1.13).

În baza relațiilor (2.2), (3.1) și (3.3) avem

$$ \frac{{}_q\sigma_0(u)}{2\omega_1 \cdot \dfrac{{}_qd(u)}{{}_q\vartheta_1'\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}} = \frac{{}_1\sigma_0(u')}{2\omega_1' \dfrac{{}_1d(u')}{{}_1\vartheta_1'(0)}}. $$

*) p. 194.

$$\frac{{}_q\sigma_1(u)}{\dfrac{{}_qd(u)}{{}_q\vartheta_2\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}} = \frac{{}_1\sigma_1(u')}{\dfrac{{}_1d(u')}{{}_1\vartheta_2(0)}} \cdot$$

$$\frac{{}_q\sigma_\beta(u)}{\dfrac{{}_qd(u)}{{}_q\vartheta_{\beta+1}\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)}} = \frac{{}_1\sigma_\beta(u')}{\dfrac{{}_1d(u')}{{}_q\vartheta_{\beta+1}(0)}}, \qquad (\beta = 2,3)$$

din care deducem:

$$\begin{aligned} {}_q\sigma_0(u) &= K_0(u') \cdot {}_1\sigma_0(u') \cdot Q_1 \\ {}_q\sigma_1(u) &= K_1(u') \cdot {}_1\sigma_1(u') \cdot Q_1 \\ {}_q\sigma_\beta(u) &= K_\beta(u') \cdot {}_1\sigma_\beta(u'), \end{aligned} \tag{3.6}$$

în care în baza lui (3.5) avem

$$K_0(u) = \frac{\omega_1}{\omega_1'} \cdot \frac{{}_1\vartheta_1'(0)}{{}_q\vartheta_1'\left(\dfrac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{{}_qd(u)}{{}_1d(q'u + (q-1)\omega_2')}, \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.7}$$

2. Funcțiile ${}_q\zeta$ și ${}_q\wp$ se definesc ca și ${}_1\zeta$ și ${}_1\wp$ [1*)]

$${}_q\zeta(u) = \frac{d}{du}(\lg {}_q\sigma_0(u))$$

$${}_q\wp(u) = -\frac{d}{du}({}_q\zeta(u))$$

și în baza lui (3.1) și (3.3) avem:

$$\frac{{}_qd(u)}{{}_1d(u')} = e^{q\eta_1\frac{u^2}{2\omega_1\omega_1'} - {}_1\eta_1\frac{u'^2}{2\omega_1'}}$$

$$\frac{d}{du}\left(\lg\frac{{}_qd(u)}{{}_1d(u')}\right) = 2\left(q\frac{\eta_1 q}{2\omega_1} - {}_1\eta_1\frac{q'}{2\omega_1}\right)u - {}_1\eta_1 q'(q'-1)\omega_2$$

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\lg\frac{{}_qd(u)}{{}_1d(u')}\right) = {}_q\eta_1\frac{q}{\omega_1} - {}_1\eta_1\frac{q'}{\omega_1},$$

deci

$${}_q\zeta(u) = {}_q\zeta(qu' - (q'-1)\omega_1) = {}_1\zeta(u')\,q' + Cu + C', \tag{3.8}$$

unde

$$C = {}_q\eta_1\frac{q}{\omega_1} - {}_1\eta_1\frac{q'}{\omega_1}, \quad C' = -{}_1\eta_1\frac{q'}{\omega_1}(q'-1)\omega_2$$

*) p. 180.

și apoi

$$ {}_q\wp(u) = q'^2\, {}_1\wp(u') - C\,. \tag{3.9} $$

Din aceasta, în baza lui (3.5), deducem

$$ {}_q\wp(u + 2q\omega_1') = {}_q\wp(u) \text{ și } {}_q\wp(u + 2q\omega_2') = {}_q\wp(u)\,; $$

perioadele funcției ${}_q\wp(u)$ sînt prin urmare

$$ 2\omega_1 = 2q\omega_1' \text{ și } 2\omega_2 = 2q\omega_2' \tag{3.10} $$

și coeficientul de proporționalitate mai sus-menționat este bine luat egal cu q.

De asemenea, din (3.8) ținînd seama de (3.10) obținem relațiile

$$ {}_q\zeta(\omega_1 - (q'-1)\omega_2) - C(\omega_1 - q' - 1)\omega_2 - C' = {}_q\eta_1 = {}_1\eta_1 q' $$
$$ {}_q\zeta(\omega_2 - (q'-1)\omega_2) - C(\omega_2 - (q'-1)\omega_2) - C' = {}_q\eta_2 = {}_1\eta_2 q' $$

care definesc pe ${}_q\eta_1$ și ${}_q\eta_2$. Avem apoi

$$ {}_q\eta_1\omega_2 - {}_q\eta_2\omega_1 = qq'({}_1\eta_1\omega_2' - {}_1\eta_2\omega_1') = \frac{\pi i}{2}. \tag{3.11} $$

Avem de asemenea

$$ {}_qe_1 = {}_q\wp(\omega_1 + (1-q')\omega_2) = {}_1e_1 q'^2 - C $$
$$ {}_qe_3 = {}_q\wp(\omega_2 + (1-q')\omega_2) = {}_1e_3 q'^2 - C $$
$$ {}_qe_2 = {}_q\wp(\omega_1 + \omega_2 + (1-q')\omega_2) = {}_1e_2 q'^2 - C. $$

Perechile de perioade $2\omega_1$, $2\omega_2$ și $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ nu sînt echivalente și funcțiile ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$ și ${}_q\wp$ construite cu $2\omega_1$ și $2\omega_2$ în planul lui u nu sînt identice cu ${}_1\sigma$, ${}_1\zeta$ și ${}_1\wp$ construite cu $2\omega_1'$ și $2\omega_2'$ în planul lui u', cum se constată și din definiția lor, pentru $q = 1$.

Într-adevăr, se demonstrează [1]*) că pentru ca două perechi de perioade să fie echivalente este necesar și suficient să existe două ecuații

$$ \omega_1 = \alpha\omega_1' + \beta\omega_2',\quad \omega_2 = \gamma\omega_1' + \vartheta\omega_2', $$

în care numerele întregi α, β, γ, ϑ să satisfacă relația

$$ \alpha\vartheta - \beta\gamma = \pm 1. $$

și că numai în acest caz funcțiile fundamentale pot să coincidă. În cazul nostru relația precedentă devine $q^2 = \pm 1$, deci $q = \pm 1$ și $q = \pm i$ valori care sînt excluse. Chiar dacă coeficientul de proporționalitate ar fi fost luat egal cu unitatea și condiția precedentă ar fi fost satisfăcută, funcțiile fundamentale ar fi identice, numai dacă și $q = 1$, fiindcă numai astfel v și u ar fi identici cu v' și u', adică planurile lor ar coincide.

*) p. 186.

3. *Formulele de transformare ale funcției* ${}_q\sigma_0(u)$. Dacă în (3.3) înlocuim succesiv pe u prin $u+\omega_1$, $u+\omega_1+\omega_2$, $u+\omega_2$ respectiv pe v cu $v+\frac{q}{2}$, $v+\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}$, $v+\frac{q\tau}{2}$, în baza relației (3.11) obținem

$$ {}_q\sigma_0(u+\omega_1) = e^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{q\,\omega_1 q'}} \cdot e^{{}_q\eta_1 uq}\, e^{{}_q\eta_1 \frac{\omega_1^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q}{2}\right) \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} $$

$$ {}_q\sigma_0(u+\omega_1+\omega_2) = e^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{2\omega_1 q'} + 2\,{}_q\eta_1 \frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1 q'} + \frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q}{2}+\right. $$

$$ \left.+\frac{q\tau}{2}\right) \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = $$

$$ = e^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{2\omega_1 q'} + {}_q\eta_1 u + 2\,{}_q\eta_1 \frac{\omega_2}{2\omega_1 q'} u + \frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}\right) \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = $$

$$ = e^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{2\omega_1 q'}}\, e^{\frac{\pi i q u}{2\omega_1}}\, e^{({}_q\eta_1 + {}_q\eta_2) uq}\, e^{{}_q\eta_1 \frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}\right) \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} $$

$$ {}_q\sigma_0(u+\omega_2) = e^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{2\omega_1 q'} + 2\,{}_q\eta_1 \frac{\omega_2 u q}{2\omega_1} + \frac{\omega_2^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1\left(v+\frac{q\tau}{2}\right) \cdot \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}. $$

Însemnăm apoi

$$ {}_q\sigma_1(u) = {}_q\sigma_0(u+\omega_1)\, e^{-{}_q\eta_1 uq}\, e^{-{}_q\eta_1 \frac{\omega_1^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right) \frac{2\omega_1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q}{2}\right)} = $$

$$ = \frac{{}_q\sigma_0(u+\omega_1)}{{}_q\sigma_0(\omega_1)}\, e^{-{}_q\eta_1 uq}\, \frac{{}_q\vartheta_2(0)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}, $$

$$ {}_q\sigma_2(u) = {}_q\sigma_0(u+\omega_1+\omega_2)\, e^{-({}_q\eta_1+{}_q\eta_2) uq}\, e^{-{}_q\eta_1 \frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2\omega_1 q'}} \cdot \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{2\omega_1} \frac{1}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q}{2}+\frac{q\tau}{2}\right)} = $$

$$ = \frac{{}_q\sigma_0(u+\omega_1+\omega_2)}{{}_q\sigma_0(\omega_1+\omega_2)}\, e^{-({}_q\eta_1+{}_q\eta_2) uq}\, \frac{{}_q\vartheta_3(0)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}, $$

$$ {}_q\sigma_3(u) = {}_q\sigma_0(u+\omega_2)\, e^{-{}_q\eta_2 u q}\, e^{-{}_q\eta_1 \frac{\omega_2^2}{2\omega_1 q'}}\, {}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right) \frac{1}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = $$

$$ = \frac{{}_q\sigma_0(u+\omega_2)}{{}_q\sigma_0(\omega_2)}\, e^{-{}_q\eta_2 u q}\, \frac{{}_q\vartheta_0(0)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}. $$

Din (3.12) cu ajutorul tabelelor de transformări (2.11), (2.12) obținem pe (3.4). ${}_q\sigma_0(u)$ este nepereche, iar ${}_q\sigma_1(u)$, ${}_q\sigma_2(u)$, ${}_q\vartheta_3(u)$ sînt pereche (3.3), (3.4), (2.5).

§. 4. DEZVOLTAREA ÎN SERII A FUNCȚIILOR ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$ ȘI ${}_q\wp$ ȘI EXPRIMAREA FUNCȚIILOR ELIPTICE CU AJUTORUL ACESTORA

1. În cele precedente am arătat că funcțiile ${}_q\theta$, ${}_q\vartheta$, ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$ și ${}_q\wp$ sînt transformatele funcțiilor corespunzătoare cu indicele $q = 1$. Rezumăm formulele de transformare :

$$ {}_q\theta_{\mu\nu}(v,\tau) = {}_1\theta_{\mu'\nu'}(v',\tau)\cdot Q_{\mu'};\ \mu' = \mu q,\ \nu' = q'\nu,\ Q_{\mu'} = e^{\frac{\pi i}{2}\mu'(1-q')\tau} $$

$$ v = qv' + \frac{1}{2}(q-1)\tau,\ v' = q'v + \frac{1}{2}(q'-1)\tau,\ q' = \frac{1}{q}; $$

$$ {}_q\vartheta_1(v) = -i\,{}_q\theta_{\frac{1}{q},q}(v,\tau) = -i\,{}_1\theta_{11}(v',\tau)\,Q_1 = {}_1\vartheta_1(v')\,Q_1; $$

$$ {}_q\vartheta_2(v) = {}_q\theta_{\frac{1}{q},0}(v,\tau)\,{}_1\theta_{10}(v',\tau)\cdot Q_1 = {}_1\vartheta_1(v')\,Q_1; $$

$$ {}_q\vartheta_3(v) = {}_q\theta_{00}(v,\tau) = {}_1Q_{00}(v',\tau) = {}_1\vartheta_3(v'); $$

$$ {}_q\vartheta_0(v) = {}_q\theta_{0q}(v,\tau) = {}_1\theta_{01}(v',\tau) = {}_1\vartheta_0(v'); $$

$$ v = \frac{u}{2q'\omega_1},\quad v' = \frac{u'}{2\omega_1'}. $$

$$ u = qu' - (q'-1)\omega_2,\ u' = q'u + (q'-1)\omega_2 = q'(u + (q'-1)\omega_2') $$

$$ {}_q\sigma_0(u) = K_0(u')\,{}_1\sigma_0(u')\,Q_1,\ {}_q\sigma_1(u) = K_1(u)\,{}_1\sigma_1(u')\,Q_1 $$

$$ {}_q\sigma_\beta(u) = K_\beta(u)\,{}_1\sigma_\beta(u');\ (\beta = 2,\ 3) $$

$$ K_0(u) = \frac{\omega_1}{\omega_1'}\,\frac{{}_1\vartheta_1'(0)}{{}_q\vartheta_0'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\cdot\frac{{}_q\mathrm{d}(u)}{{}_1\mathrm{d}(u')} $$

$$ K_\alpha(u) = \frac{{}_1\vartheta_{\alpha+1}(0)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\cdot\frac{{}_q\mathrm{d}(u)}{{}_1\mathrm{d}(u')},\quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3) $$

$$ {}_q\mathrm{d}(u) = \mathrm{e}^{{}_q\eta_1 \frac{u^2}{2\omega_1 q'}}, \quad {}_1\mathrm{d}(u') = \mathrm{e}^{{}_1\eta_1 \frac{\mu'^2}{2\omega_1'}} $$

$$ {}_q\zeta(u) = {}_1\zeta(u')\, q' + Cu + C' $$

$$ C = \frac{{}_q\eta_1\, q}{\omega_1} - \frac{{}_1\eta_1\, q'}{\omega_1}, \quad C' = -\frac{{}_1\eta_1}{\omega_1} q'(q'-1)\,\omega_2; $$

$$ {}_q\wp(u) = {}_1\wp(u')\, q'^2 - C; \quad \omega_1 = q\omega_1', \quad \omega_2 = q\omega_2', $$

$$ 2w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 = 2qw'. $$

$$ {}_q\eta_1 = {}_1\eta_1 q', \quad {}_q\eta_2 = {}_1\eta_2 q', \quad {}_qe_\alpha + C = {}_1e_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3). $$

Cu ajutorul formulelor de mai sus din dezvoltările funcțiilor ${}_1\sigma_1$, ${}_1\zeta$ și ${}_1\wp$ deducem

$$ q^2\,[{}_q\wp(u) + C] = \frac{q}{[u-(q-1)\,\omega_2']^2} + \sum{}'\left[\frac{q}{(u-(q-1)\omega_2'-2w)^2} - \frac{q}{(2w)^2}\right] $$

$$ q\,[{}_q\zeta(u) - Cu - C'] = \frac{q}{u-(q-1)\,\omega_2'} + \sum{}'\left[\frac{q}{u-(q-1)\,\omega_2'-2w} + \right. $$

$$ \left. + \frac{q}{2w} + \frac{q\,(u-(q-1)\,\omega_2')}{(2w)^2}\right] \qquad (4.1) $$

$$ (K_0(u)\,Q_1)^{-1}\,{}_q\sigma_0(u) = \left\{ q'(u-(q-1)\,\omega_2')\,\Pi\left[1 - \frac{q'(u-(q-1)\,\omega_2')}{2w'}\right]\times\right. $$

$$ \left.\times\, \mathrm{e}^{\frac{q'(u-(q-1)\,\omega_2')}{2w'} + \frac{1}{2}\left(\frac{q'(u-(q-1)\,\omega_2')}{2w'}\right)}\right\}. $$

Din dezvoltarea lui ${}_q\wp(u) + C$ în domeniul punctului $u = (q-1)\,\omega_2'$ rezultă

$$ {}_q\wp(u) + C = \frac{q'}{(u-(q-1)\,\omega_2')^2} + c_2\, q'\,(u-(q-1)\,\omega_2)^2 + $$

$$ + c_3\, q'\,(u-(q-1)\,\omega_2')^4 + \cdots, $$

în care $c_n = (2n-1)\sum{}'\frac{1}{(2w)^{2n}}$, deducem:

$$ {}_q\wp'(u) = \frac{2q'}{(u-(q-1)\,\omega_2')^3} + 2c_2\, q'\,(u-(q-1)\,\omega_2') + $$

$$ + 4c_3\, q'\,(u-(q-1)\,\omega_2')^3 + \cdots. $$

Avem astfel:

$$({}_q\wp'(u))^2 = \frac{4q'}{(u-(q-1)\omega_2')^6} - \frac{8c_2q'}{(u-(q-1)\omega_2')^2} - 16c^3q'^2 + \cdots$$

$$({}_q\wp(u)+C)^3 = \frac{q'^3}{(u-(q-1)\omega_2')^6} + \frac{3c_2q'^3}{(u-(q-1)\omega_2')^2} + 3c_3q'^3 + \cdots$$

$$({}_q\wp(u)+C)'^2 - 4q({}_q\wp(u) \quad C)^3 = \frac{-20c_2q'^2}{u-(q-1)\omega_2'} + 28c_3q'^2$$

și cu notațiile:

$${}_qg_2 = 20c_2q'^2 = 60\sum{}' \frac{q^2}{(2w)^4} = {}_1g_2\cdot q'^2$$

$${}_qg_3 = 28c_3q'^2 = 140\sum{}' \frac{q^4}{(2w)^6} = {}_1g_3\cdot q'^2$$

obținem ecuația diferențială a funcției ${}_q\wp(u)$:

$$({}_q\wp(u)+C)'^2 = q[4({}_q\wp(u)+C)^3 - {}_qg_2({}_q\wp(u)+C) - {}_qg_3] \qquad (4.2)$$

termenii lipsă se reduc la ${}_qg_3$, funcția eliptică ce ei reprezintă neavînd nici un pol, și apoi

$$({}_q\wp'(u))^2 = 4q({}_q\wp(u) - {}_qe_1)({}_q\wp'(u) - {}_qe_2)({}_q\wp(u) - {}_qe_3),$$

$${}_q\Delta = 16({}_qe_1 - {}_qe_2)({}_qe_1 - {}_qe_3)({}_qe_2 - {}_qe_3)$$

$${}_q\Delta = {}_qg_2^3 - 27\,{}_qg_3^2,$$

deci ${}_qJ(\tau) = \dfrac{27\,{}_qg_3^2}{{}_q\Delta}$, precum și

$${}_qe_1' + {}_qe_2' + {}_qe_3' = 0, \quad {}_qe_1'\,{}_qe_2' + {}_qe_2'\,{}_qe_3' + {}_qe_3'\,{}_qe_1' = \frac{q'}{4}\,{}_qg_1$$

$${}_qe_1'\,{}_qe_2'\,{}_qe_3' = \frac{q'}{4}\,{}_qg_3,$$

în care

$${}_qe_\alpha' = {}_qe_\alpha + C, \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

2. De asemenea, cu ajutorul aceleași formule de transformări de la începutul paragrafului obținem și formulele cu care o funcție eliptică de ordinul n cu perioadele fundamentale $2\omega_1 = 2q\ \omega_1'$ și $2\omega_2 = 2q\ \omega_2'$ se exprimă rațional față de ${}_q\sigma_0(u)$, ${}_q\varsigma(u)$ și ${}_q\wp(u)$. Avem astfel:

$$f(u) = C\frac{\prod\limits_\nu {}_q\sigma_0(u-b_\nu)}{\prod\limits_\nu {}_q\sigma_0(u-a_\nu)}\cdot\frac{K_0(u-a_\nu)}{K_0(u-b_\nu)} \qquad (4.3)$$

$a_\nu + (q-1)\,\omega_2'$ și $b_\nu + (q-1)\,\omega_2'$ fiind polurile și zerourile funcției $f(u)$, așa fel ca $\sum_\nu a_\nu = \sum_\nu b_\nu$ într-un paralelogram de perioade, în baza lui (4.1);

$$f(u) = C'' + \sum_{a,\,\nu} A_\nu\, {}_q\zeta^{(\nu)}(u-a) - A_0\,[C(u-a) + C'] - A_1 C$$

$$f(u) = R_1({}_q\mathfrak{p}(u) + C) + {}_q\mathfrak{p}'(u)\, R_2({}_q\mathfrak{p}(u) + C)$$

C'' și A_ν fiind constante, iar R_1 și R_2 funcții raționale.

3. Ca aplicație, să luăm în (4.3), [1]*):

$$f(u) = {}_q\mathfrak{p}(u) - {}_q\mathfrak{p}(u'')$$

u'' fiind o variabilă diferită de punctele de perioadă, apoi

$$a_1 = a_2 = 0,\quad b_1 = u'',\quad b_2 = -u''$$

și obținem:

$$q^2[{}_q\mathfrak{p}(u) - {}_q\mathfrak{p}(u'')] = C\,\frac{{}_q\sigma_0(u-u'')\,{}_q\sigma_0(u+u'')}{{}_q\sigma_0^2(u)} \times$$

$$\times\,\frac{k_0^2(u)}{k_0(u-u'')\,k_0(u+u'')}. \tag{4.4}$$

Pentru determinarea lui C, se multiplică această relație cu $[u-(q-1)\,\omega_2']^2$ și facem pe u să tindă la $(q-1)\,\omega_2'$; obținem

$$q = -C\,{}_q\sigma_0^2(u'')\,\frac{k_0^2((q-1)\,\omega_2')}{k_0((q-1)\,\omega_2' - u'')\,k_0((q-1)\,\omega_2' + u'')}$$

așa că (4.4) devine

$${}_q\mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(u'') = -q\,\frac{{}_q\sigma_0(u-u'')\,{}_q\sigma_0(u+u'')}{{}_q\sigma^2{}_0(u)\,{}_q\sigma_0^2(u'')} \times$$

$$\times\,\frac{k_0^2(u)}{k_0(u-u'')\,k_0(u+u'')}\,\frac{k_0((q-1)\,\omega_2' - u'')\,k_0((q-1)\,\omega_2' + u'')}{k_0^2((q-1)\,\omega_2')}. \tag{4.5}$$

Luînd apoi derivata logaritmică în raport cu u avem

$$-\frac{{}_q\mathfrak{p}'(u)}{{}_q\mathfrak{p}(u) - {}_q\mathfrak{p}(u'')} = {}_q\zeta(u+u'') + {}_q\zeta(u-u'') - 2\,{}_q\zeta(u)$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\lg\frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{d}(u')}\right);$$

*) p. 182.

permutăm pe u și u' între ei și facem suma; rezultă

$$\frac{1}{2}\,\frac{{}_q\mathfrak{p}'(u)-{}_q\mathfrak{p}'(u'')}{{}_q\mathfrak{p}(u)-{}_q\mathfrak{p}(u'')}={}_q\zeta(u+u'')-{}_q\zeta(u)-{}_q\zeta(u'')+$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\lg\frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{d}(u')}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\lg\frac{\mathrm{d}(u'')}{\mathrm{d}(u')}\right).$$

Aceasta este formula de adiţiune a funcţiei ${}_q\zeta(u)$.

Derivînd această relaţie în raport cu u sau u' se obţine formula de adiţiune a funcţiei ${}_q\mathfrak{p}(u)$ într-o primă formă:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{{}_q\mathfrak{p}'(u)-{}_q\mathfrak{p}'(u'')}{{}_q\mathfrak{p}(u)-{}_q\mathfrak{p}(u'')}\right)={}_q\mathfrak{p}(u+u'')-{}_q\mathfrak{p}(u)+$$

$$+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u''}\left(\lg\frac{\mathrm{d}(u)}{\mathrm{d}(u')}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}\left(\lg\frac{\mathrm{d}(u'')}{\mathrm{d}(u')}\right).$$

4. Folosind metoda aplicată în cazul $q=1$ [1]*) cu ajutorul formulelor de transformare de la începutul paragrafului se stabileşte o nouă formă a formulei de adiţiune.

Pentru aceasta să considerăm ecuaţia:

$$f(u)=q^2({}_q\mathfrak{p}(u)+C)'-q^2a({}_q\mathfrak{p}(u+C)-b, \tag{4.6}$$

constantele a şi b fiind astfel alese ca $f(u)$ să se anuleze pentru valorile

$$u=q'(u_1-(q-1)\,\omega_2'),\quad u=q'(u_2-(q-1)\,\omega_2'),$$

şi să notăm

$$q^2[{}_q\mathfrak{p}(q'(u_1-(q-1)\,\omega_2')+C]={}_q\mathfrak{p}_1',\quad [{}_q\mathfrak{p}'(q'(u_1-(q-1)\,\omega_2']\,q^2={}_q\mathfrak{p}_1'$$
$$q^2[{}_q\mathfrak{p}(q'(u_2-(q-1)\,\omega_2')+C]={}_q\mathfrak{p}_2',\quad [{}_q\mathfrak{p}'(q'(u_2-(q-1)\,\omega_2']\,q^2={}_q\mathfrak{p}_2'.$$

Constantele a şi b sînt determinate de ecuaţiile:

$$a\,{}_q\mathfrak{p}_1+b={}_q\mathfrak{p}_1'\ \text{şi}\ a\,{}_q\mathfrak{p}_2+b={}_2\mathfrak{p}_2'. \tag{4.7}$$

Deoarece $f(u)$ este de ordinul trei cu polul triplu $u=(q-1)\,\omega_2'$ urmează că $q'(u_1-(q-1)\,\omega_2'$, $q'(u_2-(q-1)\,\omega_2'$ şi $q'(u_1+u_2-(q-1)\,\omega_2'$ sînt zerourile funcţiei $f(u)$; dacă punem

$$q^2[{}_q\mathfrak{p}(q'(u_1+u_2-(q-1)\,\omega_2')+c]={}_q\mathfrak{p}_3$$
$$q^2[{}_q\mathfrak{p}(q'(u_1+u_2-(q-1)\,\omega_2')+c]'={}_q\mathfrak{p}_3'$$

obţinem

$$a\,{}_q\mathfrak{p}_3+b=-{}_q\mathfrak{p}_3'.$$

*) p. 169

Dacă luăm apoi în (4.6) pentru u valorile $q'(u_1 - (q-1)\,\omega_2')$, $q'(u_2 - (q-1)\,\omega_2')$ și $q'(u_1 + u_2 - (q-1)\,\omega_2')$, rezultă că

$$x = {}_q\wp_1, \qquad x = {}_q\wp_2, \qquad x = {}_q\wp_3$$

satisfac ecuației

$$q(4x^3 - {}_qg_2\,x - {}_qg_3) + (ax+b)^2 = 0$$

u_1 și u_2 putînd fi aleși așa fel ca ${}_q\wp_1$, ${}_q\wp_2$ și ${}_q\wp_3$ să fie diferiți între ei. Acestea sînt singurele rădăcini ale acestei ecuații, deoarece funcția

$$[{}_q\wp(q'(u_2 - (q-1)\,\omega_2') - {}_q\wp(q'(u_1 - (q-1)\,\omega_2')] \times$$
$$\times [{}_q\wp(q'(u_1 + u_2 - (q-1)\,\omega_2') - {}_q\wp(q'(u_1 - (q-1)\,\omega_2')] \times$$
$$\times [{}_q\wp(q'(u_1 + u_2 - (q-1)\,\omega_2') - {}_q\wp(q'(u_2 - (q-1)\,\omega_2')]$$

este eliptică cu perioadele $2\omega_1$, $2\omega_2$ și, deci, se anulează numai într-un număr finit de puncte din paralelogramul perioadelor.

Obținem astfel relațiile

$$\begin{gathered}
{}_q\wp_1 + {}_q\wp_2 + {}_q\wp_3 = q'\frac{a^2}{4}, \\
{}_q\wp_1\,{}_q\wp_2 + {}_q\wp_2\,{}_q\wp_3 + {}_q\wp_3\,{}_q\wp_1 = -q'\left(ab + \frac{{}_qg_2}{4}\right), \qquad (4.8) \\
{}_q\wp_1\,{}_q\wp_2\,{}_q\wp_3 = q'\left(\frac{b^2}{4} + \frac{{}_qg_3}{4}\right), \\
a = \frac{{}_q\wp_1' - {}_q\wp_2'}{{}_q\wp_1 - {}_q\wp_2}, \quad b = \frac{{}_q\wp_1\,{}_q\wp_2' - {}_q\wp_1'\,{}_q\wp_2}{{}_q\wp_1 - {}_q\wp_2},
\end{gathered}$$

Din prima din relațiile precedente rezultă astfel:

$${}_q\wp(q'(u_1 - (q-1)\,\omega_2') + C + {}_q\wp(q'(u_2 - (q-1)\,\omega_2') + C +$$
$$+ {}_q\wp(q'(u_1 + u_2 - (q-1)\,\omega_2' + C = \frac{q'}{4}\cdot\frac{{}_q\wp'(u_1) - {}_q\wp'(u_2)}{{}_q\wp(u_1) - {}_q\wp(u_2)}$$

care este a doua formă a formulei de adițiune.

Dacă se elimină a și b din relațiile (4.8) se poate obține o a treia formă a formulei de adițiune.

5. Tot cu ajutorul formulelor de transformare de la începutul paragrafului, din (4.5) obținem și formula [1]*)

*) p. 200.

$$({}_q\bar{\mathfrak{p}}(u) - {}_q\bar{e}_\alpha)^{\frac{1}{2}} = \frac{{}_q\sigma_\alpha(u)}{{}_q\sigma_0(u)} \frac{K_0(u)}{{}_0K_\alpha(u)} =$$

$$= \frac{q}{2\omega_1} \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_\alpha\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \frac{{}_q\vartheta_{\alpha+1}(v)}{{}_q\vartheta_1(v)} \frac{K_0(u)}{{}_0K_\alpha(u)}, \quad (\alpha = 1, 2, 3,)^*) \quad (4.9)$$

din care, pentru $u = \omega_1 + (1-q')\,\omega_2$, deci $v = \frac{q}{2} - \frac{1}{2}(1-q)\,\tau$, deducem

$$({}_qe_1 - {}_qe_\alpha)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \times$$

$$\times \frac{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}(1-q)\tau\right)}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}(1-q)\tau\right)} \cdot \frac{K_0(\omega_1')\,Q_1}{{}_0K_\alpha(\omega_1 + (1-q')\,\omega_2)}$$

pentru $\alpha = 2,3$, iar pentru $u = \omega_1 + \omega_2 + (1-q')\,\omega_2$, deci $v = \frac{q}{2} + \frac{q\tau}{2} - \frac{1}{2}(1-q)\,\tau$, obținem:

$$({}_qe_1 - {}_qe_3)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q}{2} + \frac{q\tau}{2} - \frac{1-q}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q}{2} + \frac{q\tau}{2} - \frac{1-q}{2}\tau\right)} \times$$

$$\times \frac{K_0(w_1' + \omega_2')}{{}_0K_1(\omega_1 + \omega_2 + (1-q')\,\omega_2)}.$$

---

*) Pentru simplificare notăm

$${}_q\bar{\alpha}_\alpha(u) = \frac{{}_q\sigma_0(u - u_\alpha'')\,{}_q\sigma_0(u + u_\alpha'')}{{}_q\sigma_0^2(\mu_\alpha'')} \times \frac{K_0((q-1)\,\omega_2' - u_\alpha'')\,K_0((q-1)\,\omega_2' + u_\alpha'')}{K_0(u - u_\alpha'')\,K_0(u + u_\alpha'')\,K_0^2((q-1)\,\omega_2')},$$

$u_1 = \omega_1$, $u_2 = \omega_1 + \omega_2$, $u_3 = \omega_2$ și

$${}_0K_\alpha(u) = \frac{{}_q\sigma_\alpha(u)}{({}_q\sigma_\alpha(u))^{\frac{1}{2}}}$$

$${}_q\bar{\mathfrak{p}}(u) = {}_q\mathfrak{p}(u) + C, \quad {}_q\bar{e} = {}_qe + C.$$

Cu ajutorul tabelelor (2.11), (2.12) valorile funcțiilor ${}_q\vartheta(v)$ pot fi reduse la acele corespunzătoare lui $v = \frac{q-1}{2}\tau$ și obținem

$$({}_qe_1 - {}_qe_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \times$$

$$\times \frac{K_0(\omega_1') \cdot Q_1}{{}_0K_2(\omega_1 + (1-q')\,\omega_2)},$$

$$({}_qe_1 - {}_qe_3)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \times$$

$$\times \frac{K_0(\omega_2') \cdot Q_1}{{}_0K_3(\omega_2 + (1-q')\ \omega_2)}. \tag{4.10}$$

$$({}_qe_2 - {}_qe_3)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \times$$

$$\times \frac{K_0(\omega_1' + \omega_2')}{{}_0K_1(\omega_1+\omega_2+(1-q')\,\omega_2)} \cdot \frac{Q_1^{-1}}{Q_1}.$$

Pentru a calcula direct pe ${}_qe_\alpha$ punem pe (4.9) [1]*) sub forma

$$({}_q\bar{\wp}(2q'\omega_1 v) - \bar{e}_\alpha)^{\frac{1}{2}} = \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{K_0(u)\,Q_1}{{}_0K_\alpha(u)} \times$$

$$\times \frac{{}_{1+q}\vartheta_{\alpha-1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\left(v - \frac{q-1}{2}\tau\right) + \cdots}{v - \frac{q-1}{2}\tau + \frac{{}_q\vartheta_1'''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\left(v - \frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right) \cdot 3'}} =$$

$$= \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{K_0(u')Q_1}{{}_0K_\alpha(u)} \left[1 + \frac{{}_q\vartheta_{\alpha+1}''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} - \frac{1}{3}\frac{{}_q\vartheta_1'''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\left(v - \frac{q-1}{2}\right) + \cdots\right], \tag{4.11}$$

*) p. 201.

de unde se deduce

$$ {}_qe_\alpha + C = \frac{q'}{2\omega_1} \cdot \frac{K_0 (2q'(1-q')\omega_2)}{{}_0K_\alpha (1-q'\omega_2)} \left[\frac{1}{3} \frac{{}_q\vartheta_1'''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} - \frac{{}_q\vartheta_{\alpha+1}''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \right] $$

$(\alpha = 1, 2, 3)$ şi, fiindcă ${}_qe_1 + C + {}_qe_2 + C + {}_qe_3 + C = 0$, obţinem:

$$ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2 + \left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2 + \left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2\right] \frac{{}_q\vartheta_1'''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} = $$

$$ = \left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2 \frac{{}_q\vartheta_2''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} + \left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2 \frac{{}_q\vartheta_3''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} + \left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2 \frac{{}_q\vartheta_0''\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \quad (4.12) $$

Pe de altă parte, din ecuaţiile

$$ \frac{\partial^2}{\partial v^2}({}_q\vartheta_\alpha(v)\, Q_1^{-1}) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}({}_q\vartheta_\alpha(v)\, Q_1^{-1}) $$

$$ (\alpha = 1, 2) \qquad (4.13) $$

$$ \frac{\partial^3}{\partial v^3}({}_q\vartheta_\alpha(v)\, Q_1^{-1}) = 4\pi i \frac{\partial^2}{\partial v\, \partial \tau}({}_q\vartheta_\alpha(v)\, Q_1^{-1}) $$

$$ \frac{\partial^2}{\partial v^2}({}_q\vartheta_\beta(v)) = 4\pi i \frac{\partial}{\partial \tau}({}_q\vartheta_\beta(v)) $$

$$ (\beta = 3, 0) \qquad (4.14) $$

$$ \frac{\partial^3}{\partial v^3}({}_q\vartheta_3(v)) = 4\pi i \frac{\partial^2}{\partial v\, \partial \tau}({}_q\vartheta_\beta(v)), $$

pe care le verifică ${}_q\vartheta$ şi pentru $v = \frac{q-1}{2}\tau$, din (4.12) deducem

$$ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2 + \left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2 + \left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2\right] \frac{1}{{}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}\left({}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\right) = $$

$$ = \left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}\left({}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right) Q_1^{-1}\right) + $$

$$+\left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2\cdot\frac{1}{{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\right)+$$

$$+\left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2\cdot\frac{1}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\right),$$

din care prin integrare obținem

$${}_q\vartheta_1^1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)^{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2+\left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2+\left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2\right]}=C''\,{}_q\vartheta_2\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)^{\left(\frac{K_0}{{}_0K_1}\right)^2}\times$$

$$\times\,{}_q\vartheta_3\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)^{\left(\frac{K_0}{{}_0K_2}\right)^2}\cdot\,{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)^{\left(\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2}. \tag{4.15}$$

Constanta C'' se determină, dacă introducem aici dezvoltările (2.10) exprimate în sume.

Din (4.10) în baza lui (4.13) și (4.14) obținem pentru $v=\frac{q-1}{2}\tau$

$${}_qe_\alpha+C=\pi i\left(\frac{q}{Q_1\omega_1}\cdot\frac{K_0}{{}_0K_\alpha}\right)^2\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}\right)}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}\right)}{{}_q\vartheta_{\alpha+1}\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}}\right]$$

$${}_qe_3+C=\pi i\left(\frac{q}{Q_1\,\omega_1}\cdot\frac{K_0}{{}_0K_3}\right)^2\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_1'\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)Q_1^{-1}\right)}{{}_q\vartheta_1\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{\partial}{\partial\tau}\left({}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)\right)}{{}_q\vartheta_0\left(\frac{q-1}{2}\tau\right)}\right]$$

care se mai scriu

$$ {}_qe_\alpha + C = \pi i \left(\frac{q}{Q_1 \omega_1} \cdot \frac{K_0}{{}_0K_\alpha} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\lg \frac{\left({}_q\vartheta_1' \left(\frac{q-1}{2} \tau \right) Q_1^{-1} \right)^{\frac{1}{3}}}{{}_q\vartheta_{\alpha+1} \left(\frac{q-1}{2} \tau \right)} \right] $$

$$ {}_qe_3 + C = \pi i \left(\frac{q}{Q_1 \omega_1} \cdot \frac{K_0}{{}_0K_3} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\lg \frac{\left({}_q\vartheta_1' \left(\frac{q-1}{2} \tau \right) Q_1^{-1} \right)^{\frac{1}{3}}}{{}_q\vartheta_0 \left(\frac{q-1}{2} \tau \right)} \right]. \quad (4.16) $$

${}_q\vartheta_1' \left(\frac{q-1}{2} \tau \right)$ se poate elimina din ecuațiile de mai sus cu ajutorul lui (4.15); de asemenea, diferențele ${}_qe_1 - {}_qe_2$, ${}_qe_1 - {}_qe_3$, ${}_qe_2 - {}_qe_3$ se pot elimina cu ajutorul relațiilor (4.10) și (4.16).

Cum era de așteptat, calculele sînt laborioase și rezultatele sînt complicate. O generalizare a teoremelor din teoria numerelor demonstrate ca aplicație, în cazul $q = 1$, nu este posibilă pe această cale.

Pentru $q = 1$, toate formulele din această lucrare se reduc la acele din teoria clasică.

§ 5. ECUAȚII INTEGRALE VERIFICATE DE ${}_q\theta_{\mu\nu}(v)$

1. În lucrarea [2] am examinat cîteva tipuri de ecuații integrale pe care le satisface funcția ${}_1\theta$ și cele care derivă din ea, precum și valoarea aproximativă a acestor funcții pentru valori foarte mici ale lui τ, cînd $q = 1$. În cele ce urmează dăm rezultatele corespunzătoare pentru valori ale lui q diferite de ± 1, $\pm i$.

Stabilim mai întîi cîteva formule.

În baza identității

$$ l(2v + lq\tau + \nu') = \frac{1}{q\tau} \left[\left(v + \frac{\nu'}{2} + lq\tau \right)^2 - \left(v + \frac{\nu'}{2} \right)^2 \right], (\nu' = \nu + (1-q)\tau) $$

din (1.16) deducem funcția

$$ T_{\mu\nu}(v + lq\tau, \tau) = {}_q\theta_{\mu\nu}(v + lq\tau, \tau) \cdot e^{-\frac{\pi l}{q\tau} \left(v + lq\tau + \frac{\nu'}{2} \right)^2} $$

$$ = {}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau) \cdot e^{-\frac{\pi i l}{q\tau} \left(v + \frac{\nu'}{2} \right)^2}. $$

De asemenea se verifică că avem și relația

$$ {}_q\theta_{\mu\nu}(v + q, \tau) = {}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau) \cdot e^{q\mu\pi i} $$

și în general

$$ {}_q\theta_{\mu\nu}(v + l\,q, \tau) = {}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau) \cdot e^{l q \mu \pi i} \tag{5.1} $$

l fiind un număr întreg, din care deducem funcția:

$$ \begin{aligned} \overline{T}_{\mu\nu}(v + l\,q, \tau) &= {}_q\theta_{\mu\nu}(v + l\,q, \tau) \cdot e^{-\mu\pi i (v + l)} \\ &= {}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau) \cdot e^{-\mu\pi i v} = \overline{T}_{\mu\nu}(v, \tau). \end{aligned} $$

Ținînd seama de (2.12) (3.3) (3.4) și (3.11) se constată că au loc relațiile

$$ \begin{aligned} {}_q\sigma_0(u + 2l\,\omega_2) &= (-1)^l\, {}_q\sigma_0(u) \cdot e^{2 l q\, {}_q\eta_2 (u + l\omega_2)} \\ {}_q\sigma_\alpha(u + 2l\,\omega_2) &= {}_q\sigma_\alpha(u)\, e^{2 l q\, {}_q\eta_2 (u + l\omega_2)} \end{aligned} \tag{5.2} $$

($\alpha = 1, 2, 3$) și fiindcă

$$ (u + 2l\omega_2)^2 = u^2 + 4\,l\omega_2 (u + l\omega_2) $$

formulele precedente se mai pot scrie:

$$ \begin{aligned} {}_qS_0(u + 2l\omega_2) &= {}_q\sigma_0(u + 2\,l\omega_2)\, e^{-{}_q\eta_2 \cdot \left(\frac{u + 2\,l\omega_2}{2\,\omega_2}\right)^2} \\ &= (-1)^l\, {}_q\sigma_0(u)\, e^{-{}_q\eta_2 \cdot \frac{u + 2\,l\omega_2}{2\,\omega_2}} = (-1)^l\, {}_qS_0(u) \end{aligned} $$

și

$$ \begin{aligned} {}_qS_\alpha(u + 2\,l\omega_2) &= {}_q\sigma_\alpha(u + 2\,l\omega_2)\, e^{-{}_q\eta_2 \cdot \frac{u + 2\,l\omega_2}{2\,\omega_2}} \\ &= {}_q\sigma_\alpha(u)\, e^{-{}_q\eta_2 \cdot \frac{u^2}{2\omega_2}} = {}_qS_\alpha(u). \end{aligned} $$

În baza lui (3.1) și (2.12) avem de asemenea

$$ \begin{aligned} {}_q\sigma_0(u + 2\,l\omega_1) &= (-1)^l\, {}_q\sigma_0(u)\, e^{2 l q\, {}_q\eta_1 (u + l\omega_1)} \\ {}_q\sigma_\alpha(u + 2\,l\omega_1) &= {}_q\sigma_\alpha\, e^{2 l q\, {}_q\eta_1 (u + l\omega_1)} \end{aligned} \tag{5.3} $$

și, deoarece

$$ 2\,{}_q\eta_1\, l\, q\,(u + l\omega_1) = \frac{{}_q\eta_1}{2\,\omega_1}(u + 2\,l\omega_1)^2 - \frac{2\,{}_q\eta_1}{2\,\omega_1} u^2, $$

rezultă și relațiile :

$$ {}_q\Sigma_0(u + 2l\omega_1) = {}_q\sigma_0(u + 2lq\omega_1)\, e^{\frac{q\eta_1}{2\omega_1}(u + l\omega_1)^2} \tag{5.4} $$

$$ = (-1)^l\, {}_q\sigma_0(u)\, e^{\frac{-q\eta_1}{2\omega_1}u^2} $$

$$ {}_q\Sigma_\alpha(u + 2l\omega_1) = {}_q\sigma_\alpha(u + 2lq\omega_1)\, e^{\frac{-q\eta_1}{2\omega_1}(u + l\omega_1)^2} \tag{5.5} $$

$$ = {}_q\sigma_\alpha(u)\, e^{\frac{-q\eta_1}{2\omega_1}u^2} = {}_q\Sigma_\alpha(u). $$

Se verifică de asemenea și formula

$$ {}_q\mathcal{S}_\alpha(u) = {}_q\Sigma_\alpha(u)\, e^{-\frac{\pi i}{4\omega_1\omega_2}u^2}. $$

Însemnînd

$$ l\,{}_q\eta_2 + l'\,{}_q\eta_1 = {}_q\bar{\eta},\quad l\,\omega_2 + l'\,\omega_1 = w $$

cu ajutorul relațiilor (5.2) și (5.3) se stabilesc și formulele

$$ {}_q\sigma_0(u + 2w) = (-1)^{l+l'}\, {}_q\sigma_0(u)\, e^{2q\bar{\eta}(u+w)} $$

$$ {}_q\sigma_\alpha(u + 2w) = {}_q\sigma_\alpha(u)\, e^{2q\bar{\eta}(u+w)}. $$

2. Funcția ${}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau)\, e^{\rho v}$ verifică ecuația cu diferențe

$$ \varphi(v) - \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} K(l\,q\,\tau)\, e^{\frac{\pi i}{q}l(2v + l'\tau + v) + \rho l q t}\, \varphi(v + l\,q\,\tau) = 0, $$

$$ (l' = 1 - q + ql) $$

dacă ρ satisface ecuația

$$ 1 - \frac{1}{m}\sum_{l} K(l\,q\,\tau)\, e^{\rho l \tau q} = 0. $$

Prin trecere la limită, punînd $\tau = \frac{\bar{\tau}}{n}$ pentru $n \to \infty$ avem

$$ \frac{1}{n} \to \mathrm{d}t,\ \frac{l}{n} \to t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, $$

${}_q\theta_{\mu\nu}(v, \tau)$ verifică ecuațiile

$$ \varphi(v) - \frac{1}{q\bar{\tau}}\int_0^{q\bar{\tau}} K(qt)\, e^{\frac{\pi i}{q^2\tau}(2v + t + \nu)t + \rho t}\, \varphi(v + qt)\, \mathrm{d}t = 0 $$

și

$$\varphi(v) - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} K(qt)\cdot e^{\frac{\pi i}{q^2\tau}2vt}\,\varphi(v+qt)\,dt = 0$$

pentru valori ale lui ρ soluții respectiv ale ecuațiilor

$$1 - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} K(qt)\,e^{\rho qt}dt = 0.$$

$$1 - \frac{1}{\bar{\tau}}\int_0^{\bar{\tau}} K(qt)\,e^{\frac{\pi i}{q^2\tau}(t+v)t+\rho qt}dt = 0.$$

Pentru aceasta se înlocuiește φ prin θ și se ține seama de (1.16).

În baza relațiilor (2.1), funcțiile ${}_q\vartheta_\alpha(v)\,e^{\rho v}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ verifică și ele ecuațiile pe care le verifică ${}_q\theta_{\mu\nu}$.

Ținînd seama apoi de (5.2), se constată că funcția ${}_q\sigma_\alpha(u)\,e^{\rho u}$ verifică, pentru ${}_q\omega_2$ foarte mic, ecuațiile

$$\varphi(u) = \frac{1}{\bar{\omega}_2}\int_0^{\bar{\omega}_2} K(qt)\,e^{-2\frac{q\eta_2}{\bar{\omega}_2}(u+t)qt+\rho t}\,\varphi(u+2qt)\,dt = 0$$

și

$$\varphi(u) - \frac{1}{2\bar{\omega}_2}\int_0^{\bar{\omega}_2} K(qt)\,e^{-2\frac{q\eta_2}{\bar{\omega}_2}utq+\rho t}\,\varphi(u+2qt)\,dt = 0$$

pentru valorile lui ρ soluții respectiv ale ecuațiilor

$$1 - \frac{1}{\bar{\omega}_2}\int_0^{\bar{\omega}_2} K(qt)\,e^{\rho t}\,dt = 0$$

$$1 - \frac{1}{\bar{\omega}_2}\int_0^{\bar{\omega}_2} K(qt)\,e^{-2\frac{q\eta_2}{\bar{\omega}_2}qt^2+\rho t}\,dt = 0.$$

Funcțiile $T_{\mu\nu}$, ${}_q\mathfrak{p}$, ${}_q\Sigma$ și ${}_qS$ fiind invariante au rolul unor constante, așa că dacă $\varphi(v)$ este o soluție a uneia din ecuațiile de mai sus, atunci și $f(v)$. $\varphi(v)$ este o soluție, $f(v)$ fiind o funcție rațională de invarianta corespunzătoare substituției respective.

3. În ceea ce privește valorile aproximative pentru τ foarte mic se constată următoarele.

În baza lui (1.14) și (2.7) funcțiile ${}_q\vartheta$ au valorile

$${}_q\vartheta_\alpha(v) \to {}_1\vartheta_\alpha(v'),\quad {}_q\vartheta_\beta(v) \to {}_1\vartheta_\beta(v')\,Q_1,\ (\alpha = 0,3\,;\ \beta = 1,2).$$

Ţinînd seama apoi de (3.6), (3.7), (3.2) şi (3.4) obţinem valorile:

$$ {}_q\sigma_\alpha(u) \to {}_1\sigma_\alpha(u') \cdot K_\alpha(u), \qquad (\alpha = 1, 2, 3), $$

unde

$$ K_\alpha(u) = q \cdot e^{({}_q\eta_1 - {}_1\eta_{1\,q'})^3 \frac{u^2}{2\omega_1}}. $$

De asemenea, ţinînd seama de (5.4) şi (5.5) găsim

$$ {}_q\Sigma_0(u) \to (-1)^{l\,(q-1)}\, {}_1\Sigma_0(u')\, K_0, \quad {}_q\Sigma_\alpha(u) \to {}_1\Sigma_\alpha(u')\, K_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3) $$

şi în baza lui (3.8) şi (3.9) avem

$$ {}_q\zeta(u) \to {}_1\zeta(u') + C u' + C' $$

$$ {}_q\wp(u) \to {}_1\wp(u') - C. $$

Pentru $q = 1$, valorile aproximative le-am dat în [2]*).

Primită la redacţie la 20 noiembrie 1962.

ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ θ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

Дается обобщение функции θ_1, (1.15) и строятся функции ${}_q\vartheta$, ${}_q\sigma$, ${}_q\xi$ и ${}_qp$, вместе с соответствующими разложениями и указываются их отношения с теми функциями, которые получаются при $q = 1$.

Устанавливается что, если

$$ \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{q\,\omega_2'}{q\,\omega_1'}, $$

то $2\omega_1 = 2q\omega_1'$ и $2\omega_2 = 2q\omega_2'$ являются периодами функции ${}_qp$. Устанавливается формула сложения и соответствующее дифференциальное уравнение. Вычисляется функция $\sqrt{{}_qp(u) - {}_qe_\alpha}$ и отмечается, что на этом пути невозможно обобщение теорем из теории чисел, которые доказываются при $q = 1$. Показывается, что пары периодов $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ не эквивалентны, потому что $q \neq \pm 1$, $q \neq \pm i$ и следовательно эллиптические функции, построенные с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ в плоскости u не совпадают с теми, которые строятся в плоскости u' с периодами $2\omega_1'$ и $2\omega_2'$. Дается выражение этих функций при помощи функций ${}_q\sigma$, ${}_q\xi$, ${}_qp$.

Устанавливается несколько типов интегральных уравнений для функций ${}_q\theta$, ${}_q\vartheta$, ${}_q\sigma$ и для их произведений с рациональными функциями от ${}_qp$, ${}_qT$, ${}_qS$ и ${}_q\Sigma$.

*) p. 573.

UNE GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION θ ET SON UTILISATION POUR L'ÉTUDE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur donne une généralisation de la fonction θ_1, (1.15), et construit les fonctions ${}_q\vartheta$, ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$ et ${}_q\wp$, et il en indique les différents développements et les relations avec leurs correspondants pour $q = 1$.

Il constate que si

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{q\omega_2'}{q\omega_1'},$$

$2\omega_1 = 2q\omega_1'$ et $2\omega_2 = 2q\omega_2'$ sont les périodes de la fonction ${}_q\wp$. On établit la formule d'addition et l'équation différentielle de celle-ci. On calcule la fonction $\sqrt{{}_q\wp(u) - {}_qe_\alpha}$ et on constate qu'une généralisation des théorèmes de la théorie des nombres, démontrés comme application dans le cas $q = 1$, n'est pas possible par cette voie.

On montre que les paires de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ ne sont pas équivalentes, étant donné que q est différent de ± 1 et de $\pm i$ et qu'ainsi les fonctions elliptiques construites avec les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$ dans le plan de u ne sont pas identiques à celles construites avec $2\omega_1'$ et $2\omega_2'$ dans le plan de u'. L'auteur indique l'expression de ces fonctions à l'aide des fonctions ${}_q\sigma$, ${}_q\zeta$, ${}_q\mu$.

On établit ensuite quelques types d'équations intégrales satisfaites par ${}_q\theta$, ${}_q\vartheta$, ${}_q\sigma$, et les produits de celles-ci avec des fonctions rationnelles des invariantes ${}_q\wp$, ${}_qT$, ${}_qS$ et ${}_q\Sigma$.

BIBLIOGRAFIE

1. HURWITZ, Courant, *Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Dritte Auflage, J. Springer Berlin, 1929.
2. N. PRAPORGESCU, *Asupra unei clase de ecuații integrale*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **VIII**, *3*, 549—616 (1956).

ASUPRA ACȚIUNII SARCINILOR CONCENTRATE ÎN INTERIORUL SEMIPLANULUI ELASTIC CU FRONTIERA ÎNCASTRATĂ

DE

N. ȘANDRU

1. Fie semiplanul elastic $y \geqslant 0$ acționat de un moment concentrat M în punctul $(0, b)$. Starea de deplasare corespunzătoare acestui moment, în cazul planului elastic este dată de [1]:

$$Eu_1 = -\frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{y-b}{x^2+(y-b)^2}, \qquad (1)$$

$$Ev_1 = \frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{x}{x^2+(y-b)^2},$$

unde u_1 și v_1 sînt deplasările după direcțiile axelor Ox și Oy.

Pe frontiera $y = 0$ obținem

$$[Eu_1]_{y=0} = \frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{b}{x^2+b^2}, \qquad (2)$$

$$[Ev_1]_{y=0} = \frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{x}{x^2+b^2}.$$

Să considerăm acum un sistem de deplasări (U, V) care satisface ecuațiile de echilibru și anulează deplasările (2).

Vom avea

$$[EU]_{y=0} = -\frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{b}{x^2+b^2}, \qquad (3)$$

$$[EV]_{y=0} = -\frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{x}{x^2+b^2}.$$

Pentru rezolvarea problemei alegem o funcție Airy de forma

$$\bar{F}(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} (A + \alpha y B) \, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \tag{4}$$

unde funcțiile necunoscute $A = A(\alpha)$, și $B = B(\alpha)$ se determină cu ajutorul condițiilor la limită (3).

Calculăm astfel starea de tensiune

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \int_0^\infty \alpha [A - (2 - \alpha y) B] \, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \\ \bar{\sigma}_y &= -\int_0^\infty \alpha [A + \alpha y B] \, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \int_0^\infty \alpha [A - (1 - \alpha y) B] \, e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

și starea de deplasare

$$\begin{aligned} EU &= -\int_0^\infty \{A(1 + \mu) + B[(1 + \mu) \alpha y - 2]\} \, e^{-\alpha y} \cos \alpha x \, d\alpha, \\ EV &= \int_0^\infty \{A(1 + \mu) + B[(1 + \mu) \alpha y + 1 - \mu]\} \, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Condițiile (3) ne conduc la

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty [A(1 + \mu) - 2B] \cos \alpha x \, d\alpha &= -\frac{1 + \mu}{2\pi} M \frac{b}{x^2 + b^2}, \\ \int_0^\infty [A(1 + \mu) + B(1 - \mu)] \sin \alpha x \, d\alpha &= -\frac{1 + \mu}{2\pi} M \frac{x}{x^2 + b^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Fie

$$\begin{aligned} -A(1 + \mu) + 2B &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_1(\alpha), \\ A(1 + \mu) + B(1 - \mu) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_2(\alpha). \end{aligned} \tag{8}$$

Folosind teorema de transformare, avem

$$\begin{aligned} F_1(\alpha) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \mu}{2\pi} Mb \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} \, dx, \\ F_2(\alpha) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \mu}{2\pi} M \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + b^2} \, dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Se știe că

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2}\,dx = \frac{\pi}{2b} e^{-\alpha b}, \quad \int_0^\infty \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + b^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha b}. \tag{10}$$

Obținem deci

$$\begin{aligned} -A(1+\mu) + 2B &= -\frac{1+\mu}{2\pi} M e^{-\alpha b}, \\ A(1+\mu) + B(1-\mu) &= -\frac{1+\mu}{2\pi} M e^{-\alpha b}. \end{aligned} \tag{11}$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații liniare de mai sus, obținem funcțiile necunoscute

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= -\frac{1+\mu}{2(3-\mu)} \cdot \frac{M}{\pi} e^{-\alpha b}, \\ B(\alpha) &= -\frac{1+\mu}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} e^{-\alpha b}. \end{aligned} \tag{12}$$

Funcția de tensiune devine astfel

$$\bar{F}(x, y) = -\frac{1+\mu}{3-\mu} \cdot \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} (1 + 2\alpha y) e^{-\alpha(y+b)} \sin \alpha x\, d\alpha. \tag{13}$$

Starea de tensiune se scrie sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= -\frac{1+\mu}{3-\mu} \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty \alpha(-3 + 2\alpha y) e^{-\alpha(y+b)} \sin \alpha x\, d\alpha, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1+\mu}{3-\mu} \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty \alpha(1 + 2\alpha y) e^{-\alpha(y+b)} \sin \alpha x\, d\alpha, \\ \bar{\tau}_{xy} &= -\frac{1+\mu}{3-\mu} \frac{M}{2\pi} \int_0^\infty \alpha(-1 + 2\alpha y) e^{-\alpha(y+b)} \cos \alpha x\, d\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Calculul acestor integrale se face cu ușurință și se găsește

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{3(1+\mu)}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot \frac{x(y+b)}{[x^2 + (y+b)^2]^2} - \frac{2(1+\mu)}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot \frac{xy[3(y+b)^2 - x^2]}{[x^2 + (y+b)^2]^3}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{1+\mu}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot \frac{x(y+b)}{[x^2 + (y+b)^2]^2} + \frac{2(1+\mu)}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot \frac{xy[3(y+b)^2 - x^2]}{[x^2 + (y+b)^2]^3}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1+\mu}{3-\mu} \cdot \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{(y+b)^2 - x^2}{[x^2 + (y+b)^2]^2} - \frac{2(1+\mu)}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot \frac{y(y+b)[(y+b)^2 - 3x^2]}{[x^2 + (y+b)^2]^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

Starea de tensiune se obține adăugînd la (15) tensiunea corespunzătoare lui (1), adică

$$\sigma_x^1 = \frac{M}{\pi} \cdot \frac{x(y-b)}{[x^2+(y-b)^2]^2},$$

$$\sigma_y' = -\frac{M}{\pi} \cdot \frac{x(y-b)}{[x^2+(y-b)^2]^2}, \tag{16}$$

$$\tau_{xy}' = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x^2-(y-b)^2}{[x^2+(y-b)^2]^2}.$$

Obținem deci

$$\sigma_x = \frac{M}{\pi}\left\{\frac{x(y-b)}{[x^2+(y-b)^2]^2} + \frac{3(1+\mu)}{3-\mu}\,\frac{x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{2(1+\mu)}{3-\mu}\,\frac{\alpha y[3(y+b)^2-x^2]}{[x^2+(y+b)^2]^3}\right\},$$

$$\sigma_y = \frac{M}{\pi}\left\{-\frac{x(y-b)}{[x^2+(y-b)^2]^2} + \frac{1+\mu}{3-\mu}\,\frac{x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2} + \right. \tag{17}$$
$$\left. + \frac{2(1+\mu)}{3-\mu}\,\frac{xy[3(y+b)^2-x^2]}{[x^2+(y+b)^2]^3}\right\},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{M}{\pi}\left\{\frac{x^2-(y-b)^2}{2[x^2+(y-b)^2]^2} + \frac{1+\mu}{3-\mu}\,\frac{x^2-(y+b)^2}{2[x^2+(y+b)^2]^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2(1+\mu)}{3-\mu}\,\frac{y(y+b)\,[(y+b)^2-3x^2)}{[x^2+(y+b)^2]^3}\right\}.$$

În secțiunea de încastrare $y = 0$, apar tensiunile

$$\sigma_y'(x,0) = \frac{4Mb}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{x}{(x^2+b^2)^2},$$

$$\tau_{xy}(x,0) = -\frac{2M}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{x^2-b^2}{(x^2+b^2)^2}. \tag{18}$$

Putem trasa diagramele de tensiune pe linia de încastrare. Calculăm derivatele

$$\frac{d\sigma_y(x,0)}{dx} = \frac{4Mb}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{b^2-3x^2}{(x^2+b^2)^3},$$

$$\frac{d\tau_{xy}(x,0)}{dx} = \frac{4M}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{x(x^2-3b^2)}{(x^2+b^2)^3}. \tag{19}$$

Pentru $x \to \infty$, cele două componente ale tensiunii tind către zero. Găsim o reprezentare grafică ca în figura 1 tensiunea normală avînd valori extreme date de

$$\sigma_y\left(\pm\frac{b}{\sqrt{3}}, 0\right) = \pm\frac{9}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{M}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{1}{b^2}; \tag{20}$$

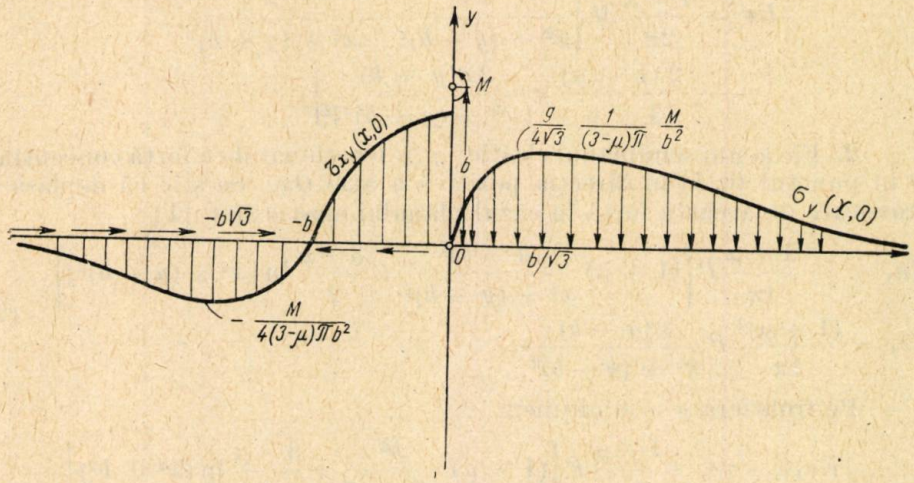


Fig. 1

pentru tensiunea tangențială găsim valorile extreme

$$\tau_{xy}(0,0) = \frac{2M}{(3-\mu)\pi} \cdot \frac{1}{b^2}, \quad \tau_{xy}(\pm\sqrt{3}b, 0) = -\frac{M}{4(3-\mu)\pi} \cdot \frac{1}{b^2}. \tag{21}$$

Pentru motive de antisimetrie și respectiv simetrie a diagramelor de tensiune față de axa oy vom trasa cîte o jumătate din aceste grafice.

Starea de deplasare va fi dată de

$$EU = \frac{1+\mu}{2(3-\mu)} \cdot \frac{M}{\pi} \int_0^\infty [(-3+\mu) + 2(1+\mu)\alpha y]\, e^{-\alpha(y+b)} \cos \alpha x \, d\alpha,$$
$$EV = -\frac{1+\mu}{2(3-\mu)} \cdot \frac{M}{\pi} \int_0^\infty [(3-\mu) + 2(1+\mu)\alpha y]\, e^{-\alpha(y+b)} \sin \alpha x \, d\alpha. \tag{22}$$

Calculînd aceste integrale căpătăm

$$EU = -\frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} + \frac{(1+\mu)^2}{3-\mu} \frac{M}{\pi} y \frac{(y+b)^2 - x^2}{[x^2+(y+b)^2]^2},$$
$$EV = -\frac{1+\mu}{2\pi} M \frac{x}{[x^2+(y+b)^2} - \frac{(1+\mu)^2}{3-\mu} \cdot \frac{M}{\pi} y \frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}. \tag{23}$$

Starea de deplasare se obține adăugînd la (23) pe (1). Adică

$$\begin{aligned} Eu &= \frac{1+\mu}{2\pi} M \left\{ -\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} - \frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{2(1+\mu)}{3-\mu} y \frac{(y+b)^2 - x^2}{[x^2+(y+b)^2]^2} \right\}, \\ Ev &= \frac{1+\mu}{2\pi} M \left\{ \frac{x}{x^2+(y-b)^2} - \frac{x}{x^2+(y+b)^2} - \right. \\ &\left. - \frac{2(1+\mu)}{3-\mu} y \frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2} \right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

2. Fie acum semiplanul elastic $y \geqslant 0$ acționat de o forță concentrată P în punctul $(0, b)$ în direcția pozitivă a axei Ox. Se știe că deplasările provocate de această forță în cazul planului elastic sînt [1]:

$$\begin{aligned} Eu_1 &= -\frac{1+\mu}{4\pi} P \left[(1+\mu) \frac{(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2} + \frac{3-\mu}{2} \ln [x^2+(y-b)^2] \right], \\ Ev_1 &= \frac{(1+\mu)^2}{4\pi} P \frac{x(y-b)}{x^2+(y-b)^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Pe frontiera $y = 0$ obținem

$$\begin{aligned} [Eu_1]_{y=0} &= -\frac{1+\mu}{4\pi} P \left[(1+\mu) \frac{b^2}{x^2+b^2} + \frac{3-\mu}{2} \ln (x^2+b^2) \right], \\ [Ev_1]_{y=0} &= -\frac{(1+\mu)^2}{4\pi} P \frac{xb}{x^2+b^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Fie (U, V) un sistem de deplasări care satisfac ecuațiile de echilibru și pe frontieră verifică condițiile

$$\begin{aligned} [EU]_{y=0} &= \frac{1+\mu}{4\pi} P \left[(1+\mu) \frac{b^2}{x^2+b^2} + \frac{3-\mu}{2} \ln (x^2+b^2) \right], \\ [EV]_{y=0} &= \frac{1+\mu}{4\pi} P \frac{xb}{x^2+b^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Pentru rezolvarea problemei alegem funcția de tensiune de forma

$$\overline{F}(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} (A + \alpha y B) \, e^{-\alpha y} \sin \alpha x \, d\alpha. \tag{28}$$

Funcțiile necunoscute $A = A(\alpha)$ și $B = B(\alpha)$ se determină din condițiile la limită (27), fiind egale cu

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{P}{\pi} e^{-\alpha b} \left[\frac{(1+\mu)^2}{4(3-\mu)} b + \frac{1-\mu}{4\alpha} \right], \\ B(\alpha) &= \frac{P}{\pi} e^{-\alpha b} \left[\frac{(1+\mu)^2}{2(3-\mu)} b - \frac{1+\mu}{4\alpha} \right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Funcția de tensiune devine astfel

$$\bar{F}(x,y)=\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\alpha}\left[\frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}b+\frac{1-\mu}{\alpha}\right]+\right.$$
$$\left.+y\left[\frac{2(1+\mu)^2}{3-\mu}b-\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\sin\alpha x\,d\alpha. \tag{30}$$

ceea ce conduce la starea de tensiune

$$\bar{\sigma}_x=\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\alpha\left[-\frac{3(1+\mu)^2}{3-\mu}b+\frac{3+\mu}{\alpha}\right]+\right.$$
$$\left.+\alpha^2y\left[\frac{2(1+\mu)^2}{3-\mu}b-\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\sin\alpha x\,d\alpha,$$

$$\bar{\sigma}_y=-\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\alpha\left[\frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}b+\frac{1-\mu}{\alpha}\right]+\right. \tag{31}$$
$$\left.+\alpha^2y\left[\frac{2(1+\mu)^2}{3-\mu}b-\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\sin\alpha x\,d\alpha,$$

$$\bar{\tau}_{xy}=\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\alpha\left[-\frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}b+\frac{2}{\alpha}\right]+\right.$$
$$\left.+\alpha^2y\left[\frac{2(1+\mu)^2}{3-\mu}b-\frac{1+\mu}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\cos\alpha x\,d\alpha.$$

Integrînd, avem

$$\bar{\sigma}_x=\frac{P}{4\pi}\left\{-\frac{3(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}+(3+\mu)\frac{x}{x^2+(y+b)^2}+\right.$$
$$\left.+y\left[\frac{4(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{x[3(y+b)^2-x^2]}{[x^2+(y+b)^2]^3}-(1+\mu)\frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right]\right\},$$

$$\bar{\sigma}_y=-\frac{P}{4\pi}\left\{\frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}+(1-\mu)\frac{x}{x^2+(y+b^2)^2}+\right. \tag{32}$$
$$\left.+y\left[\frac{4(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{x[3(y+b)^2-x^2)}{[x^2+(y+b)^2]^3}-(1+\mu)\frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right]\right\},$$

$$\bar{\tau}_{xy}=\frac{P}{4\pi}\left\{-\frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{(y+b)^2-x^2}{[x^2+(y+b)^2]^2}+\frac{2(y+b)}{x^2+(y+b)^2}+\right.$$
$$\left.+y\left[\frac{4(1+\mu)^2}{3-\mu}b\frac{x[3(y+b)^2-x^2]}{[x^2+(y+b)^2]^3}-(1+\mu)\frac{2x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right]\right\}.$$

Peste această stare de tensiune, suprapunem tensiunea corespunzătoare lui (25).

$$\sigma_x^1 = -\frac{Px}{4\pi[x^2+(y-b)^2]}\left[1-\mu+2(1+\mu)\frac{x^2}{x^2+(y-b)^2}\right],$$

$$\sigma_y^1 = \frac{Px}{4\pi[x^2+(y-b)^2]}\left[1-\mu-2(1+\mu)\frac{(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2}\right], \qquad (33)$$

$$\tau_{xy}^1 = -\frac{P(y-b)}{4\pi[x^2+(y-b)^2]}\left[1-\mu+2(1+\mu)\frac{x^2}{x^2+(y-b)^2}\right].$$

În secțiunea de încastrare apar tensiunile

$$\sigma_y(x,0) = -\frac{2P}{\pi}\frac{1+\mu}{3-\mu}b^2\frac{x}{(x^2+b^2)^2},$$

$$\tau_{xy}(x,0) = \frac{P}{4\pi}\left[(3-\mu)\frac{b}{x^2+b^2} - \frac{(1+\mu)^2}{3-\mu}\frac{b^2}{(x^2+b^2)^2} + \right. \qquad (34)$$

$$\left. + \frac{(7-\mu)(1+\mu)}{3-\mu}b\frac{x^2}{(x^2+b^2)^2}\right].$$

Vom da o reprezentare grafică a diagramelor de tensiuni pe latura încastrată în figura 2.

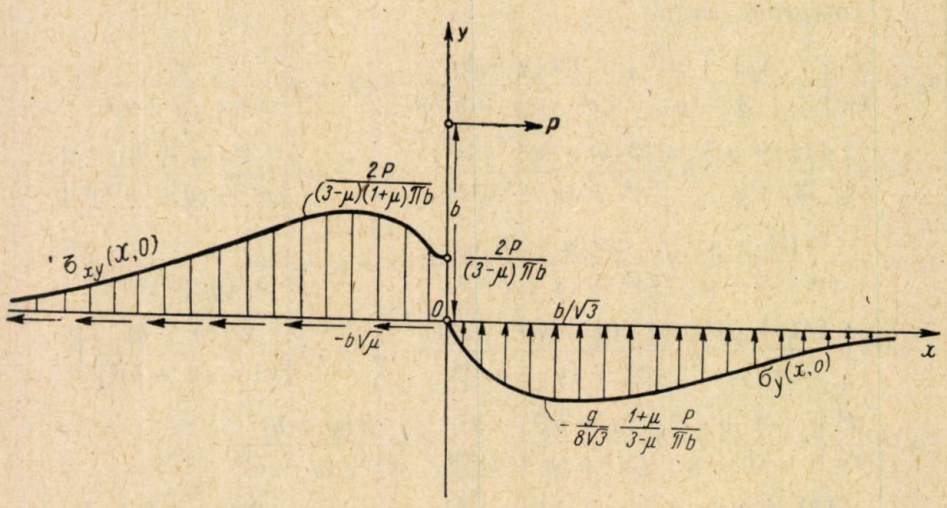


Fig. 2

Făcînd un studiu analog cu cel din cazul precedent, găsim valorile extreme ale tensiunii normale și tangențiale, respectiv în punctele

$$\sigma_y\left(\pm\frac{b}{\sqrt{3}},0\right)=\mp\frac{9}{8\sqrt{3}}\,\frac{1+\mu}{3-\mu}\cdot\frac{P}{\pi b},$$

$$\tau_{xy}(0,0)=\frac{2(1-\mu)}{(3-\mu)\pi}\cdot\frac{P}{b},\qquad \tau_{xy}(\pm b\sqrt{\mu},0)=\frac{2P}{(1+\mu)(3-\mu)\pi b}.$$

Starea de deplasare va fi dată de

$$EU=\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{\left[(1+\mu)^2 b-\frac{(1+\mu)(3-\mu)}{\alpha}\right]-\right.$$

$$\left.-\alpha y\left[\frac{2(1+\mu)^3}{3-\mu}b-\frac{(1+\mu)^2}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\cos\alpha x\,d\alpha,\qquad(35)$$

$$EV=\frac{P}{4\pi}\int_0^\infty\left\{(1+\mu)^2 b+\alpha y\left[\frac{2(1+\mu)^2}{3-\mu}b-\frac{(1+\mu)^2}{\alpha}\right]\right\}e^{-\alpha(y+b)}\sin\alpha x\,d\alpha.$$

care integrate ne dau

$$EU=\frac{P}{4\pi}\left\{\left[(1+\mu)^2 b\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2}+\frac{1}{2}(1+\mu)(3-\mu)\ln[x^2+(y+b)^2]\right]-\right.$$

$$\left.-y\left[\frac{2(1+\mu)^3}{3-\mu}b\frac{(y+b)^2-x^2}{[x^2+(y+b)^2]^2}-(1+\mu)^2\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2}\right]\right\},$$

$$EV=\frac{P}{4\pi}\left\{(1+\mu)^2 b\frac{x}{x^2+(y+b)^2}+y\left[\frac{4(1+\mu)^3}{3-\mu}b\frac{x(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1+\mu)^2\frac{x}{x^2+(y+b)^2}\right]\right\}.\qquad(36)$$

La aceasta se adaugă starea de deplasare (25); se obține astfel

$$Eu=\frac{P}{4\pi}(1+\mu)\left\{-(1+\mu)\frac{(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2}+(1+\mu)\frac{b(y+b)}{x^2+(y+b)^2}-\right.$$

$$-\frac{3-\mu}{2}\ln[x^2+(y-b)^2]+\frac{3-\mu}{2}\ln[x^2+(y+b)^2-$$

$$\left.-y(1+\mu)\left[\frac{2(1+\mu)}{3-\mu}b\frac{(y+b)^2-x^2}{[x^2+(y+b)^2]^2}-\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2}\right]\right\},$$

$$Ev=\frac{P}{4\pi}(1+\mu)^2\left\{\frac{x(y-b)}{x^2+(y-b)^2}+\frac{xb}{x^2+(y+b)^2}+\right.$$

$$\left.+y\left[\frac{4(1+\mu)}{3-\mu}b\frac{x(y+b)}{[x^2+(y+b^2]^2}-\frac{x}{x^2+(y+b)^2}\right]\right\}.\qquad(37)$$

3. Fie de asemenea cazul semiplanului elastic cu frontiera încastrată, acționat de o forță P cu punctul de aplicație în $(0, b)$ pe direcția pozitivă a axei Oy. Procedînd în mod analog cu cazurile precedente, căpătăm starea de tensiune

$$\sigma_x = \frac{P}{4\pi}\left\{(1-\mu)\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} - (1-\mu)\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} - \right.$$
$$\left. - 2(1+\mu)\frac{x^2(y-b)}{[x^2+(y-b)^2]^2} + 2(1+\mu)\frac{x^2(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right\}, \quad (38)$$

$$\sigma_y = \frac{P}{4\pi}\left\{-(1-\mu)\frac{y-b}{x^2+(y-b)^2} + (3+\mu)\frac{y+b}{x^2+(y+b)^2} - \right.$$
$$\left. -2(1+\mu)\frac{(y-b)^3}{[x^2+(y-b)^2]^2} - 2(1+\mu)\frac{x^2(y+b)}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right\},$$

$$\tau_{xy} = \frac{Px}{4\pi}\left\{(1-\mu)\frac{1}{x^2+(y-b)^2} + \frac{2}{x^2+(y+b)^2} + \right.$$
$$\left. +2(1+\mu)\frac{(y-b)^2}{[x^2+(y-b)^2]^2} - (1+\mu)\frac{x^2-(y+b)^2}{[x^2+(y+b)^2]^2}\right.$$

Pe linia de încastrare $y = 0$ apar tensiunile

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{Pb}{2\pi(x^2+b^2)^2}[(1-\mu)x^2 + (3+\mu)b^2].$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{Px}{2\pi(x^2+b^2)^2}[(1-\mu)x^2 + (3+\mu)b^2]. \quad (39)$$

Variația tensiunilor este reprezentată în figura 3.

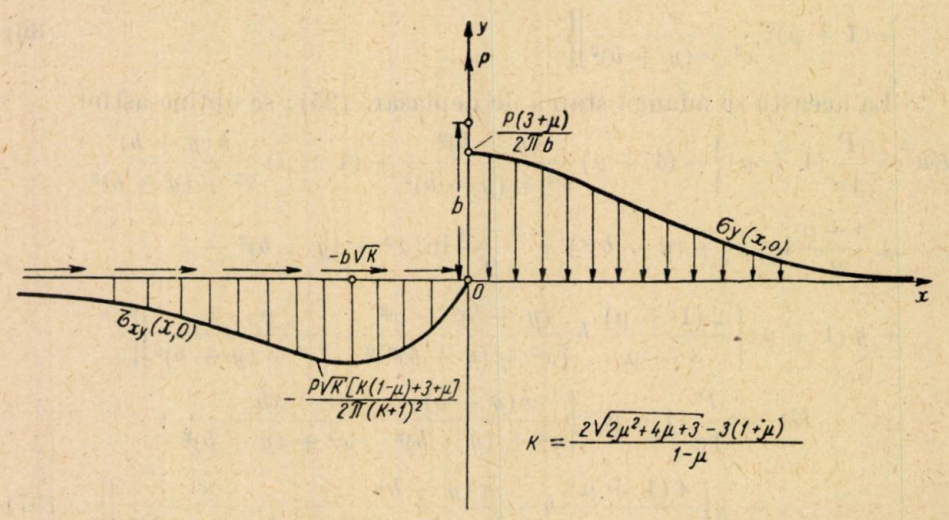


Fig. 3

Starea de deplasare va fi dată de

$$Eu = -\frac{(1+\mu)^2}{4\pi} P\left[\frac{x(y-b)}{x^2+(y-b)^2} + \frac{x(y+b)}{x^2+(y+b)^2}\right],$$

$$Ev = -\frac{1+\mu}{4\pi} P\left[(1+\mu)\frac{x^2}{x^2+(y-b)^2} - (1+\mu)\frac{x^2}{x^2+(y+b)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3-\mu}{2}\ln[x^2+(y-b)^2] - \frac{3-\mu}{2}\ln[x^2+(y+b)^2]\right]. \qquad (40)$$

În felul acesta am obținut starea de solicitare corespunzătoare unei sarcini concentrate oarecare (forță sau moment) acționînd în interiorul semiplanului elastic cu frontiera încastrată. Pentru o sarcină interioară oarecare se poate pleca de la rezultatele de mai sus folosind principiul suprapunerii efectelor.

Primită la redacție la 5 februarie 1963

О ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВНУТРИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

РЕЗЮМЕ

Определяется состояние напряжения и смещения в упругой полуплоскости с закрепленной границей, вызванное внутренним сосредоточенным моментом или внутренней сосредоточенной силой.

Даются диаграммы напряжений, появляющихся в закрепленной границе.

SUR L'ACTION DES CHARGES CONCENTRÉES À L'INTÉRIEUR DU SEMI-PLAN ÉLASTIQUE À FRONTIÈRE ENCASTRÉE

RÉSUMÉ

L'auteur détermine l'état de tension et de déplacement dans le semiplan élastique à frontière encastrée, provoqué par le moment concentré ou par la force concentrée intérieure.

Il donne les diagrammes des tensions qui apparaissent dans la frontière encastrée.

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., București, 1961.

RELAȚII STATISTICE

DE

M. MIȘICU

Teoria matematică a relațiilor poate fi considerată inițiată prin cercetările lui G. Boole [1], [2], A. De Morgan [3], [4] și Ch. S. Peirce [5]. Deși în aceste lucrări au fost analizate diferite tipuri de relații (A. De Morgan studiase de exemplu relații simetrice, compuse, tăietura unei relații printr-un element), nu exista o precisă delimitare a sensurilor lor. G. Frege a efectuat ulterior [6] o distincție a unor tipuri de relații. În [7] el introduce sensul de închidere tranzitivă și apoi de relații funcționale [8,] [9]. E. Schröder întreprinde o sistematizare în sensul unei „algebre și logici" a relațiilor [10] și independent de aceasta pe linia unor lucrări anterioare privind primele elemente de calcul propozițional datorite lui E. Schröder, G. Peano și școala sa, în [11] A. Whitehead și B. Russel au dat extinderi care includ și elemente ale teoriei relațiilor lui G. Frege. Ulterior, teoria relațiilor e conexată de teoria grafelor [12], [13], [14]. E. H. Moore [15] analizează $\subset$ — închiderea și modul ei de obținere dintr-o parte cofinală. În [17] este dată o reprezentare a relațiilor binare prin latici complet distributive, calculul relațiilor între elementele $e_\iota \in \mathcal{E}$ ale unei mulțimi $\mathcal{E}$, de forma unor complexe de două elemente $(e_\iota, e_{\iota'})$ revenind la calculul complexelor în $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ înzestrate cu o structură de grupoid a lui Brandt (în care $(e_\iota, e_{\iota'})\ (e_{\iota'}, e_{\iota''}) = (e_\iota, e_{\iota''})$), această reprezentare fiind extinsă în cazul relațiilor n — are. J. Riguet [18] dă o sinteză a rezultatelor obținute în teoria relațiilor. În lucrări mai recente [19] — [22] sînt prezentate elemente de teoria relațiilor.

O teorie statistică a relațiilor urmează a fi corelată cu aspectele fundamentale ale statisticii ordinei, elaborării unei teorii statistice a topologiei, în aplicații în mecanică. De asemenea, aceasta ar fi contingentă logicilor cu mai multe valori, pe linia extinderii sensului de cuantificare (introdus într-un sens inițial de G. Frege și considerat ulterior de Ch. S. Peirce, O. H. Mitchell etc.). O extindere naturală a acestei teorii ar decurge prin utilizarea unor latici distributive cu valori.

1. *Probabilitate asociată.* Fie $\mathfrak{S}$ o mulțime oarecare. În particular această mulțime va fi presupusă în cazul axiomatizării de tip von Neumann — Bernays (V N B). Fie , de asemenea, relațiile n — are în sensul din [17] definite pe $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{de } n \text{ ori}} \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ fiind mulțimea tuturor submulțimilor lui $\mathfrak{S}$ completată cu $\mathfrak{S}$. În particular, relațiile binare R_2 vor fi caracterizate prin cupluri orientate de elemente din $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ în sensul unor submulțimi din $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ notate în mod echivalent

$$(\mathfrak{S}_{m_1}, \mathfrak{S}_{m_2}) \in R_2; \quad R_2(\mathfrak{S}_{m_1}, \mathfrak{S}_{m_2}); \quad \mathfrak{S}_{m_1} R_2 \mathfrak{S}_{m_2},$$

unde

$$\mathfrak{S}_{m_1}, \mathfrak{S}_{m_2} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S}).$$

Prin abuz de notare, se identifică R_2 cu o submulțime reprezentativă din $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ și anume prin condiția $(\mathfrak{S}_{m_1}, \mathfrak{S}_{m_2}) \in R_2 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$. Această condiție va fi identificată în cele ce urmează prin termenul : sistem de notare reprezentativă.

Fie un cîmp de probabilitate (E, K, P), E fiind mulțime eventual infinită, K sau $\mathfrak{P}(E)$ mulțimea părților lui E completată cu E, $\varnothing$ și evenimentele elementare, iar P probabilitatea definită pe (E, K) în axiomatizarea lui Kolmogorov. De asemenea fie $\mathfrak{V}$ o mulțime de variabile aleatoare, aplicații măsurabile ale lui E pe axa reală R (în particular pe semiaxa pozitivă R^+).

Fie aplicația

$$\varphi : \mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{de } n \text{ ori}} \times \mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{V}$$

asociind complexelor n — are și în baza sistemului de notare reprezentativ, relațiilor n — are

$$(\underbrace{\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots,}_{\text{de } n \text{ ori}} \mathfrak{S}_{m_n}) \in R_n \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \underbrace{\times \ldots \times}_{\text{de } n \text{ ori}} \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$$

o variabilă aleatoare $\mathfrak{V}(\xi)$ astfel ca

$$(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{V}(\xi).$$

D e f i n i ț i e. $P(\xi)$ *este o* probabilitate asociată *aplicației* φ *a complexului (relației)* n — *ar, dacă*

$$P(\xi) = P(\mathfrak{V}(\xi) = v), \quad v \in \mathfrak{V}.$$

Astfel aplicația φ permite asocierea unui cîmp de probabilitate (E, K, P) complexelor n — are ca relații de tip elementar dacă $\xi \in E$ (sau între submulțimi din $\mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ dacă $\xi \in K$). În alți termeni, caracterizării (sau definirii) unei relații n—are R_n prin complexul n—ar $(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n})$ sau, în mod echivalent, apartenenței (în sensul notației reprezentative) a acestuia la o relație n — ară R_n îi corespunde probabilitatea asociată prin aplicația φ.

În concordanță cu această interpretare se va nota în mod echivalent

$$P(\xi) = P_{\varphi}((\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \in R_n).$$

Prin *simbol de apartenență* de probabilitate P (ξ) asociat aplicației φ se definește simbolul notat $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{\in}}$ astfel ca relația

$$(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{\in}} R_n$$

să fie echivalentă condiției

$$P(\xi) = P_{\varphi}((\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \in R_n)$$

iar $\overset{0}{\underset{\varphi}{\in}}$ sau $\overset{1}{\underset{\varphi}{\in}}$ (pentru $P(\xi) = 0$ sau 1) să fie relațiile $\notin$, $\in$ de neapartenență respectiv apartenența propriu-zisă: $\overset{0}{\underset{\varphi}{\in}} \rightleftarrows \notin$, $\overset{1}{\underset{\varphi}{\in}} \rightleftarrows \in$.

Prin *relație statistică de probabilitate* $P(\xi)$ asociată aplicației φ se definește relația notată $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}}$ astfel ca

$$(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \in \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}}$$

să fie echivalentă condițiilor precedente.

Tripletul (P, φ, R_n) se va denumi cîmpul statistic de relații asociat prin cîmpul de probabilitate (E, K, P) peste $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$.

Este de observat, în baza sistemului de reprezentare, că $P_{\varphi}((\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \in R_2) = P_{\varphi}(\mathfrak{S}_1 R_2 \mathfrak{S}_2)$ etc.

2. *Incluziune relațională.* Fie $\mathfrak{R} = \{R_n^{\iota}, \iota \in I\}$, I fiind o mulțime numărabilă de indici, o familie de relații n — are statistici definite de cîmpul statistic de relații $(P(\xi), \varphi, R_n)$ pe $\underbrace{\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

Relația R_n definită prin cîmpul statistic de relații $(P(\xi), \varphi, R_n)$, pe $(\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$ notată $\overset{P}{\underset{\varphi}{\bigcup_{\iota \in I}}} R_n^{\iota}$ va fi denumită relație statistică de tip *reuniune* a relațiilor din R dacă

$$P(\xi) = P\left(\bigvee_{\iota \in I} \xi_{\iota}\right).$$

Analog, relația R_n notată $\overset{P_{\iota}}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R_n^{\iota}$ este relația statistică de tip *intersecție* a relațiilor din R dacă

$$P(\xi) = P\left(\bigwedge_{\iota \in I} \xi\right).$$

În notație concentrată,

$$R_n = \left(\bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota} \bigcap_{\varphi}\right) R_n^\iota, \quad P^\iota = P(\xi^\iota)$$

este relația de $P(\xi)$ — reuniune a relațiilor din R și anume de reuniune dacă

$$P(\xi) = P\left(\bigvee_{\iota \in I} \xi^\iota\right)$$

sau de intersecție dacă

$$P(\xi) = P\left(\bigwedge_{\iota \in I} \xi_\iota\right).$$

Observație. Proprietățile de comutivitatea, asociativitatea și distributivitatea operațiilor $\bigcap_{\iota \in I}^{P^\iota}, \bigcup_{\iota \in I}^{P_\iota}$ rezultă din aceleași proprietăți pentru E, K.

Prin $P(\xi)$, $P(\xi_0)$ reuniunea relațiilor R_n^ι, $\iota \in I$

$$R_n = \bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota,\, P(\xi_0)} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota$$

definită prin cîmpul statistic de relații (P, φ, R_n) se înțelege reuniunea

$$\overset{P}{R}_n = \bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota,\, P(\xi_0)} R_n^\iota,$$

unde

$$P = P\left(\xi_0 \wedge \left(\bigvee_{\iota \in I} \xi\right)\right)$$

sau intersecția

$$\overset{P}{R}_n = \bigcap_{\iota \in I}^{P^\iota,\, P(\xi_0)} R_n^\iota$$

pentru $P = P\left(\xi_0 \wedge \left(\bigwedge_{\iota \in I} \xi^\iota\right)\right)$.

$P(\xi)\, P(\xi_0)$ — reuniunea satisface incluziunea și echivalența

2.1 $$\bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota,\, P(\xi_0)} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota \subset \bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota,$$

2.2 $$\bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota\, P(I)} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota \rightleftarrows \bigcup_{\iota \in I}^{P^\iota} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota,$$

$I \in E$ fiind elementul total.

$R_n \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \times \underbrace{\ldots \times}_{\text{de } n \text{ ori}} \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ este *inclusă* în R'_n dacă există $\mathfrak{R} = \{R_n^\iota, \iota \in I\}$, $\mathfrak{R}' = \{R_n'^\iota, \iota \in I\}$ astfel ca $R_n \subset \mathfrak{R}$, $R'_n \subset \mathfrak{R}'$ și au loc echivalențele $R'_n \underset{\varphi}{\overset{P^\iota}{\rightleftarrows}} \bigcup_{\iota \in I} R_n^\iota$ sau $R_n \underset{\varphi}{\overset{P^\iota}{\rightleftarrows}} \bigcap_{\iota \in I} R_n'^\iota$.

Condițiile de incluziune se scriu în mod echivalent :

$$R_n \subset R'_n, \quad R'_n \supset R_n.$$

Prin *simbolul de incluziune relațională* se va înțelege simbolul $\underset{\varphi}{\overset{P'-P}{\subset}}$, unde

$$P = P(\xi) = P\left(\bigwedge_{\iota \in I} \xi_\iota'\right) \leqslant P(\xi_\iota') = P',$$

$$P' = P(\xi') = P\left(\bigvee_{\iota \in I} \xi_\iota\right) \geqslant P(\xi_\iota) = P$$

semnificația sa apărînd din considerarea condițiilor $R_n \subset R'_n$, pentru $P \leqslant P'$, $R'_n \underset{P-P'}{\supset} R_n$ pentru $P' \geqslant P$, ca echivalente condițiilor exprimate prin simbolul $\underset{\varphi}{\overset{P'-P}{\subset}}$:

$$R_n \underset{\varphi}{\overset{P'-P}{\subset}} R'_n \rightleftarrows R'_n \underset{\varphi}{\overset{P-P'}{\supset}} R_n$$

$$\left(\text{sau în scriere completă } \underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}} \underset{\varphi}{\overset{P'-P}{\subset}} \underset{\varphi}{\overset{P'}{R_n}} \rightleftarrows \underset{\varphi}{\overset{P'}{R_n}} \underset{\varphi}{\overset{P-P'}{\supset}} \underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}}\right).$$

Două relații R_n, R'_n, ($R_n \subset R'_n$ sau $R'_n \supset R_n$) cu aceleași probabilități asociate în raport cu aceeași aplicație φ se vor denumi relații echivalente în probabilitate.

Exemple de realizare. *a*) Fie relațiile statistice binare $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \underset{\varphi}{\overset{P(\xi)}{\in}} R_2 \left(\text{sau} \in \underset{\varphi}{\overset{P(\xi)}{R_2}}\right)$ și elementele $\xi_1, \xi_2 \in E$ astfel ca $\xi_1 \vee \xi_2 = I$, $\xi_1 \wedge \xi_2 = \varnothing$, unde I și $\varnothing$ sînt elementul total și elementul nul din E iar $P(I)=1$, $P(\varnothing)=0$, fiind deci disjuncte și reuniunea lor fiind I. Se definesc următoarele tipuri de relații caracterizate prin elementele ξ_1, ξ_2 și probabilitățile asociate $P(\xi_1)$, $P(\xi_2)$.

$\xi_1, P(\xi_1), \overset{P(\xi_1)}{R}$	$\xi_2, P(\xi_2), \overset{P(\xi_2)}{R}$	$P(\xi_1 \vee \xi_2), \overset{P(\xi_1 \vee \xi_2)}{R}$ $\xi_1 \vee \xi_2,$	$P(\xi_1 \wedge \xi_2), \overset{P(\xi_1 \wedge \xi_2)}{R}$ $\xi_1 \wedge \xi_2,$
$P(\xi$ – egalitate $\xi^=, 1 - \frac{1}{m}, =$	$\xi^\neq, \frac{1}{m_1}, \neq$	$\xi_1^= \vee \xi_2^\neq = \mathrm{I}, 1, \begin{matrix} = \\ \neq \end{matrix}$	$\xi_1^= \wedge \xi_2^\neq = \varnothing,$ $0,$ *non* $\begin{pmatrix} = \\ \neq \end{pmatrix}$
$P(\xi)$ – conținere $\xi^<, \frac{1}{m_2}, <$	$\xi^{\not<} = \xi^\geqslant, 1 - \frac{1}{m_2}, \geqslant$	$\xi^< \vee \xi^\geqslant = \mathrm{I}, 1, \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}$	$\xi_1^< \wedge \xi_2^\geqslant = \varnothing,$ $0,$ *non* $\begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix}$
$P(\xi)$ – incluziune $\xi^\subset, \frac{1}{m_3}, \subset$	$\xi^\varpropto, 1 - \frac{1}{m_3}, \not\subset$	$\xi^\subset \vee \xi^\varpropto = \mathrm{I}, 1, \begin{matrix} \subset \\ \supset \end{matrix}$	$\xi_1^\subset \wedge \xi_2^\varpropto = \varnothing,$ $0,$ *non* $\begin{pmatrix} \subset \\ \not\subset \end{pmatrix}$

$1 < m_1 < m_2, \quad 1 < m_3.$

Probabilitatea 1 caracterizează evenimente corespunzînd reuniunii relațiilor de fiecare tip în parte, iar probabilitatea O corespunde evenimentului constînd din disjuncția lor, ceea ce se poate interpreta ca existența tuturor sau nici unei relații de anumit tip.

De asemenea se mai definește $P(\xi)$ — disjuncția prin probabilitate asociată $P(\xi^D)$ pentru care

$$P(\xi^D) = P(\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2 = \varnothing) = \frac{1}{n}, P((\xi^D)') = P(\mathcal{S}_1 \wedge \mathcal{S}_2 \neq \varnothing) = 1 - \frac{1}{n},$$

unde $(\xi^D)'$ este de natura unui eveniment complimentar în E etc.

Pentru fiecare tip de relație există deci patru valori asociate ale probabilității corespunzînd unor semnificații distincte.

b) Pe baza acestor elemente se definesc alte elemente în E ce se obțin prin operațiile $\vee$, $\wedge$: $\xi^{\leqslant} = \xi^{<} \vee \xi^{=}$ cu condiția disjuncției $\xi^{<} \wedge \xi^{=} = \varnothing$, $\xi^{>} = \xi^{\neq} \wedge \xi^{\geqslant}$ cu condiția $\xi^{\neq} \vee \vee \xi^{\geqslant} = I$; $\xi^{\overset{<}{\neq}} = \xi^{\neq} \vee \xi^{<}$ și condițiile $\xi^{\neq} \wedge \xi^{<} = \xi^{<}$, $\xi^{\geqslant} \vee \xi^{=} = \xi^{\geqslant}$, $\xi^{\geqslant} \wedge \xi^{=} = \xi^{=}$:

$\vee$	$\xi^{=}$	$\xi^{\overset{<}{\neq}}$
$\xi^{<}$	$\xi^{\leqslant}$	$\xi^{\overset{<}{\neq}}$
$\xi^{\not<} = \xi^{\geqslant}$	$\xi^{\geqslant}$	I

$\wedge$	$\xi^{=}$	$\xi^{\neq}$
$\xi^{<}$	$\varnothing$	$\xi^{<}$
$\xi^{\not<} = \xi^{\geqslant}$	$\xi^{=}$	$\xi^{>}$

Aplicînd formula valorificării prin probabilitate:

$$P(\xi_1 \vee \xi_2) = P(\xi_1) + P(\xi_2) - P(\xi_1 \wedge \xi_2),$$

rezultă probabilitățile asociate

$$P(\xi^{\leqslant}) = P(\xi^{=}) + P(\xi^{<}) - P(\varnothing) = 1 - 1/m_1 + 1/m_2,\ P(\xi^{>}) = P(\xi^{\neq}) + P(\xi^{\geqslant}) - P(I) =$$

$$= 1/m_1 - 1/m_2,\ P(\xi^{\overset{<}{\neq}}) = P(\xi^{\neq}) + P(\xi^{<}) - P(\xi^{<}) = P(\xi^{\neq}).$$

Aceste valori se asociază $P(\xi)$ — reuniunilor, în concordanță cu modul lor de definiție

$$R^{P(\xi^{=})} \cup R^{P(\xi^{<})} = R^{P(\xi^{\leqslant})} \quad \text{(echivalentă în probabilitate cu } \leqslant),$$

$$R^{P(\xi^{=})} \cap R^{P(\xi^{\geqslant})} = R^{P(\xi^{>})} \quad \text{(echivalentă în probabilitate cu } >),$$

$$R^{P(\xi^{\neq})} \cap R^{P(\xi^{<})} = R^{P(\xi^{\overset{<}{\neq}})} \quad \text{(echivalentă în probabilitate cu } \neq).$$

Deoarece se calculează

$$\xi^{\leqslant} \vee \xi^{\geqslant} = \xi^{<} \vee \xi^{=} \vee \xi^{\geqslant} = \xi^{<} \vee \xi^{\geqslant} = \xi^{<} \vee \xi^{\not<} = I,$$

$$\xi^{\leqslant} \wedge \xi^{\geqslant} = (\xi^{<} \vee \xi^{=}) \wedge \xi^{\not<} = (\xi^{<} \wedge \xi^{\not<}) \vee (\xi^{=} \wedge \xi^{\not<}) = \xi^{=} \wedge \xi^{\not<} = \xi^{=},$$

probabilitățile asociate vor fi

$$P(\xi^{\leqslant} \vee \xi^{\geqslant}) = 1,\ P(\xi^{\leqslant} \wedge \xi^{\geqslant}) = P(\xi^{=}) = 1 - 1/m_1,$$

probabilități care sînt asociate și $P(\xi)$ — reuniunilor

$$R^{P(\xi^{\leqslant})} \cup R^{P(\xi^{\geqslant})} = R^{1} \quad \left(\text{echivalentă cu } \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right),$$

$$R^{P(\xi^{\leqslant})} \cap R^{P(\xi^{\geqslant})} = R^{P(\xi^{=})} \quad \text{(echivalentă cu } =).$$

Analog se deduce că $\xi^{<} \vee \xi^{>} = \xi^{<} \vee (\xi^{\neq} \wedge \xi^{\mathcal{A}}) = (\xi^{<} \vee \xi^{\neq}) \wedge I = \xi^{<} \vee \xi^{\neq}$ avînd aceeași probabilitate ca și $\xi^{\neq}$. De asemenea se deduce că, $\xi^{<} \wedge \xi^{>} = \xi^{<} \wedge (\xi^{\neq} \wedge \xi^{\mathcal{A}}) = \varnothing$ avînd probabilitatea $P(\xi^{<} \vee \xi^{>}) = P(\xi^{\neq})$, $P(\xi^{<} \wedge \xi^{>}) = 0$, se pot atunci defini $P(\xi)$ — reuniunile

$$\overset{P(\xi^{<})}{R} \cup \overset{P(\xi^{>})}{R} = \overset{P(\xi^{\neq})}{R} \quad \text{(echivalentă cu } \neq\text{)}$$

$$\overset{P(\xi^{<})}{R} \cap \overset{P(\xi^{>})}{R} = \overset{0}{R} \quad \text{(echivalentă cu inexistența unei relații).}$$

c) Între relațiile considerate se pot stabili incluziuni. De exemplu, $\overset{P(\xi^{=})}{R} \subset \overset{P(\xi^{\leqslant})}{R}$ deoarece $P(\xi^{=}) = 1 - 1/m_1 < P(\xi^{\leqslant}) = P(\xi^{<}) + 1/m_2$ etc.

3. *Finețea* cîmpului statistic de relații $(P(\xi), \varphi, R_n)$ definit pe $\underbrace{\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})}_{\text{de } n \text{ ori}}$ în raport cu cîmpul statistic de relații $(P(\xi'), \varphi, R'_n)$ definit pe $\underbrace{P(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})}_{\text{de } n \text{ ori}}$ prin cîmpul de probabilitate (E, K, P) este

$$\mathfrak{F}_{R_n R'_n} \equiv \mathfrak{F}(P(\xi), \varphi, R_n;\ P(\xi'), \varphi, R'_n) = P' - P,$$

între R_n, R'_n fiind presupusă o incluziune sau conținere statistică.

În particular, pentru $\mathfrak{F} = 0$ se va spune că finețea celor două cîmpuri de relații este egală iar pentru $\mathfrak{F} \neq 0$ strict diferită. Pentru $\mathfrak{F} \geqslant 0$, $\overset{P'}{R}_n$ este mai puțin fină decît $\overset{P'}{R}_n$ iar pentru $\mathfrak{F} > 0$ strict mai puțin fină. Analog, pentru $\mathfrak{F} \leqslant 0$, $\overset{P}{R}_n$ este mai fină decît $\overset{P'}{R}_n$ iar pentru $\mathfrak{F} > 0$ strict mai fină.

Conform aliniatului precedent, dacă între $\overset{P}{R}_n$, $\overset{P'}{R}_n$ există o conținere statistică, atunci au loc în mod echivalent condițiile

$$R_n \overset{\mathfrak{F}_{R'_n R_n}}{\underset{(\varphi)}{\subset}} R'_n \rightleftarrows R'_n \overset{\mathfrak{F}_{R_n R'_n}}{\underset{(\varphi)}{\supset}} R_n,$$

unde

$$\mathfrak{F}_{R_n R'_n} = -\mathfrak{F}_{R'_n R_n}.$$

Se calculează în cadrul exemplelor date

$$\mathfrak{F}_{=,\leqslant} = \frac{1}{m_2}, \qquad \mathfrak{F}_{\neq,\leqslant} = \frac{2}{m_1} - \frac{1}{m_2}, \qquad \mathfrak{F}_{\equiv,\subset} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_1} - 1.$$

4. *Tăria* cîmpului statistic de relații $(P(\xi), \varphi, R_n)$ definit pe $\underbrace{\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})}_{\text{de } n \text{ ori}}$ în raport cu cîmpul statistic de relații $(P(\xi'), \varphi, R'_n)$ definite pe $\underbrace{\mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\mathfrak{S})}_{\text{de } n \text{ ori}}$ prin cîmpul de probabilitate (E, K, P) este

$$\mathfrak{S}_{R_n R'_n} \equiv \mathfrak{S}(P(\xi), \varphi, R_n;\ P(\xi'), \varphi, R_n) = P/P'.$$

De exemplu

$$\mathfrak{I}_{=/<} = \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) : (1/m_2), \qquad \mathfrak{I}_{\neq \underline{\subset}} = \frac{1}{m_1} : \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

5. *Diversitatea* unui cîmp statistic de relații $(P^\iota, \varphi, R_n^\iota)$, $\iota \in I$ definite pe $\underbrace{\mathfrak{A}(\xi) \times \ldots \times \mathfrak{A}(\xi)}_{\text{de } n \text{ ori}}$ este

$$\mathfrak{D}(P^\iota, \varphi, R_n, \iota \in I) \equiv -\sum_\iota P_\iota \lg P_\iota,$$

suma extinzîndu-se la probabilitățile P_ι relative la relațiile de tipul R_n^ι, $\iota \in I$.

6. *Pluralitate.* (P, φ_1, R_n) fiind un cîmp statistic de relații, R_n^π este o relație *plurală* lui R_n iar $(P^\pi, \varphi, R_n^\pi)$ este cîmpul statistic plural lui (P, φ, R_n) dacă $\pi(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n})$ este un complex n — ar obținut printr-o permutare a elementelor complexului n — ar $(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n})$ din grupul celor $n!$ permutări ale indicilor $m_1, \ldots, m_n$ astfel ca

$$(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \overset{P}{\underset{\varphi}{\in}} R_n$$

să implice

$$\pi(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \overset{P^\pi}{\underset{\varphi}{\in}} R_n^\pi,$$

unde $P^\pi = P$.

O relație ciclică R_n^π a lui R_n este o relație plurală lui R_n pentru care π este o permutare ciclică de grad $m : (\pi)^m = 1$. O relație R_n^p plurală lui R_n de *ordin* n, *grad* m și *pluralitate* p, este o relație ciclică pentru care $(R_n^p)^{(\pi_m)^p} = R_n^p$, π_m fiind o permutare ciclică de grad m :

$$(\pi_m)^m = 1.$$

Dacă $n = m = 2$, $p = 1$, relația este simetrică. Relațiile $\leqslant$, $\geqslant$, $<$, $>$, $\subset$, $\supset$ sînt ciclice de ordin doi iar $=$, R_2^p simetrice.

Relațiile plurale admit următoarele implicații sau echivalențe (în probabilitate) :

6.1. $\quad (R_n)^{(\pi_m)^m} \rightleftarrows R_n$; $\quad (R_n)^{(\pi_m)^n} \rightleftarrows R_n$,

6.2. $\quad R_n \subset R_n' \Rightarrow (R_n)^\pi \subset (R_n')^\pi$,

6.3. $\quad R_n \subset (R_n)^{(\pi_m)^p} \Rightarrow R_n = (R_n^{\pi_m})^p$,

pentru $m = kp$; $m, k, p = 0, 1, 2, \ldots$,

6.4. $$\left(\bigcup_{\iota \in I}^{P_\iota} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota\right)^\pi \rightleftarrows \bigcup_{\iota \in I}^{P_\iota} \bigcap_{\varphi} (R_n^\iota)^\pi,$$

6.5. $$R_n^\iota \rightleftarrows (R_n^\iota)^{(\pi_m)^p}, \quad \iota \in I \Rightarrow \left(\bigcup_{\iota \in I}^{P_\iota} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota\right)^{(\pi_m)^p} \rightleftarrows \bigcup_{\iota \in I}^{P_\iota} \bigcap_{\varphi} R_n^\iota.$$

Demonstrație. Primele două echivalențe sînt evidente. A treia rezultă din observația că pentru $P < P'$ rezultă $P^{\pi} = P < P' = P'^{\pi}$. Atunci $R_n \subset (R_n)^{(\pi_m)^p}$ implică $(R_n)^{(\pi_m)^p} \subset (R_n)^{(\pi_m)^{2p}} \subset \ldots \subset R^{(\pi_m)^{kp}} \rightleftarrows R_n$. Ultima echivalență se stabilește observînd că probabilitățile asociate celor două $P(\xi)$ — reuniuni sînt egale :

$$P(\xi^\iota) = P(\pi\xi^\iota)$$

implică

$$P\left(\bigvee_{\iota \in I} \xi^\iota\right) = P\left(\pi \bigvee_{\iota \in I} \xi^\iota\right) = P\left(\bigvee_{\iota \in I} \pi\xi^\iota\right),$$

$$P\left(\bigwedge_{\iota \in I} \xi^\iota_{\mathfrak{j}}\right) = P\left(\pi \bigwedge_{\iota \in I} \xi^\iota\right) = P\left(\bigwedge_{\iota \in I} \pi\xi^\iota\right).$$

Incluziunea rezultă observînd de exemplu că $\overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R^\iota_n \subset R^\iota_n$ și în baza proprietăților precedente

$$\left(\overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R^\iota_n\right)^{\pi} \subset (R^\iota_n)^{\pi}; \left(\overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R^\iota_n\right)^{\pi} \subset \overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} (R^\iota_n)^{\pi} \text{ etc. } \subset \left(\overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R^{\iota\pi}_n\right)^{\pi\pi\text{-}1} \subset \left(\overset{P^\iota}{\underset{\varphi}{\bigcap_{\iota \in I}}} R^\iota_n\right)^{\pi}.$$

Ultima implicație rezultă în baza echivalenței precedente.

7. *Reflexivitate.* Relația n — ară R_n pentru complexe n — are $(\mathfrak{S}_{m_1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m_n}) \in R_n$ care sînt constituite din n_1 elemente $\mathfrak{S}_1$, n_2 elemente $\mathfrak{S}_2, \ldots$, iar $n_1 + n_2 + \ldots = n$, se definește ca o relație n — ară de *ordin de reflexivitate* $n_1, n_2, \ldots$ în raport cu $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots$ În particular, o relație binară este reflexivă dacă $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_1) \overset{P}{\underset{\varphi}{\in}} R_2$.

Indicele de reflexivitate al unei relații binare R_2 (pentru $\mathfrak{S} \subset R^+$) este

$$r_{R_2} = \mathfrak{F} = R_2$$

între $=$ (sau $\equiv$) și R_2 fiind presupusă conținere. O relație binară este pozitiv reflexivă dacă $r_{R_2} \geqslant 0$.

Pentru categoria reflexivității relațiilor statistice se stabilesc următoarele proprietăți :

7.1. *Dacă R^π_2 este o relație plurală lui R_2, atunci*

$$r_{R_2} = r_{R^\pi_2}.$$

Demonstrație. Plurala unei relații binare pozitiv reflexive este pozitiv reflexivă deoarece $P^\pi = P$ și deci $r_{R_2} = r^\pi_{R_2}$ (plurala relației binare obținîndu-se prin simplă inversare).

7.2. $\overset{P_\iota}{\underset{\varphi}{\bigcup_{\iota \in I} \bigcap}} R^\iota_2$ *este pozitiv reflexivă dacă* R^ι_2, $\iota \in I$, *este pozitiv reflexivă.*

Demonstrație. Dacă $P(\xi)$ — reuniunea lui R_2^ι, $\iota \in I$ este pozitiv reflexivă, atunci $P(\xi^\iota) \geqslant P(\xi^=)$, $P\left(\bigvee\limits_{\iota \in I} \xi^\iota\right) \geqslant P(\xi^=)$, $P\left(\bigwedge\limits_{\iota \in I} \xi^\iota\right) \geqslant P(\xi^=)$.

7.3. *Dacă* R_2^ι, $\iota \in I$, *sînt pozitiv reflexive iar* $\xi_0 \supset \xi^\equiv$, *atunci* $\bigcup\limits_{\iota \in I}^{P_\iota\, P(\xi_0)} \bigcap\limits_{\varphi} R_2^\iota$ *este pozitiv reflexivă.*

Demonstrație. Rezultatul se obține analog ca în demonstrația precedentă, observînd că intersecțiile elementelor ξ^ι cu $\xi^=$ nu modifică sensul inegalităților probabilităților

$$P\left(\xi^= \vee \left(\bigvee_{\iota \in I} \xi^\iota\right)\right) \geqslant P(\xi^=), \quad P\left(\xi^= \wedge \left(\bigvee_{\iota \in I} \xi^\iota\right)\right) \geqslant P(\xi^=).$$

7.4. $=$, $\leqslant$, $\geqslant$ *ca relații binare sînt pozitiv reflexive* (pentru $r_{=\leqslant}$, $r_{=\geqslant} \geqslant 0$) *în sensul exemplelor date, iar* $<$, $>$ *ca relații binare cu* $r_{R_2} < 0$ *sînt ireflexive.*

Demonstrație. Se calculează de exemplu $r_\leqslant = 1/m_2 \geqslant 0$, $r_\geqslant = 2/m_1 - 1/m_2 > 0$, $r_< = 1/m_2 + 1/m_1 - 1 < 0$, $r_> = 2/m_1 - 1/m_2 - 1 < -1/m_2 < 0$, etc.

8. P — *compoziția* relațiilor*)

$$\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m}(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{l+m}),$$

$$\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}(\mathfrak{S}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{l+m}, \mathfrak{S}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{l+m+n}).$$

notată $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m} \bigcirc \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}$, este relația $\overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{P}}_{l+n}(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_l, \mathfrak{S}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{l+m+n})$ de probabilitate asociată $P(\xi)$, unde $\zeta = \xi \wedge \eta$, astfel ca, pentru orice elemente $\varepsilon_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_i)$, $i = 1, \ldots, l$, $l+m+1, \ldots, l+m+n$ și anumite elemente $\varepsilon_j \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_j)$, $j = l+1, \ldots, l+m$, complexele $(\varepsilon)_{l+m} = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_l \varepsilon_{l+1} \ldots \varepsilon_{l+m}) \in \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m}$, $(\varepsilon)_{m+n} = (\varepsilon_{l+1} \ldots \varepsilon_{l+m} \varepsilon_{l+m+1} \ldots \varepsilon_{l+m+n}) \in \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}$ să fie echivalente complexului $l+n$ — ar:

$$(\varepsilon)_{l+n} = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_l \varepsilon_{l+m+1} \ldots \varepsilon_{l+m+n}) \in \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+n}.$$

Această echivalență se va scrie concentrat**)

$$\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m} \bigcirc \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n} = \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+n} \rightleftarrows \{\forall (\varepsilon)_l, \exists (\varepsilon)_m, \forall (\varepsilon)_n\},$$

unde s-au notat complexele

$$(\varepsilon)_i = (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i), \quad (\varepsilon)_m = (\varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_{l+m}), \quad (\varepsilon)_n = (\varepsilon_{l+m+1}, \ldots, \varepsilon_{l+m+n}).$$

*) Notația relațiilor este conformă sistemului reprezentativ de notare de la punctul 1.

**) $\forall$ și $\exists$ sînt simbolii logici cuantificînd sensul de „toate elementele" și „există elemente".

Relația precedentă se va denumi formula de definiție a produsului de $P(\xi)$ — compoziție.

$P(\zeta)$, $P(\zeta_0)$ — *compoziția* relațiilor $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m}$, $\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}$ notată $\overset{P(\zeta \wedge \zeta_0)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+n} = \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m} \circ \overset{P(\zeta_0)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}$ se definește ca $P(\zeta)$ — compoziția, cu deosebire că probabilitatea asociată este $P(\zeta')$, $\zeta' = \zeta_0 \wedge \zeta = \xi \wedge \eta \wedge \zeta_0$.

Categoria de P — compoziție admite următoarele proprietăți:

8.1. *P — compoziția este asociativă.*

Demonstrație. Prin compoziția relațiilor $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m}$, $\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{n+r}$, $\overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{n+p}$, rezultă condiția de asociativitate

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m} \circ \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n}\right) \circ \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{n+p} = \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+m} \circ \left(\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{m+n} \circ \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{n+p}\right) = \overset{P(\xi \wedge \eta \wedge \zeta)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+p}$$

deoarece probabilitatea asociată este aceeași pentru primi doi membrii ai egalităților precedente și anume

$$P((\xi \wedge \eta) \wedge \zeta) = P(\xi \wedge (\eta \wedge \zeta)) = P(\xi \wedge \eta \wedge \zeta)$$

iar aceștia sînt echivalenți unui același produs de $P(\xi)$ — compoziție

$$\overset{P(\xi \wedge \eta \wedge \eta)}{\underset{\varphi}{R}}_{l+p} \rightleftarrows \{\forall(\varepsilon)_l, \exists(\varepsilon)_m, \exists(\varepsilon)_n, \forall(\varepsilon_p)\}$$

8.2. *P — compozițiile unor relații n—are în incluziune:*

$$\overset{P(\xi^i)}{\underset{\varphi}{R}}{}^i_n \quad \underset{\varphi}{\subset} \quad \overset{P(\eta^i) - P(\xi^i)}{\underset{\varphi}{S}}{}^i_n, \qquad i = 1,2$$

satisfac condiția de incluziune

$$\overset{P(\xi^1)}{\underset{\varphi}{R}}{}^1_{n-p,\,p} \circ \overset{P(\xi^2)}{\underset{\varphi}{R}}{}^2_{n-p,\,p} \quad \underset{\varphi}{\subset} \quad \overset{P(\eta^1 \wedge \eta^2) - P(\xi^1 \wedge \xi^2)}{\underset{\varphi}{S}}{}^1_{n-p,\,p} \circ \overset{P(\eta^2)}{\underset{\varphi}{S}}_{n-p,\,p},$$

unde

$$\underset{\varphi}{R}{}^i_{n-p,\,p} = \underset{\varphi}{R}{}^i_n, \quad \underset{\varphi}{S}{}^i_{n-p,\,p} = \underset{\varphi}{S}{}^i_n, \quad p \leqslant n.$$

Demonstrație. Pentru $\eta^t \geqslant \xi^t$ rezultă o dată cu $P(\eta^t) \geqslant P(\xi^t)$ și $P(\eta^1 \wedge \eta^2) \geqslant P(\xi^1 \wedge \xi^2)$ sau invers. Formula produsului de P — compoziție pentru cele două P — compoziții indică de asemenea incluziunea în sensul elementelor complexelor $n - p$ și p — are.

8.3. *P — reuniunea și P — compoziția satisfac condiția de distributivitate* (în sens generalizat):

$$\left(\overset{P(\xi^t)}{\underset{\varphi}{\bigcup_{t \in I}}} R^i_n\right) \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_n = \overset{P(\xi^t \wedge \xi)}{\underset{\varphi}{\bigcup_{t \in I}}} \left(\overset{P(\xi^t)}{\underset{\varphi}{R}}_n \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}_n\right), \quad (R_n = R_{n-p,p}).$$

Demonstrație. $\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_n}} \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}}$ este o relație de probabilitate asociată $P(\xi^\iota \wedge \xi)$ iar $\overset{P(\xi^\iota \wedge \xi)}{\underset{\iota \in I}{\cup}} \left(\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_n}} \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}} \right)$ are probabilitatea asociată $P\left(\underset{\iota \in I}{\vee}\left(\xi^\iota \wedge \xi\right)\right) = P\left(\xi \wedge \left(\underset{\iota \in I}{\vee} \xi^\iota\right)\right)$ egală cu a lui $\left(\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\cup}} \underset{\varphi}{R_n^\iota}\right) \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}}$. Echivalența se stabilește în sensul formulei produsului de P — compoziție.

8.4. *P — intersecția și P — compoziția satisfac condiția de incluziune*

$$\left(\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\cap}} \underset{\varphi}{R_n^\iota}\right) \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}} \subset \overset{P(\xi^\iota \wedge \xi)}{\underset{\iota \in I}{\cap}} \left(\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_m^\iota}} \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_n}}\right).$$

Demonstrație. Se verifică echivalența în sensul formulei produsului de compoziție, între probabilitățile asociate P — compozițiilor din relația precedentă existînd inegalitatea

$$P\left(\left(\underset{\iota \in I}{\wedge} \xi^\iota\right) \wedge \xi\right) \leqslant P\left(\underset{\iota \in I}{\wedge}\left(\xi^\iota \wedge \xi\right)\right).$$

8.5. *Dacă π_l', π_m', π_n' sînt permutări ale elementelor $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_l)$, $(\mathcal{E}_{l+1}, \ldots, \mathcal{E}_{l+m+1})$ $(\mathcal{E}_{l+m+1} \ldots \mathcal{E}_{l+m+n})$ iar $\pi_l = (\pi_m' \pi_l')$, $\pi_n = (\pi_n', \pi_m')$, $\pi_{ln} = (\pi_l' \pi_n')$ astfel ca $\pi_{ln}'(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_l, \mathcal{E}_{l+m+1}, \ldots, \mathcal{E}_{l+m+n}) = (\pi_n'(\mathcal{E}_{l+m+1}, \ldots, \mathcal{E}_{l+m+n}), \pi_l'(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_l))$, atunci*

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}} \circ \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}}\right)^{\pi_{ln}} = \left(\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}}\right)^{\pi_n} \circ \left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}\right)^{\pi_l}.$$

Demonstrație. Egalitatea se verifică imediat în sensul probabilității asociate

$$P((\xi \wedge \eta)^{\pi_{ln}}) = P(\xi^{\pi_l} \wedge \eta^{\pi_n}) = P(\xi \wedge \eta)$$

și în sensul formulei produsului de compoziție (fiind presupus implicit ca și în demonstrațiile anterioare că echivalența în probabilitate $P(\xi) = P(\xi^\pi)$ se asociază identității evenimentelor din E : $(\xi = \xi^\pi)$.

8.6. *Dacă $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}$, $\overset{P(\eta)}{\underset{\zeta}{R_{m+n}}}$ sînt de pluralitate 1 în raport cu π_l respectiv π_n*

sau $$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}\right)^{\pi_l} \subset \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}, \quad \left(\overset{P(\eta)}{\underset{\chi}{R_{m+n}}}\right)^{\pi_n} \subset \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}},$$

atunci $\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}} \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}$ este de pluralitate 1 în raport cu π_{l_m} (definită la proprietatea 8.5) *sau*

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}} \circ \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}}\right)^{\pi_{lm}} \subset \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}} \circ \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{l+m}}}.$$

Demonstrație. Aplicînd proprietatea 8.5 și ținînd seama de semnificația produsului de compoziție pentru incluziunile enunțate, se deduce, o dată cu inegalitățile $P(\xi^{\pi_l}) \leqslant P(\xi)$, $P(\eta^{\pi_n}) \leqslant P(\eta)$, incluziunea dată.

Pentru $l = m = n = 1$, $\xi = \eta$, această proprietate reprezintă o implicare între reflexivitatea lui $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}$ și $\left(\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}\right)^2$.

9. *Tranzitivitatea* relației $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}$ este proprietatea oricărei P — compoziții $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}} \circ \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{n+m}}}$ de a verifica incluziunea

$$\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{m+n}}} \circ \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{n+m}}} \underset{\varphi}{\overset{P(\zeta) - P(\xi \wedge \eta)}{\subseteq}} \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}$$

ζ fiind arbitrar. (Într-adevăr, P — compoziția are probabilitatea $P(\xi \wedge \eta)$.

În particular se vor considera relațiile pentru care $n = m$.

Pentru $m = n = 1$, $\xi = \eta$, incluziunea tranzitivității devine

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}}\right)^2 \overset{0}{\underset{\varphi}{\subseteq}} \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}}.$$

Categoria tranzitivității (statistice) se caracterizează printr-o serie de proprietăți printre care sînt enunțate următoarele

9.1. *Pluralele unei relații tranzitive obținute prin permutările definite de 8.5, 8.6 sînt tranzitive.*

Demonstrație. Se deduce din proprietățile 8.5 și 8.6 incluziunea

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}\right)^{\pi_{mm}} \circ \left(\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}\right)^{\pi_{mm}} \underset{\varphi}{\overset{P(\zeta) - P(\xi \wedge \eta)}{\subseteq}} \left(\overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}\right)^{\pi_{mm}}.$$

9.2. *P — Intersecția unor relații tranzitive $\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}$, $\overset{P(\eta^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}$, $\iota \in I$ este tranzitivă.*

Demonstrație. În baza definiției P — compoziției, subzistă implicația

$$\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\bigcap}} \overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}} \circ \overset{P(\eta^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\bigcap}} \overset{P(\eta^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}} \Rightarrow \overset{P(\xi^\iota \wedge \eta^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\bigcap}} \overset{P(\xi^\iota \wedge \eta^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}} \rightleftarrows \overset{P\left(\underset{\iota \in I}{\wedge}(\xi^\iota \wedge \eta^\iota)\right)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}.$$

În baza tranzitivității, rezultă atunci incluziunea

$$\overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\bigcap}} \overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}} \circ \overset{P(\eta^\iota)}{\underset{\iota \in I}{\bigcap}} \overset{P(\xi^\iota)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}} \underset{\varphi}{\overset{P(\zeta) - P\left(\underset{\iota \in I}{\wedge}(\xi^\iota \wedge \eta^\iota)\right)}{\subseteq}} \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{R_{m+m}}}.$$

În cazul reuniunii, o proprietate generală analogă nu are loc : de exemplu, $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^<}}$, $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^>}}$ tranzitive nu admit doar reuniuni tranzitive.

Definiție. *Prin intervalul statistic* $I_P = (0,1)_P$ *pe axa* R *(reală) se definește mulțimea elementară*

$$I_P = \left\{ \overset{e}{e_2} \in \mathfrak{S}_2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}),\quad 0 \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}} e_2,\quad e_2 \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}} 1 \right\}$$

unde $\mathfrak{S} \equiv R$, *iar* $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}}$ *este considerat în general independent de exemplele anterioare.*

Relația de *incluziune interioară* a lui $\mathfrak{S}_1$ în $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S})$, se definește cu ajutorul mulțimilor elementare reprezentative (din{}), prin următoarea formulă (de incluziune interioară) :

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} \mathfrak{S}_2 = \left\{ \overset{s}{e_2} \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} e_1,\ e_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} \overset{d}{e_2};\ \forall \overset{e}{e_1} \in \mathfrak{S}_1 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S});\ \exists \overset{s}{e_2},\ \overset{d}{e_2} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2),\ \mathfrak{S}_2 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}) \right\}$$

care exprimă faptul că pentru orice element $\overset{e}{e_1} \in \mathfrak{S}_1$ există elemente $\overset{s}{e_2}$, $\overset{d}{e_2} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2)$ pentru care au loc relațiile

$$\overset{s}{e_2} \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} e_1,\quad e_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} \overset{d}{e_2}.$$

Formula incluziunii interioare se mai notează

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} \mathfrak{S}_2 \rightleftarrows \mathfrak{S}_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{\subset}} Int\ \mathfrak{S}_2.$$

Ținînd seama de definiția intervalului statistic I_P rezultă următoarele proprietăți :

9.3. *Relația de incluziune interioară a lui* $\mathfrak{S}$ *în intervalul statistic* I_P *admite formularea reprezentativă,*

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} I_p = \left\{ 0 \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}} \overset{s}{e_2} \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} e_1;\quad e_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} \overset{d}{e_2} \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}} 1, \ldots \right\}.$$

9.4. *Dacă* $P = P(\xi_1^{\leqslant})$, $P' = P(\xi_2)$ *iar relațiile binare* $\overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}}$ *și* $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}}}$ *sînt tranzitive, relația de incluziune interioară a lui* $\mathfrak{S}$ *în* I_P *se reprezintă astfel*

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P'}{\underset{\varphi}{R_2}} I_P = \left\{ 0 \overset{P''}{\underset{\varphi}{R_2}} e_1,\quad e_1 \overset{P''}{\underset{\varphi}{R_2}} 1,\ \forall \overset{e}{e_1} \in \mathfrak{S}_1 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}),\quad 0,\quad 1 \in I_P \right\},$$

unde $P'' = P(\xi_1^{\leqslant} \wedge \xi_2')$.

9.5. *Dacă* $\xi_2^{\leqslant} \supset \xi_1^{=}$, $\left(\underset{\varphi}{R_2^{\leqslant}} \supset \underset{\varphi}{R_2^{=}}\right)$, $\xi_2^{'} \supset \xi_1^{=}$, $\left(\underset{\varphi}{R_2^{'}} \supset \underset{\varphi}{R_2^{=}}\right)$, *atunci* $\underset{\varphi}{R_2^{''}}$ *este efectiv reflexivă pentru* $\mathcal{E}_1 = I_P$ *iar* $I_P \underset{\varphi}{R_2^{'}} I_P \rightleftarrows I_{P''} \rightleftarrows I_P$.

Ultima proprietate rezultă observînd că $P'' \geqslant P(\xi^{=})$, $r_{R_2} \geqslant 0$.

9.6. *Conform exemplelor de realizare, se disting următoarele tipuri de intervale statistice*:

$I_P = [0,1]$ = interval statistic închis (pe R^+), pentru $P = P(\xi^{\leqslant}) = 1 + 1/m_2 - 1/m_1$;

$I_P = \,)0,1(\,$ = interval statistic deschis extern lui $[0,1]$ pentru $P = P(\xi^{>}) = 1/m_1 - 1/m_2$;

$I_P = (0,1)$ = interval statistic deschis (pe R^+), pentru $P = P(\xi^{<}) = 1/m_2$;

$I_P = \,]0,1[\,$ = interval statistic închis extern lui (0,1), pentru $P = P(\xi^{\not<}) = P(\xi^{\geqslant}) = 1 - 1/m_2$ etc.

9.7. *Pentru* $\underset{\varphi}{R_2^{P'}} = \underset{\varphi}{R_2^{P''}} = \underset{\varphi}{R_2^{P\leqslant}}$ *are loc relația de incluziune internă a lui* $I_{P(\xi^{\leqslant})}$ *în* $I_{P(\xi^{\leqslant})} : I_{P(\xi^{\leqslant})} \underset{\varphi}{R_2^{P(\xi^{\leqslant})}} I_{P(\xi^{\leqslant})}$.

Observație. Modul de definire al intervalelor depinde de aplicația φ. De exemplu, admițînd ca definiție a aplicației φ următoarele echivalențe

$$e_2^s \underset{\varphi}{R_2^{P\leqslant}} e_1 \rightleftarrows \delta(e_1, e_2^s) / \delta(e_2^d, e_2^s) = 1 - P,$$

$$e_1 \underset{\varphi}{R_2^{P\leqslant}} e_2^d \rightleftarrows \delta(e_2^d, e_1) / \delta(e_2^d, e_2^s) = P, \quad P \leqslant 1,$$

unde $\delta(e, e')$ este distanța între e, e' pe axa reală R, intervalul deschis, închis și mijlocul său admite următoarele reprezentări: $I_P = (0,1)$, $P \leqslant 1$; $I_P = [0,1]$, $P < 1$, $I_P = \left(\frac{1}{2}\right)$, $P = \frac{1}{2}$.

10. *Condiționalitate.* O altă categorie legată de elementele fundamentale ale teoriei statistice a relațiilor este aceea de condiționalitate. O relație n — ară $R_n(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ definită prin cîmpul statistic de relații $(P(\xi), \varphi, R_n)$ este condiționată de o relație m — ară $R'_m(\mathcal{E}'_1, \ldots, \mathcal{E}'_m)$ definită prin cîmpul statistic de relații $(P(\xi'), \varphi, R'_m)$ dacă acestea implică o relație $m + n$ — ară $R''_{n+m}(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}'_1, \ldots, \mathcal{E}'_m)$ definită printr-un cîmp statistic de relații $(P(\xi''), \varphi, R''_n)$, $P(\xi'')$ fiind probabilitatea condiționată:

$$P(\xi'') = P(\xi \wedge \xi') / P(\xi'), \quad (\underset{R_n}{P(\xi)}; \underset{R_m}{P(\xi')}) \Rightarrow \underset{R_{n+m}}{P(\xi'')},$$

R_{n+m} este relația rezultată prin condiționare iar R_m relația condiție.

Dacă $\xi = \xi$, este clar că probabilitatea asociată lui R_{n+m} este aceeași cu a relației condiționate $P(\xi') = P(\xi)$. În cazul $n = m$, $\xi = \xi'$, $R'_m = R_n$, relația rezultată prin condiționare se confundă cu relația condiționată sau condiție.

11. *Echivalență.* O relație statistică $n-$ară (de ordin n), cu un indice r de reflexivitate, grad m, pluralitate $p < n$, $P-$tranzitivă este o *echivalență* de tip (r, n, m, p). Pentru $r \geqslant 0$, $n = m = 2$, $p = 1$, este o echivalență binară.

Definiție. $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \mathfrak{P}(\mathfrak{S})$ *aparțin unei clase statistice de echivalență* R_2 *dacă* $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \in \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}$, *sau, în termeni asociați prin definiția incluziunii statistice, aparțin unor clase propriu-zise de echivalență dacă* $(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \in \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}$.

Echivalența statistică se notează

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P}{\underset{\varphi}{\longrightarrow}} \mathfrak{S}_2 \rightleftarrows (\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \in \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}.$$

Pentru categoria statistică de echivalență se demonstrează următoarele proprietăți:

11.1. *Dacă* $P_{12} = P(\xi_{12})$, $P_{23} = P(\xi_{23})$, $P_{13} = P(\xi_{12} \wedge \xi_{13})$, *echivalențele statistice admit următoarea condiție de tranzitivitate:*

$$\mathfrak{S}_1 \overset{P_{12}}{\underset{\varphi}{\longrightarrow}} \mathfrak{S}_2 \overset{P_{23}}{\underset{\varphi}{\longrightarrow}} \mathfrak{S}_3 \rightleftarrows \mathfrak{S}_1 \overset{P_{13}}{\underset{\varphi}{\longrightarrow}} \mathfrak{S}_3$$

în sensul compoziției și tranzitivității statistice.

Demonstrație. Aplicînd $P(\xi)$ – compoziția pentru relații binare se deduce

$$\overset{P(\xi_{12})}{\underset{\varphi}{R}}(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2) \circ \overset{P(\xi_{23})}{\underset{\varphi}{R}}(\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3) = \overset{P(\xi_{13})}{\underset{\varphi}{R_2}}(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_3).$$

11.2. *Clasele statistice de echivalență nu sînt disjuncte în general (în sens determinist) dar există o disjuncție în raport cu clasele propriu-zise notate:*

$$\overset{P_1}{\underset{\varphi}{R_1}} D \overset{P_2}{\underset{\varphi}{R_2}}.$$

11.3. *Dacă* $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}$ *este* P *– tranzitivă și pozitiv reflexivă iar* $\overset{P^\Delta}{\underset{\varphi}{R_2^\Delta}} \left(= \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^\Delta}} \right)$ *duala sa, atunci* $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} \cup \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^\Delta}}$ *este o* P *– echivalență (și analog pentru* $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} \cap \overset{P\Delta}{\underset{\varphi}{R_2}}$).

Demonstrație. Conform proprietății 7.1, $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}$ este pozitiv reflexivă și conform proprietății 7.2 $\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} \cup \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}$ este pozitiv reflexivă, fiind totodată simetrică deoarece, cu proprietatea 6.4,

$$\left(\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} \cup \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}\right)^{\Delta} = \left(\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}}\right)^{\Delta} \cup \left(\overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}\right)^{\Delta} = \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}} \cup \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} = \overset{P}{\underset{\varphi}{R_2}} \cup \overset{P}{\underset{2}{R^{\Delta}}}.$$

De asemenea, P — tranzitivitatea decurge din condiția $P^{\Delta} = P$,

11.4. $\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}} \cap \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}\right) \cup \overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}}$ *este o* $P(\xi \vee \xi')$ — *echivalență dacă* $\overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}} = \overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}$.

Demonstrație. Fie $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}}$, $\overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}}$ două relații binare P — tranzitive și duala $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R^{\Delta}}}$.

Se deduce, în baza definiției $P(\xi)$ — reuniunii, egalitatea

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}} \cup \overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}}\right) \overset{P(\xi \vee \xi')}{\underset{\varphi}{\cap}} \overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}} = \left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}} \overset{P(\xi \vee \xi')}{\underset{\varphi}{\cup}} \overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}}\right) \overset{P(\xi \vee \xi')}{\underset{\varphi}{\cap}} \left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2^{\Delta}}} \overset{P(\xi \vee \xi')}{\underset{\varphi}{\cup}} \overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_2}}\right).$$

Într-adevăr, membrii egalității au aceleași probabilități asociate $P(\xi \vee \xi')$, notate pentru claritate deasupra simbolului reuniunii și deducîndu-se în sensul teoriei mulțimilor din relațiile de asociativitate și distributivitate (observația de la punctul 2):

$$\left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{P}} \overset{P(\xi \wedge \eta)}{\underset{\varphi}{\cap}} \overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{S}}\right) \overset{P((\xi \wedge \eta) \vee \zeta)}{\underset{\varphi}{\cup}} \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{T}} =$$

$$= \left(\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{P}} \overset{P(\xi \vee \zeta)}{\underset{\varphi}{\cup}} \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{T}}\right) \overset{P((\zeta \vee \xi) \wedge (\zeta \vee \eta))}{\underset{\varphi}{\cap}} \left(\overset{P(\eta)}{\underset{\varphi}{S}} \overset{P(\eta \vee \zeta)}{\underset{\varphi}{\cup}} \overset{P(\zeta)}{\underset{\varphi}{T}}\right)$$

(unde s-au notat din nou, pentru claritate, probabilitățile asociate relațiilor reuniune sau intersecție).

12. *Complementaritate.* Complementara unei relații n — are notată $\left(\overset{P}{\underset{\varphi}{R_n}}\right)'$ este relația $\overset{P(\xi')}{\underset{\varphi}{R_{\eta}}}$ pentru care $\xi \vee \xi' = I \in E$, $\xi \wedge \xi' = \varnothing \in E$. $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R}}$

În exemplele de realizare date, $\overset{P(\xi)}{\underset{\varphi}{R_2}}$ cu $\xi = \xi^{=}$, $\xi^{\neq}$; $\xi^{<}$, $\xi^{\not<}$; $\xi^{\subset}$, $\xi^{\not\subset}$ sînt complementare. Dacă probabilitățile asociate iau doar valorile extreme 0,1, complemetara unei relații poate fi interpretată ca negația acesteia.

Pentru categoria de complementaritate a relațiilor se stabilesc următoarele proprietăți :

12.1. *P — Incluziunea* $\underset{\varphi}{\overset{P(\xi)}{R_n}} \underset{\varphi}{\overset{P_2(\xi)-P_1(\xi)}{\subset}} \underset{\varphi}{\overset{P_2(\xi)}{S_n}}$ *implică P—incluziunea* $\underset{\varphi}{\overset{P(\xi_1)}{S_n}} \underset{\varphi}{\overset{P_2-P_1}{\subset}} \underset{\varphi}{\overset{P(\xi_2)}{R_n}}$.

Demonstrație. Se calculează $P_2' - P_1' = 1 - P_2 - (1 - P_1) = P_1 - P_2$ etc.

12.2. *Complementara unei P — reuniuni este P — intersecția (și invers)*

$$\left(\underset{\varphi}{\overset{P(\xi^t)}{\bigcup_{t\in I}}} R_n^t\right)' = \underset{\varphi}{\overset{P(\xi^t)}{\bigcap_{t\in I}}} R_n^t, \quad \left(\underset{\varphi}{\overset{F(\xi^t)}{\bigcap_{t\in I}}} R_n^t\right)' = \underset{\varphi}{\overset{P(\xi^t)}{\bigcap_{t\in I}}} R_n^t$$

Demonstrație. Deoarece

$$\left(\bigvee_{t\in I}\xi^t\right)' = \bigwedge_{t\in I}\xi^t, \quad \left(\bigwedge_{t\in I}\xi^t\right)' = \bigvee_{t\in I}\xi^t$$

se deduc probabilitățile asociate $\left(P\left(\bigvee_{t\in I}\xi^t\right)\right)' = P\left(\left(\bigvee_{t\in I}\xi^t\right)'\right) = P\left(\bigwedge_{t\in I}\xi^t\right)$, $\left(P\left(\bigwedge_{t\in I}\xi^t\right)\right)' = P\left(\left(\bigwedge_{t\in I}\xi^t\right)'\right)' = P\left(\bigvee_{t\in I}\xi^t\right)$ caracterizînd P — intersecții respectiv P — reuniuni.

12.3. *Proprietățile de pluralitate (simetrie și pluralitate de ordin m) sînt păstrate prin complementaritate*

$$\left(\left(\underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}}\right)^{\pi}\right)' = \left(\left(\underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}}\right)'\right)^{\pi}$$

trecerea la complementar și plural fiind comutativă.

Demonstrație. Avem

$$\left(\left(\underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}}\right)'\right)^{\pi} = \underset{\varphi}{\overset{P^{\pi}(\xi')}{R_n^{\pi}}} = \underset{\varphi}{\overset{P(\xi')}{R_n^{\pi}}} = \left(\left(\underset{\varphi}{\overset{P}{R_n}}\right)^{\pi}\right)'.$$

Elementele introduse vor servi la studiul statistic al tăieturilor din cadrul teoriei relațiilor.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1963

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОТНОШЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Излагаются главные элементы теории отношений, определенных при помощи отображений на систему случайных переменных. Изучается ряд свойств отношений включения, рефлексивности, транзитивности, композиции, комплементарности и эквивалентности.

RELATIONS STATISTIQUES

RÉSUMÉ

L'auteur présente les éléments principaux de la théorie des relations définies à l'aide d'applications sur un système de variables aléatoires associées. Il étudie une série de propriétés relatives aux relations d'inclusion, la finesse, la pluralité, la réflexivité, la composition, la transitivité, la complémentarité et l'équivalence.

BIBLIOGRAFIE

1. BOOLE GEORGE, *The Mathematical Analysis of Logic.* Cambridge, 1847.
2. BOOLE GEORGE, *An Investigation of the Laws of Thought.* London, 1854.
3. MORGAN AUGUSTUS DE, *Formal logic,* 1847 (citat după [10]).
4. MORGAN AUGUSTUS DE, *Syllabus of a Proposed System of Logic.* 1860 (citat după [10]); Transactions of the Cambridge philosophical Society, **10**, 331—358 (1864).
5. PEIRCE GH. S., *On the algebra of logic.* American Journal of Mathematics, **3**, 15—57 (1880), **4**, 85—95 (1881); **7**, 180—202 (1885); Collected Papers N. Y., **3**, 210—238, (1933).
6. FREGE GOTTLOB, *Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle, 1879.
7. FREGE GOTTLOB, *Die Grundlagend der Arithmetik.* Breslau 1884; London, 1950.
8. FREGE GOTTLOB, *Über Sinn und Bedeutung.* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, **100**, 25—50 (1892).
9. FREGE GOTTLOB, *Grundgesetze der Arithmetik.* Jena, vol. 1, 1893; vol. 2, 1903.
10. SCHRÖDER ERNST, *Algebra und Logik der Relative* in *Vorlesungen über die Algebra der Logik.* Leipzig, vol. 3, Teubner Verlag.
11. WHITEHEAD A. and RUSSEL B., *Principia Mathematica.* Cambridge University Press. Ed. I, vol. 1, 1910, vol, 2, 1912, vol. 3, 1913; Ed. II, vol. 1, 1925, vol. 2, 3, 1927.
12. KOENIG DÉNÈS, *Sur les correspondances multivoques des ensembles.* Fundamenta mathematicae. **8**, 114—134 (1926).
13. KOENIG DÉNÈS und VALKO S., *Uber mehrdeutigen Abbildungen von Mengen.* Mathematische Annallen, **95**, 135—138 (1926).
14. KOENIG DÉNÈS, *Theorie der unendlichen Graphen.* Leipzig, 1936.
15. MOORE E. H. and SMITH H. L., *General Theory of limits.* Amer. Journ. Math., **44**, 102—121 (1922).
16. BIRKHOFF G., *On the structure of abstract algebras.* (Proc. Cambridge Phil. Soc., **31**, 433—454 (1935).
17. RIGUET J., *Produit tensoriel de lattices.* Comptes Rendus, 226 40—42; 143—146, (1948).
18. RIGUET J., *Relations binaires, fermetures correspondances de Galois.* Bulletin Soc. Math. France, 114—155 (1948).
19. DUBREIL PAUL, *Algebre* vol. I, Cap. 1,2. *Relations. Equivalences.* Gauthier Villars, 1954 Cahiers scientifiques Fasc. XX
20. CSASZAR AKOS, *Fondements de la topologie générale.* § *1. Relations.* Budapest. Akademiai Kiadó, 1960.
21. TARSKI ALFRED, *Introduction à la logique. Cap. V, 76 — 102,* Gauthier Villars. 1960.
22. BERGE GLAUDE, *Espaces Topologiques. Fonctions multivoques.* Paris 1959.

METODE PROBABILISTICE ÎN SISTEME LOGISTICE NECONSTRUCTIVE*)

DE

MIRCEA TÎRNOVEANU

§ 1. VECINĂTĂȚI LOGICE RELATIVE ȘI GLOBALE

Definiția 1.1. λ — *vecinătate.*

Fie: E o mulțime de formule logice neconstructive peste baza de simboluri primitive S, înzestrată cu structură D — topologică [1]; $(\varphi_{\Lambda_i})_{i\in I}$ mulțimea tuturor claselor aplicațiilor caracterizante ale domeniului logic $\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ [2] în domeniile Λ_i; $i\in I$:

$$\varphi_{\lambda_i} : \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E) \to \Lambda_i ;\ i\in I$$

$(\mathfrak{F}_j)_{j\in J}$ o familie de mulțimi din $\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ care definește pe E structura de D — topologie; (ψ_{λ_i}) familii de mulțimi din Λ_i care determină pe Λ_i structuri de D — topologie; $M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ o formulă logică complexă, $\lambda_i\in\Lambda_i$. Spunem că $V_{\lambda_i}\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ este o λ — D — vecinătate a lui M dacă sînt satisfăcute:

a) $\varepsilon F\in(\mathfrak{F}_j)_{j\in J}$

$$(V_{\lambda_i} \overset{\downarrow}{P}^{*\alpha} F)\ \&\ M\subset F;$$

b) $(\varepsilon\psi_{\lambda_i}\in(\psi_{\lambda_i}))\ \&\ (\varepsilon\overset{\downarrow}{\varphi}_{\lambda_i}\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(\Lambda_i))\ \&\ ((\lambda_i)\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(\Lambda_i))$

$$((V_{\lambda_i})\ D^{*\alpha}\overset{\downarrow}{\varphi}_{\lambda_i})\ \&\ (\lambda_i\subset\overset{\downarrow}{\varphi}_{\lambda_i});$$

---

*) Comunicare prezentată la colocviul de Teoria probabilităților, Brașov, 1962.

$c)\ \varepsilon'(V_{\lambda_i}, \mathfrak{V}_{\lambda_i}) \Rightarrow (\varepsilon\, \lambda_i \in (\lambda_i))$

$\varphi_{\lambda_i} : V_{\lambda_i} \to \mathfrak{V}_{\lambda_i}.$

TEOREMA 1.1. $(\bar{I} \leqslant \aleph_0) \Rightarrow \varphi_{\lambda_i}(V_{\lambda_i}) = \mathfrak{V}_{\lambda_i}.$

Definiția 1.2. *Vecinătate globală.*

Fie $M \in \bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(\Xi)$, $(V_{\lambda_i}, \mathfrak{V}_{\lambda_i})$ mulțimea vecinătăților lui M corespunzătoare lui Λ_i.

Spunem că $V \in \bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)$ este vecinătate globală a lui M dacă

$a)\ V = \bigcup_{i \in I} V_{\lambda_i}$;

$b)\ \varepsilon\, \mathfrak{V} \in \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(\Lambda_i) \right)$

$\mathfrak{V} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{V}_{\lambda_i}$;

$c)\ \varepsilon(\Lambda = \bigodot_{i \in I} \Lambda_i)$

$\varphi_{\lambda : V} \to \mathfrak{V}.$

TEOREMA 1.2. $(\bar{I} \leqslant \aleph_0) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_i(V)} = \mathfrak{V})$.

§ 2. CÎMP DE FORMULE LOGICE

Definiția 2.1. *Cîmp de formule logice.*

Fie: E o mulțime de formule logice neconstructive peste baza de simboluri primite S; Ω (cu $\bar{\Omega} \geqslant \aleph_0$) o mulțime de operații logice abstracte definite pe $\bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)$ compatibile și independente [3]; $\mathfrak{A}$ o mulțime de axiome peste $[\bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E), \Omega]$ cu:

$$\bar{\mathfrak{A}} \leqslant \aleph_0.$$

Mulțimea $\bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)$ este un cîmp de formule logice dacă:

$a)$ pentru orice submulțime finită

$$\Omega_n = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \subset \Omega$$

de operații logice există o mulțime finită

$$D_n = (=_{d_1}, =_{d_2}, \ldots, =_{d_n})$$

de funcții de definire

$$(=_{d_i})_{i=1,2,\ldots,n}$$

care definesc fiecare operație ω_i în parte;

b) în particular, sînt definite operațiile

„ · ", „ − ", „ + ", „e";

c) pentru orice submulțime $\Omega_{\aleph_0} \subset \Omega$ de putere $\aleph_0$ există un algoritm de definire cu o infinitate numerabilă de pași care definește operațiile ω_i din $\Omega_{\aleph_0}$;

d) pentru orice submulțime $\Omega_\delta \subset \Omega$ de putere δ există o mulțime de funcții „sugerante" de treaptă δ:

$$\Sigma_\delta = (\equiv\rangle_i)_{i \in R},$$

(R fiind mulțimea numerelor reale), care „sugerează" definirea operațiilor ω_i plecînd de la un algoritm de definire cu o infinitate numerabilă de pași;

e) pentru orice submulțime $\Omega_\alpha \subset \Omega$ de putere α există o mulțime de funcții „sugerante" de treaptă α

$$\Sigma_\alpha = (\equiv\rangle_i)_{i \in I}, \quad \overline{I} = \alpha$$

care „sugerează" definirea operațiilor ω_i plecînd de la o mulțime de funcții de sugerare de treaptă $\beta < \alpha$;

f) pentru orice submulțime finită $\Omega_n \subset \Omega$ de operații există o submulțime de axiome $\mathfrak{A}_m \subset \mathfrak{A}$ care organizează mulțimea $\bigcup_{\xi \in \Xi} P^\xi(E)$ ca un sistem logistic de treaptă finită m;

g) pentru orice submulțime $\Omega_\alpha \subset \Omega$ de putere cel puțin numerabilă α există o submulțime $\mathfrak{A}_\beta \subset \mathfrak{A}$ de putere cel puțin numerabilă β cu

$$\alpha \leqslant \beta$$

care organizează mulțimea $\bigcup_{\xi \in \Xi} P^\xi(E)$ ca un sistem logistic de treaptă β;

h) elementele mulțimii $\mathfrak{A}$ se definesc prin mulțimi de funcții sugerate

$$(\equiv\rangle_j)_{j \in J}.$$

TEOREMA 2.1. *În raport cu operațiile „.", „−", „+", un cîmp de formule logice formează o algebră booleeană.*

§ 3. PROBABILITATE LOGICĂ

Definiția 3.1. *Probabilitate logică.*

Fie: E o mulțime de formule logice neconstructive peste baza de simboluri logice primitive S; $\bigcup_{\xi \in \Xi} P^\xi(E)$ extinderea lui E prin operația P; mulțimea

$$\mathfrak{R} = (\varphi_{\lambda_i}) \cup (\bigcup_{\xi \in \Xi} P^\xi(\Gamma)) \cup R,$$

unde $(\varphi_{\lambda_i})_{i\in I}$ este mulțimea tuturor claselor de aplicații de caracterizare ale domeniului logic $\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ în domeniile Λ_i; Γ o mulțime parțial ordonată; R mulțimea numerelor reale; H o mulțime de axiome referitoare la sistemul

$$[\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E), \mathfrak{R}].$$

Se numește probabilitate logică definită pe cîmpul de formule logice $\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ o aplicație Π a cîmpului $\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)$ în mulțimea $\mathfrak{R}$ care satisface :

$$a)\ (M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,((M=\theta)\vee(M=\{a\};\ a\in E)\vee(V_M=\theta))\Rightarrow(\Pi(M=0));$$

$$b)\ (M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,(M=E)\Rightarrow(\Pi(M)=1);$$

$$c)\ (M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,(\varphi_{\lambda_i}(M)\neq\theta)\Rightarrow(M(M)=\varphi_{\lambda_i});$$

$$d)\ (M\in\bigcup_{\xi} P^{\xi}(E))\ \&\ (\varphi_{\lambda_i}(M)=\theta)\Rightarrow(\Pi(M)=\gamma\in\Gamma).$$

$$e)\ (M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,(V_M\neq\theta)\Rightarrow(\Pi(M)=x\in[R-(0,1)]);$$

$$f)\ (M_i\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))_{i\in I}\,\&\,(\Pi(M_i)_{i\in I}=x_i\in[R-(0,1)])\,\&\,(M_i\cap M_j=\theta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\Pi(\bigcup_{i\in I} M_i)=\sum_{i\in I}\Pi M_i;$$

$$g)\ (M_i\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,(\Pi(M_i)=\gamma_i\in\Gamma)\Rightarrow(\Pi(\bigcup_{i\in I} M_i)=\bigcup_{i\in I}(\Pi M_i));$$

$$h)\ (M_i\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))\,\&\,(\Pi(M_i)=\varphi_{\lambda_i}\in(\varphi_{\lambda_i}))\Rightarrow(\Pi(\bigcup_{i\in I} M_i)=\Pi^{*}(\Pi M_i)_{i\in I},$$

unde Π^{*} este produsul aplicațiilor caracterizante φ_{λ_i}

$$i)\quad (\varepsilon(h_{i'})\subset H)_{i'\in I'\subset I}$$

$$[\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E), \mathfrak{R}, \Pi, (h_{i'})_{i'\in I'\subset I}]\in\Sigma_{DT},$$

unde Σ_{DT} este clasa structurilor logistice D — topologice.

TEOREMA 3.1. $(\overline{I}\leqslant\aleph_0)\Rightarrow((\Pi(M)\in(0,1))\vee(\Pi(M)=\theta)/M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))$.

TEOREMA 3.2. $((V_M=E)\&(\overline{I}>\aleph_0))\Rightarrow(\Pi(M)=\Pi(E)/M\in\bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))$.

TEOREMA 3.3.

Fie: $M, N \in \bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)$; $V^{M}_{\lambda_i}$, $V^{N}_{\lambda_i}$ λ — *vecinătăţile lui* M *respectiv* N. *Avem*:

$$(N \dot{\in} V^{M}_{\lambda_i}) \Leftrightarrow \varepsilon((V'^{M}_{\lambda_i} \subset V^{M}_{\lambda_i}) \,\&\, (V'^{N}_{\lambda_i} \subset V^{N}_{\lambda_i}))$$

$$\downarrow$$

$$\Pi(V'^{N}_{\lambda_i}) \gg \Pi(V'^{M}_{\lambda_i}),$$

unde $\dot{\in}$ *are reprezentarea semantică*: *aparţine* aproape *pe toate realizările* (*modelele*), *adică exceptînd poate un număr finit de realizări, iar* $\gg$ *are reprezentarea semantică*: depăşeşte *în orice relaţie de ordonare*.

Primită la redacţie la 10 februarie 1963

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В НЕКОНСТРУКТИВНЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

РЕЗЮМЕ

В § 1 определяются понятия λ-окрестности (определение 1.1) и глобальной окрестности (определение 1.2) и устанавливаются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1.1.

$$(\bar{I} \leqslant \aleph_0) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_i}(V_{\lambda_i}) = \mathfrak{P}_{\lambda_i}).$$

ТЕОРЕМА 1.2.

$$(\bar{I} \leqslant \mathfrak{d}) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_i}(V) = \mathfrak{P}).$$

В § 2 определяется понятие поля логических формул (определение 2.1) и доказывается теорема 2.1: Относительно операций «., —, +» поле логических формул образует булеву алгебру.

В § 3 определяется логическая вероятность (определение 3.1) и устанавливаются следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 3.1.

$$(\bar{I} \leqslant \aleph_0) \Rightarrow ((\Pi(M) \in (0,1)) \vee (\Pi(M) = 0) / M \in \bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)).$$

ТЕОРЕМА 3.2.

$$((V_M = E) \,\&\, (\bar{I} > \aleph_0)) \Rightarrow (\Pi(M) = \Pi(E) / M \in \bigcup_{\xi \in \Xi} P^{\xi}(E)).$$

TEOPEMA 3.3.

$$((M,\ N \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)) \,\&\, (V^{M}_{\lambda_i}, V^{N}_{\lambda_i} \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)) \Rightarrow (N \dot{\in} V^{M}_{\lambda_i}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\,((V'^{M}_{\lambda_i} \subset V^{M}_{\lambda_i}) \,\&\, (V'^{N}_{\lambda_i} \subset V^{N}_{\lambda_i})).$$

$$\downarrow$$

$$\Pi(V'^{N}_{\lambda_i}) \gg \Pi(V'^{M}_{\lambda_i}).$$

MÉTHODES PROBABILISTIQUES DANS LES SYSTÈMES LOGISTIQUES NON CONSTRUCTIFS

RÉSUMÉ

Au §1 l'auteur définit les notions de λ — voisinage (définition 1.1) et de voisinage global (définition 1.2.) et il donne les théorèmes :

THÉORÈME 1.1.

$$(I \leqslant \aleph_0) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_i}(V_{\lambda_i}) = \mathfrak{P}_{\lambda_i}).$$

THÉORÈME 1.2.

$$(I \leqslant \aleph_0) \Rightarrow (\varphi_{\lambda_i}(V) = \mathfrak{P}).$$

Au § 2, il définit la notion de champ de formules logiques (définition 2.1) et il donne le théorème 2.1 : *Par rapport aux opérations « . , — , + » un champ de formules logiques forme une algèbre booléenne.*

Au § 3, il définit la probabilité logique (définition 3.1.) et il donne les théorèmes :

THÉORÈME 3.1.

$$(I \leqslant \aleph_0) \Rightarrow ((\Pi(M) \in (0,1)) \vee (\Pi(M) = 0)/M \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)).$$

THÉORÈME 3.2.

$$((V_M = \mathrm{E}) \,\&\, (I > \aleph_0)) \Rightarrow (\Pi(M) = \Pi(E)/M \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)).$$

THÉORÈME 3.3.

$$((M, N \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E)) \,\&\, (V^{M}_{\lambda_i}, V^{N}_{\lambda_i} \in \bigcup_{\xi\in\Xi} P^{\xi}(E))) \Rightarrow (N \dot{\in} V^{M}_{\lambda_i}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\,((V^{IM}_{\lambda_i} \subset V^{M}_{\lambda_i}) \,\&\, (V^{IN}_{\lambda_i} \subset V^{N}_{\lambda_i}))$$

$$\downarrow$$

$$\Pi(V^{IN}_{\lambda_i}) \gg \Pi(V^{IM}_{\lambda_i}).$$

BIBLIOGRAFIE

1. N. A. KOLMOGOROV, *Noțiunile fundamentale ale teoriei probabilităților* (*l. rusă*), Moscova, 1936.
2. O. ONICESCU, *Curs de teoria probabilităților*, E.D.P., București, 1960.
3. B. L. VAN DER WAERDEN, *Mathematische Statistik*, Springer-Verlag Berlin — Gottingen-Heidelberg, 1957.
4. M. TÎRNOVEANU, *Structuri D — topologice I.*, Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Ed. Acad. R.P.R., București, 1962.
5. — *Despre unele proprietăți diferențiale ale domeniilor K — logice I.* Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *9* (1961).
6. — *Despre unele proprietăți diferențiale ale domeniilor K — logice II.* Comunicările Acad. R.P.R., **XI**, *10* (1961).
7. — *Despre funcția de valență* ψ. Comunicările Acad. R.P.R., **XII**, *6* (1962).

O GENERALIZARE A FUNCȚIEI LUI MÖEBIUS

DE

CONSTANTIN P. POPOVICI

§ 1. Fiind dat un număr întreg m, funcția lui Möebius, notată cu $\mu(m)$, se definește în felul următor:

$$\mu(m) = \begin{cases} (-1)^s, \text{ dacă pentru orice număr prim } p \text{ avem } p^2 \nmid m, \text{ iar } s \\ \quad \text{este numărul numerelor prime } p \text{ neasociate două} \\ \quad \text{cîte două avînd proprietatea că } p \mid m; \\ 0, \text{ dacă există cel puțin un număr prim } p \text{ astfel încît} \\ \quad p^2 \mid m. \end{cases}$$

Prin $a \mid b$, a și b fiind numere întregi, înțelegem că a divide pe b, adică există un număr întreg c astfel încît $b = ac$, iar prin $a \nmid b$ înțelegem că a nu divide pe b. Spunem că două numere întregi a și b sînt asociate dacă $a \mid b$ și $b \mid a$.

Funcția lui Möebius este deci definită pentru orice număr întreg m, deoarece considerăm, ca de obicei, că $s = 0$ dacă nu există nici un număr prim p astfel încît $p \mid m$, caz care corespunde la $m = \pm 1$, deci

$$\mu(\pm 1) = 1.$$

Din definiția dată mai rezultă că $\mu(0) = 0$, deoarece orice număr întreg îl divide pe 0.

Funcția lui Möebius are următoarele proprietăți:

1°. Este multiplicativă, adică dacă $m = m_1 m_2$, iar $(m_1, m_2) \cong 1$, atunci

$$\mu(m) = \mu(m_1)\ \mu(m_2).$$

Prin (m_1, m_2) înțelegem cel mai mare divizor comun al numerelor întregi m_1 și m_2, iar prin $a \cong b$ înțelegem că numerele întregi a și b sînt asociate.

2°. Dacă $m \neq 0$, atunci

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \varepsilon(m),$$

unde

$$\varepsilon(m) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = \pm 1, \\ 0, & \text{dacă } m \neq \pm 1, \end{cases}$$

prin notația $d \mid m$ de sub semnul Σ înțelegînd că numărul întreg d parcurge o mulțime formată din divizori ai lui m, care nu sînt asociați doi cîte doi, astfel încît orice divizor al lui m este asociat cu cel puțin un element al acestei mulțimi.

§ 2. Vom generaliza cele spuse mai sus în legătură cu funcția lui Möebius definind o funcție, notată cu $\mu_r(m)$, în felul următor.

Definiție.

$$\mu_r(m) = \begin{cases} (-1)^{s_1+s_3+s_5+\cdots+s_{2k+1}} \prod_{i=1}^{r+1} \binom{r+1}{i}^{s_i}, & \textit{dacă pentru orice} \\ & \textit{număr prim } p \textit{ avem } p^{r+2} \nmid m, \textit{ iar } s_1 \textit{ este numărul numerelor prime } p \textit{ neasociate două cîte două avînd proprietatea că } p \mid m, \textit{ dar } p^2 \nmid m, \ s_2 \textit{ este numărul numerelor prime neasociate două cîte două avînd proprietatea că } p^2 \mid m, \textit{ dar } p^3 \nmid m \textit{ etc} \ldots; \\ 0, & \textit{dacă există cel puțin un număr prim } p \textit{ astfel încît } p^{r+2} \mid m, \end{cases} \tag{1}$$

unde k este partea întreagă a lui $\frac{r}{2}$, $\binom{r+1}{i}$ sînt combinări de $r+1$ obiecte luate cîte i, iar r este un număr întreg pentru care $r \geqslant -1$.

Cazuri particulare. Dacă $r = -1$ avem

$$\varepsilon(m) = \mu_{-1}(m).$$

Într-adevăr, deoarece $r = -1$ trebuie să despărțim numerele întregi în două, anume în numere întregi pentru care, pentru orice număr prim p, avem $p^{r+2} \nmid m$, adică $p \nmid m$, astfel de numere întregi fiind $m = \pm 1$, și în numere întregi pentru care există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+2} \mid m$, adică $p \mid m$, astfel de numere întregi fiind $m \neq \pm 1$. În cazul cînd $m = \pm 1$, deoarece partea întreagă a lui $\frac{-1}{2}$ este $\left[\frac{-1}{2}\right] = -1$, deci, deoarece $2k + 1 = -1$ și $r = -1$, nici unul din factorii care intervin în definiția lui $\mu_{-1}(m)$ nu poate fi definit și atunci, ca de obicei, considerăm că acest produs este egal cu 1. Rezultă deci că

$$\mu_{-1}(m) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = \pm 1, \\ 0, & \text{dacă } m \neq \pm 1, \end{cases}$$

deci $\varepsilon(m) = \mu_{-1}(m)$.

Dacă $r = 0$ avem

$$\mu(m) = \mu_0(m).$$

Într-adevăr, deoarece $r = 0$, trebuie să despărțim numerele întregi m în două, anume în numere întregi pentru care, pentru orice număr prim p avem $p^{r+2} \nmid m$, adică $p^2 \nmid m$, și în numere întregi pentru care există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+2} \mid m$, adică $p^2 \mid m$. Deoarece partea întreagă a lui $\frac{0}{2}$ este $\left[\frac{0}{2}\right] = 0$, deci, deoarece $2k + 1 = 1$, rezultă că

$$\mu_0(m) = \begin{cases} (-1)^{s_1}, & \text{dacă pentru orice număr prim } p \text{ avem } p^2 \nmid m, \text{ iar } s_1 \text{ este} \\ & \text{numărul numerelor prime } p \text{ neascoiate două cîte} \\ & \text{două avînd proprietatea că } p \mid m; \\ 0, & \text{dacă există cel puțin un număr prin } p \text{ astfel încît} \\ & p^2 \mid m, \end{cases}$$

deoarece $\prod_{i=1}^{1} \binom{1}{i} = 1$, deci $\mu(m) = \mu_0(m)$.

§ 3. Funcția $\mu_r(m)$ are următoarele proprietăți.

1°. *Este multiplicativă, adică dacă* $m = m_1 m_2$, *iar* $(m_1, m_2) \cong 1$, *atunci*

$$\mu_r(m) = \mu_r(m_1)\ \mu_r(m_2).$$

Demonstrație. Dacă pentru orice număr prim p avem $p^{r+2} \nmid m$, iar $m = m_1 m_2$, atunci și pentru orice număr prim p avem $p^{r+2} \nmid m_1$ și $p^{r+2} \nmid m_2$, deoarece dacă ar rezulta $p^{r+2} \mid m_1$ sau $p^{r+2} \mid m_2$ am obține $p^{r+2} \mid m_1 m_2$, ceea ce vine în contradicție cu $p^{r+2} \nmid m$. Deci, în acest caz,

$$\mu_r(m_1)\,\mu_r(m_2) = (-1)^{(s_1' + s_1'') + (s_3' + s_3'') + \cdots + (s_{2k+1}' + s_{2k+1}'')} \prod_{i=1}^{r+1} \binom{r+1}{i}^{s_i' + s_i''},$$

unde $k = \left[\frac{r}{2}\right]$, iar s_i', $(i = 1, \ldots, 2k + 1)$, este numărul numerelor prime p neasociate două cîte două avînd proprietatea că $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$ și s_1'', $(i = 1, \ldots, 2k + 1)$, este numărul numerelor prime p neasociate două cîte două, avînd proprietatea că $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$. Avem $s_i = s_i' + s_i''$, $(i = 1, \ldots, 2k + 1)$, unde s_i, $(i = 1, \ldots, 2k + 1)$, este numărul numerelor prime neasociate două cîte două avînd proprietatea că $p^i \mid m$, dar $p^{i+1} \nmid m$. Într-adevăr, orice factor prim p care este numărat în

s_i' sau în s_i'' este numărat și în s_i, deoarece dacă $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$ sau $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$, atunci $p^i \mid m$, dar $p^{i+1} \nmid m$ și orice factor prim care este numărat în s_i este numărat în s_i' sau în s_i'', dar numai în unul dintre s_i' sau s_i'', deoarece dacă $p^i \mid m$, dar $p^{i+1} \nmid m$, atunci rezultă una și numai una din situațiile $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$, sau $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$.

Faptul că dacă $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$ sau $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$, atunci $p^i \mid m$, dar $p^{i+1} \nmid m$, unde $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) \cong 1$, p este un număr prim, iar $i \geqslant 1$, rezultă în felul următor. Din $p^i \mid m_1$ sau $p^i \mid m_2$ se deduce $p^i \mid m_1 m_2$, adică $p^i \mid m$. Apoi dacă n-ar rezulta $p^{i+1} \nmid m$, am avea $p^{i+1} \mid m$, deci $p^{i+1} \mid m_1 m_2$. Dacă, în același timp, $p^i \mid m_1$, din $(m_1, m_2) \cong 1$ și $i \geqslant 1$ ar rezulta $(p, m_2) \cong 1$, deci $(p^{i+1}, m_2) \cong 1$, ceea ce împreună cu $p^{i+1} \mid m_1 m_2$ ar da $p^{i+1} \mid m_1$, ceea ce vine în contradicție cu $p^{i+1} \nmid m_1$. Dacă $p^i \mid m_2$, în mod analog ar rezulta $p^{i+1} \mid m_2$, ceea ce vine în contradicție cu $p^{i+1} \nmid m_2$.

Faptul că dacă $p^i \mid m$, dar $p^{i+1} \nmid m$, atunci rezultă una și numai una din situațiile $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$ sau $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$, unde $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) \cong 1$, p este un număr prim, iar $i \geqslant 1$, se stabilește în felul următor. Din $p^i \mid m$ și $i \geqslant 1$ rezultă $p \mid m$, adică $p \mid m_1 m_2$, deci $p \mid m_1$ sau $p \mid m_2$. Dacă $p \mid m_1$, cum $(m_1, m_2) \cong 1$, rezultă $(p, m_2) \cong 1$, deci $(p^i, m_2) \cong 1$ și deoarece $p^i \mid m_1 m_2$ deducem $p^i \mid m_1$. Dacă $p \mid m_2$, în mod analog deducem că $p^i \mid m_2$. Apoi din $p^{i+1} \nmid m$ rezultă $p^{i+1} \nmid m_1$ și $p^{i+1} \nmid m_2$, deoarece dacă ar rezulta $p^{i+1} \mid m_1$ sau $p^{i+1} \mid m_2$, ar rezulta și $p^{i+1} \mid m_1 m_2$, ceea ce vine în contradicție cu $p^{i+1} \nmid m$. Se deduce numai una din situațiile $p^i \mid m_1$, dar $p^{i+1} \nmid m_1$ sau $p^i \mid m_2$, dar $p^{i+1} \nmid m_2$, deoarece dacă s-ar deduce ambele situații, am avea $p^i \mid m_1$ și $p^i \mid m_2$ cu $i \geqslant 1$, ceea ce vine în contradicție cu $(m_1, m_2) \cong 1$.

Dacă există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+2} \mid m$, $m = m_1 m_2$, $(m_1, m_2) \cong 1$, iar $r \geqslant -1$, atunci pentru acest număr prim p avem $p \mid m_1 m_2$, deci $p \mid m_1$ sau $p \mid m_2$. Dacă $p \mid m_1$, cum $(m_1, m_2) \cong 1$, rezultă $(p, m_2) \cong 1$, deci $(p^{r+2}, m_2) \cong 1$ și deoarece $p^{r+2} \mid m_1 m_2$ rezultă că există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+2} \mid m_1$. Dacă $p \mid m_2$, în mod analog rezultă că există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+2} \mid m_2$. Dar atunci $\mu_r(m) = 0$ și cel puțin unul dintre $\mu_r(m_1)$ și $\mu_r(m_2)$ este egal cu 0 și deci în toate cazurile avem

$$\mu_r(m) = \mu_r(m_1)\,\mu_r(m_2).$$

2°. *Dacă* $m \neq 0$, *atunci*

$$\sum_{d \mid m} \mu_r(d) = \mu_{r-1}(m),$$

pentru orice $r \geqslant 0$, *prin notația* $d \mid m$ *de sub semnul* $\sum$ *înțelegînd că numărul întreg* d *parcurge o mulțime formată din divizori ai lui* m, *care nu sînt asociați doi cîte doi, astfel încît orice divizor al lui* m *este asociat cu cel puțin un element al acestei mulțimi.*

Demonstrație. Deoarece $m \neq 0$, putem scrie

$$m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_t$ sînt numere prime neasociate două cîte două, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_t$ sînt numere întregi nenegative, $\varepsilon = \pm 1$, iar t este un număr natural. Dacă luăm

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_t^{\delta_t},$$

cu $0 \leqslant \delta_i \leqslant \alpha_i$, δ_i, $(i = 1, \ldots, t)$, fiind numere întregi, rezultă că d parcurge o mulțime formată din divizori ai lui m, care nu sînt asociați doi cîte doi, astfel încît orice divizor al lui m este asociat cu cel puțin un element al acestei mulțimi.

Avem

$$\sum_{d \mid m} \mu_r(d) = \sum_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t = 0}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t} \mu_r(\varepsilon p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_t^{\delta_t}) =$$

$$= \sum_{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_t = 0}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t} \mu_r(\varepsilon)\, \mu_r(p_1^{\delta_1})\, \mu_r(p_2^{\delta_2}) \ldots \mu_r(p_t^{\delta_t}) =$$

$$= \sum_{\delta_1 = 0}^{\alpha_1} \mu_r(p_1^{\delta_1}) \sum_{\delta_2 = 0}^{\alpha_2} \mu_r(p_2^{\delta_2}) \ldots \sum_{\delta_t = 0}^{\alpha_t} \mu_r(p_t^{\delta_t}).$$

Dacă pentru orice număr prim p avem $p^{r+1} \nmid m$, atunci $0 \leqslant \alpha_i \leqslant r$, $(i = 1, \ldots, t)$. În acest caz, pentru $i = 1, \ldots, t$, avem

$$\sum_{\delta_i = 0}^{\alpha_i} \mu_r(p_i^{\delta_i}) = \mu_r(p_i^0) + \sum_{\delta_i = 1}^{\alpha_i} \mu_r(p_i^{\delta_i}) = 1 + \sum_{\delta_i = 1}^{\alpha_i} (-1)^{\delta_i} \binom{r+1}{\delta_i},$$

deoarece în calculul lui $\mu_r(p_i^{\delta_i})$, unde p_i este un număr prim, iar δ_i este un număr întreg nenegativ $\leqslant r$ sau chiar $\leqslant r+1$, avem $s_{\delta_i} = 1$, iar $s_j = 0$ pentru $1 \leqslant j \leqslant 2k+1$, $j \neq \delta_i$, unde $k = \left[\frac{r}{2}\right]$, deci

$$\mu_r(p_i^{\delta_i}) = (-1)^{s_1 + s_3 + s_5 + \ldots + s_{2k+1}} \binom{r+1}{\delta_i}^{s_{\delta_i}}.$$

de unde rezultă că dacă δ_i este par, avem

$$\mu_r(p_i^{\delta_i}) = \binom{r+1}{\delta_i}^{s_{\delta_i}} = (-1)^{\delta_i} \binom{r+1}{\delta_i},$$

iar dacă δ_i este impar, avem

$$\mu_r(p_i^{\delta_i}) = (-1)^{s_{\delta_i}} \binom{r+1}{\delta_i}^{s_{\delta_i}} = (-1)^{\delta_i} \binom{r+1}{\delta_i}.$$

Prin urmare, pentru $0 \leqslant \alpha_i \leqslant r$, $(i = 1, \ldots, t)$, avem

$$\sum_{\delta_i=0}^{\alpha_i} \mu_r(p_i^{\delta_i}) = 1 + \sum_{j=1}^{\alpha_i} (-1)^j \binom{r+1}{j} = 1 + \sum_{j=1}^{\alpha_i} (-1)^j \left\{ \binom{r}{j-1} + \binom{r}{j} \right\} =$$

$$= (-1)^{\alpha_i} \binom{r}{\alpha_i} = \mu_{r-1}(p_i^{\alpha_i}),$$

justificarea relației

$$\mu_{r-1}(p_i^{\alpha_i}) = (-1)^{\alpha_i} \binom{r}{\alpha_i},$$

unde $\alpha_i \leqslant r$, făcîndu-se la fel ca și în cazul relației

$$\mu_r(p_i^{\delta_i}) = (-1)^{\delta_i} \binom{r+1}{\delta_i},$$

unde $\delta_i \leqslant r+1$.

Deci, dacă pentru orice număr prim p avem $p^{r+1} \nmid m$, rezultă

$$\sum_{d \mid m} \mu_r(d) = \mu_{r-1}(p_1^{\alpha_1})\, \mu_{r-1}(p_2^{\alpha_2}) \ldots \mu_{r-1}(p_t^{\alpha_t}) = \mu_{r-1}(m),$$

funcția $\mu_{r-1}(m)$, unde $r \geqslant 0$, fiind multiplicativă.

Dacă există cel puțin un număr prim p astfel încît $p^{r+1} \mid m$, atunci există cel puțin un i egal cu unul dintre $1, \ldots, t$, fie i_0 valoarea acestui i, astfel încît $\alpha_{i_0} \geqslant r+1$. Atunci

$$\sum_{\delta_{i_0}=0}^{\alpha_{i_0}} \mu_r(p_{i_0}^{\delta_{i_0}}) = \mu_r(p_{i_0}^0) + \sum_{\delta_{i_0}=1}^{r+1} \mu_r(p_{i_0}^{\delta_{i_0}}) = 1 + \sum_{\delta_{i_0}=0}^{r+1} (-1)^{\delta_{i_0}} \binom{r+1}{\delta_{i_0}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \binom{r+1}{j} = (1-1)^{r+1} = 0,$$

deci și în acest caz

$$\sum_{d \mid m} \mu_r(d) = \mu_{r-1}(m).$$

Aplicînd, în relația dată de proprietatea 2°, formula de inversare a lui Möebius, obținem următorul calcul prin recurență al funcției $\mu_r(m)$.

TEOREMĂ. *Avem*

$$\sum_{d \mid m} \mu_0\left(\frac{m}{d}\right) \mu_{r-1}(d) = \mu_r(m) \tag{2}$$

pentru orice $r \geqslant 0$, *unde* $\mu_{-1}(m) = \varepsilon(m)$, $\mu_0(m) = \mu(m)$, *prin notația* $d \mid m$ *de sub semnul* $\sum$ *înțelegînd că numărul întreg* d *parcurge o mulțime formată din divizori ai lui* m, *care nu sînt asociați doi cîte doi, astfel încît orice divizor al lui* m *este asociat cu cel puțin un element al acestei mulțimi.*

Primită la redacție la 25 ianuarie 1963

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИИ МЁБИУСА

РЕЗЮМЕ

Дается определение функции $\mu_r(m)$ при помощи соотношений (1) для каждого целого $r \geqslant -1$. Эта функция обладает свойствами 1° и 2°, аналогичными свойствам функции Мёбиуса, к которой сводится при $r = 0$. Формула (2) дает рекурсивный способ для нахождения этой функции для каждого $r \geqslant 0$.

UNE GÉNÉRALISATION DE LA FONCTION DE MÖEBIUS

RÉSUMÉ

On définit la fonction $\mu_r(m)$ par les relations (1), pour tout entier $r \geqslant -1$. Cette fonction a des propriétés 1° et 2° semblables aux propriétés de la fonction de Möebius avec laquelle elle coïncide pour $r = 0$. La formule (2) donne le procédé récurrent permettant d'obtenir cette fonction pour tout $r \geqslant 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. Хассе, *Лекции по теории чисел.* Москва, 1953.
2. Эрнст Трост, *Простые числа*, Москва, 1959.
3. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел.* Москва—Ленинград, 1952.

RECENZIE

GHEORGHE VRĂNCEANU, *Vorlesungen über Differenţialgeometrie* (*Lecţii de geometrie diferenţială*). Teil I şi II, Akademie – Verlag, Berlin, 1961.

În anul 1961 au apărut la Berlin primele două volume ale operei acad. G. Vrănceanu *Vorlesungen über Differenţialgeometrie*, editate de Institutul de matematică al Academiei germane de ştiinţe.

Traducerea în limba germană, după ultima ediţie franceză din 1957, cu unele completări, a fost făcută sub îngrijirea prof. Max Pinl de la Universitatea din Köln. Completările se referă la un bogat indice de autori şi probleme (ce însumează 12 pagini la volumul I şi de 20 pagini la volumul II), care permite a folosi acest tratat ca o enciclopedie în domeniul geometriei diferenţiale şi la cîteva anexe şi anume :

1) cu privire la teorema lui Fermi,

2) cu privire la transportul paralel şi la geodezicele spaţiilor riemanniene,

3) cu privire la problema scufundării unui spaţiu V_n riemannian în spaţii euclidiene – metoda de rezolvare a lui E. Cartan şi

4) cu privire la teoria unitară a cîmpului.

Primele trei anexe sînt la sfîrşitul volumului I, iar ultima, la finele volumului II.

Amintesc că apariţia volumelor *Lecţii de geometrie diferenţială* ale acad. G. Vrănceanu în limba germană, după cum se vede din prefaţa scrisă de prof. Pinl, reprezintă a treia ediţie a acestui tratat ; în 1962 a apărut o nouă ediţie în limba romînă a primului volum, completată în mod substanţial, cu scopul de a servi drept manual pentru cursul cu acelaşi nume care se predă în universităţile romîneşti.

Problemele moderne ale geometriei diferenţiale – studiul spaţiilor generalizate – îşi au originea, după cum se ştie, în operele celebre a lui B. Riemann cu privire la spaţiile ce-i poartă numele şi ale lui S. Lie şi F. Klein cu privire la grupurile continue de transformări, cunoscute azi ca teoria grupurilor Lie ; dezvoltarea lor a căpătat un puternic impuls prin crearea unor noi teorii fizice ca teoria relativităţii de A. Einstein etc.

Metodele de cercetare ale acestor domenii noi, studiate multă vreme izolat, sau format şi ele separat. Astfel, în primul deceniu al secolului al XX-lea a fost creat calculul diferenţial absolut de G. Ricci şi T. Levi-Civita pentru studiul varietăţilor riemanniene, şi calculul formelor exterioare de E. Cartan, care a dat un suflu nou, între altele, în teoria grupurilor Lie finite şi infinite ; această din urmă metodă s-a dovedit apoi propice şi în cercetarea diverselor generalizări ale spaţiilor riemanniene, care s-au produs în al doilea deceniu, permiţînd a se reuni cele două direcţii principale de cercetare din geometria diferenţială modernă.

Acad. G. Vrănceanu își începe activitatea științifică tocmai în perioada în care ideile lui T. Levi-Civita, H. Weyl, J. Schouten, E. Cartan, Veblen etc. duc la crearea spațiilor cu conexiuni liniare, a teoriei obiectelor geometrice etc., debutînd cu problema importantă a spațiilor neolonome, al căror studiu se leagă strîns de numele său.

Alături de o serie de geometri celebri ai perioadei dintre cele două războaie mondiale, ca T. Levi-Civita, H. Weyl, Veblen și alții, participă activ și multilateral la făurirea geometriei diferențiale moderne. Astfel se explică faptul că *Lecțiile de geometrie diferențială* pe care începe să le publice acad. Vrănceanu în 1947, conțin atît probleme esențiale din teoria grupurilor Lie, cît și cele din teoria spațiilor generalizate, precum și, atît calculul lui Ricci, cît și calculul lui E. Cartan; metoda congruențelor folosită de autor împlinește în bună măsură teoria reperului mobil creată de G. Darboux și de E. Cartan. În cele 12 capitole ale volumelor recenzate, ca și de altfel în următoarele 6 ale volumului III apărut în limba romînă în 1960, contribuția originală a autorului este din cele mai importante. Aceasta face ca în fiecare capitol să găsim, fie în teoria generală, fie în problemele particulare tratate, contribuția însemnată a acad. G. Vrănceanu.

Vom trece acum în revistă conținutul tratatului recenzat.

Primele trei capitole din volumul I sînt pregătitoare, deși fiecare din ele conține și o serie de probleme de geometrie de sine stătătoare.

În capitolul I, pe lîngă noțiuni introductive, ca spațiu n dimensional, congruență, tensori, forme Pfaff, se expune studiul sistemelor de congruență, legătura lor cu sisteme Pfaff asociate și alte probleme din calculul diferențial absolut al congruențelor.

În capitolul II se expune teoria grupurilor Lie-grupuri cu unu și mai mulți parametri, teoremele fundamentale ale lui S. Lie, subgrupuri, grup derivat, grup adjunct etc.

Capitolul se încheie cu grupul de stabilitate și studiul grupului unimodular.

Invarianții asociați diverselor mărimi geometrice, tensori, conexiuni etc., joacă rol fundamental în geometria diferențială. Stabilirea lor se face adesea folosindu-se metoda de echivalență, care este obiectul capitolului III. Se expune problema generală și specială de echivalență și aplicații la echivalența grupurilor continue, geometrizarea sistemelor Pfaff și a ecuațiilor diferențiale de ordinul al doilea; este demonstrată teorema lui Vrănceanu cu privire la invarianții grupului ce păstrează două sisteme Pfaff, complementare.

Ultimele trei capitole din acest volum cuprind spațiile cu conexiune afină, riemanniană și proiectivă. Materialul vast este tratat laborios, expunîndu-se în detaliu cazurile particulare importante. Metoda congruențelor intervine aici ca un auxiliar prețios, care permite autorului obținerea rezultatelor pe o cale directă, cu interpretări geometrice ușor de dat. Modul original de a defini noțiunea spațiilor cu conexiune prin racordarea afină, euclidiană sau proiectivă a vecinătăților punctelor vecine ale spațiului, permite o expunere unitară a acestor spații și apropierea punctelor de vedere ale lui Weyb, Cartan și Schouten.

Spațiile cu conexiune afină sînt definite și studiate în capitolul IV. Se introduc aici noțiunile de derivată covariantă, transport paralel, concurență în sens „Myller" și generalizarea acesteia etc. Se determină componentele conexiunii în raport cu un sistem de congruențe, stabilindu-se, pe această cale, sistemul complet de invarianți ai unei curbe în A_n etc. În continuare se introduc tensorii de torsiune și de curbură, se deduc indentitățile Bianchi-Padova și se stabilesc formele algebrice asociate acestor tensori obținuți prin contragere. Ultimele paragrafe sînt destinate echivalenței a două spații A_n, spațiilor lui E. Cartan, ecuațiilor de structură ale unui spațiu A_n etc.

Bazat pe teoria spațiilor A_n, în capitolul V se consideră cazul spațiilor riemanniene V_n. În afară de probleme clasice referitoare la lungimi, unghiuri, paralelism și curbură, sînt

prezentate cîteva probleme noi ca : echivalență a două spații V_n (expusă incomplet) imersiunea unui V_n într-un spațiu euclidian E_N, spații riemanniene singulare, mișcări ale spațiilor V_n în ele însele etc.

Volumul se încheie cu capitolul VI în care se tratează diverse probleme ale spațiilor cu conexiune proiectivă P_n prin metoda congruențelor care face ca expunerea să fie unitară și generală în același timp.

Volumul al II-lea este împărțit de asemenea în 6 capitole. Aici sînt prezentate clase speciale, astăzi uzuale, de spații cu conexiune liniară, geometrizarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul doi și probleme de geometrie globală.

Volumul II începe cu o clasă importantă de spații A_n, numite de autor „spații Kagan", ce au proprietatea că, într-un sistem de coordonate, curbele autoparalele aparțin unor varietăți liniare de dimensiune $\geqslant 2$. Se cercetează spațiile V_n parțial proiective stabilindu-se, la sfîrșitul capitolului I, invarianții acestor spații. Se mai demonstrează teoremele lui Egorov și Vrănceanu referitoare la spațiile cu conexiune cu grup maxim de automorfisme.

În capitolul II sînt definite și studiate spațiile cu conexiune conformă, după Weyb și Thomas. Se expun unele probleme clasice ca de exemplu aceea a reprezentării conform euclidiene (Schouten, Cartan), se demonstrează teorema lui Egorov referitoare la grupul de mișcări ale unui spațiu V_n neconform euclidian, se expun probleme de conexiuni conform afine și conform proiective.

Capitolul III are drept obiectiv studiul spațiilor simplectice și mai general al spațiilor cu tensori de ordinul al doilea (covariant, contravariant și mixt).

În capitolul IV sînt studiate spațiile neolonome. După cum am amintim, aceste spații au fost descoperite de acad. G. Vrănceanu cu aproape patru decenii în urmă. Ulterior ele au fost studiate amănunțit de prof. G. Vrănceanu și școala sa ; mai mult, aproape toți geometrii romîni de azi au întîlnit în cercetările lor spațiile neolonome. Este interesant de reținut faptul că geometri mari ca E. Cartan, J. A. Schouten, V. V. Wagner etc. au contribuit și ei substanțial la studierea acestor spații și la unele generalizări ale lor. Aplicarea acestor spații la geometrizarea sistemelor mecanice neolonome și la teoriile unitare ale cîmpurilor fizice justifică pe deplin importanța pe care o au.

După o prezentare a subspațiilor X_m în X_n și a condițiilor de rigiditate pentru spații A_m sau P_m în E_n, se stabilesc invarianții sistemelor Pfaff, se trece la geometria spațiilor neolonome în spații X_n și la cazurile $X_n = A_n$, $X_n = V_n$. Se demonstrează apoi teoremele fundamentale referitoare la invarianții intrinseci, semiintrinseci și rigizi ai acestor spații. Se fac aplicații în mecanică-analitică. Putem regreta că varietățile neolonome neliniare ale lui Wagner sînt remarcate doar în treacăt; acest subiect ar merita o expunere cît de succintă.

Teoria spațiilor cu conexiune afină își găsește o aplicare interesantă în problema geometrizării ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Unei astfel de ecuații i se poate asocia în mod invariant fie un A_7 fie un A_6 după anumite proprietăți ale caracteristicilor ecuației. Studiul acestei probleme și al cazurilor particulare, cînd este vorba de o ecuație Laplace sau de o ecuație liniară cu derivate parțiale cu n variabile, este dat în capitolul V.

Volumul II se încheie cu capitolul VI, privind unele probleme de geometrie diferențială globală. Aici găsim, printre altele, noțiunea de varietate diferențiabilă, de spațiu A_n cu obiect de conexiune constant, proprietăți globale ale curbelor autoparalele referitoare la spații remarcabile, formula lui Gauss-Bonnet și generalizarea ei. Expunerea se încheie cu proprietăți globale ale spațiilor V_{2p} și V_{4p}, stabilite pentru V_{4p} de un elev al acad. G. Vrănceanu.

Menționăm, în încheiere, că în literatura matematică de specialitate au apărut, începînd din anul 1887, patru tratate de geometrie diferențială și anume : *Leçons sur la théorie générale*

des surfaces, în 3 volume (1887—1894) a lui G. Darboux, *Lezioni di Geometria Differenziale*, în 2 volume (1902—1909), a lui L. Bianchi, *Vorlesungen über Differenzialgeometrie*, în 3 volume (1921—1929), a lui W. Blaschke și *Einführung in die neuren Methoden der Differenzialgeometrie*, în 2 volume (1935—1938), a lui J. A. Schouten și D. J. Struik. În rîndul acestor tratate se plasează și *Lecțiile de geometrie diferențială* ale acad. G. Vrănceanu. Apariția *Lecțiilor de geometrie diferențială* în trei limbi, pînă în prezent, reprezintă un moment însemnat în literatura de specialitate și constituie o contribuție remarcabilă la afirmarea matematicii românești pe plan mondial.

Prof. Univ. Gh. Gheorghiev

88

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R. P. R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algerbei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 15,35 lei.
JANKÓ BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuaţii liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU şi A. CORNEA, **Seminar S. Stoilow, 1959—1960, Teoria potenţialului pe suprafeţe riemanniene**, 160 p., 5 lei.
G. CIUCU şi R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 3,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Seminar M. Neculcea. Teoria mulţimilor**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcţii aproape—periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spaţii liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Seminar O. Onicescu. Algebre Lie**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAŞ, **Seminar M. Nicolescu, 1959—1960. Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noţiunea de rezolventă**, 82 p., 2,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuaţii funcţionale**, 523 p., 25,60 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebră superioară, fundamente : mulţimi şi operaţii, divizibilitate, spaţii liniare, forme patratice**, 455 p., 24,50 lei.
G. GALBURĂ, **Corpuri de funcţii algebrice şi varietăţi algebrice**, 180 p., 7,85 lei.
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere la teoria ecuaţiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
* * * **Lucrările celui de al III-lea congres al matematicienilor romîni**, 288 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie şi topologie — Iaşi 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferenţială din 9—12 iunie 1955, organizată de Secţia de ştiinţe matematice şi fizice a Academiei R.P.R.**, 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale normale**, 259 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice**, 213 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferenţială proiectivă**, 495 p., 25,90 lei.
G. MIHOC şi V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 8,25 lei, vol. II, 8,55 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele şi ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale. Introducere în studiul cercetărilor lui J. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte şi relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Serieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecţii de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere şi sisteme aleatoare**, 262 p., 11,20 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, cu aplicaţii la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
OCTAV ONICESCU şi colab., **Calculul probabilităţilor şi aplicaţii**, 788 p., 15 lei.
* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. +1 pl., 30,20 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcţiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei, vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticităţii**, vol. I, 996 p. + 6 pl., 42,80 lei.
GHEORGHE ŢIŢEICA, **Geometria diferenţială proiectivă a reţelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOŞ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulţimilor şi structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différentielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 428 p., 27,50 lei.

Din

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

au apărut:

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, 4 n-re (nr. 1, 10 lei; nr. 2—4, a 7 lei);
anul XIV, 1963, 3 n-re (a 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare

în Bucureşti:
la LIBRĂRIA ACADEMIEI;
LIBRĂRIA „MIHAIL EMINESCU";
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 17;
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 4;

în Cluj:
la LIBRĂRIA „A. S. PUŞKIN";

în Iaşi:
la LIBRĂRIA „CARTEA RUSĂ";

în Timişoara:
la LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 1,

precum şi la chioşcurile şi magazinele de difuzare a presei din mediul urban.

Se pot comanda şi prin poştă la librăria

„CARTEA PRIN POŞTĂ"

Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerţul exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. „Informaţia" — c. 2332

43.831

Lei 7.—

F 762

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI MATEMATICE

4

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

4

ANUL XIV

1963

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACȚIE

ACADEMICIAN G. VRĂNCEANU — *redactor responsabil*; ACADEMICIAN MIRON NICOLESCU; ACADEMICIAN GR. C. MOISIL; ACADEMICIAN GH. MIHOC; ACADEMICIAN N. TEODORESCU; A. HALANAY.

Revista STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE
apare de patru ori pe an

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

Anul XIV, nr. 4 1963

SUMAR

Pag.

*** 15 ani de existenţă a Academiei R.P.R. 511

GH. VRĂNCEANU, Grupuri discrete ale spaţiului afin 513

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Funcţii monogene pe spaţii Riemann. I. Funcţii monogene pe o suprafaţă în spaţiu 519

IVAN SINGER, Baze în spaţii Banach. I 533

G. THEILER, Două teoreme ergodice referitoare la lanţurile cu legături complete, staţionare, de ordinul de multiplicitate doi, cu un număr finit de stări . . . 587

MARIUS I. STOKA, Asupra spaţiilor riemanniene cu metrica nedefinită, cu curbura constantă 599

ION ZAMFIRESCU, O extindere a metodei lui Gauss de calcul al integralelor improprii 615

ANDREI DOBRESCU, Asupra grupurilor de mişcări ale ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea în n variabile 633

VALENTIN POPESCU, Asupra unor „extinderi" ale integralelor Riemann şi Lebesgue 641

I. VĂDUVA, Estimaţia unei densităţi de repartiţie K-dimensională 653

DAN BURGHELEA, Despre şirurile exacte asociate aplicaţiilor 661

EFTIMIE I. GRECU, Asupra spaţiilor V_3 cu conexiune afină constantă local euclidiene 669

ION D. ION, Asupra grupurilor de valuare 689

RECENZII 697

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

ÈTUDES ET RECHERCHES MATHÉMATIQUES

XIV année, n° 4 1963

SOMMAIRE

Page

*** 15 années depuis la fondation de l'Académie de la R.P.R. 511

GH. VRĂNCEANU, Groupes discrets de l'espace affine 513

MARCEL N. ROŞCULEŢ, Fonctions monogènes sur les espaces de Riemann. I. Fonctions monogènes sur une surface dans l'espace 519

IVAN SINGER, Bases in Banach spaces. I 533

G. THEILER, Deux théorèmes ergodiques relatifs aux chaînes à liaisons complètes, stationnaires, de l'ordre deux de multiplicité, à un nombre fini d'états 587

MARIUS I. STOKA, Sur les espaces riemanniens à métrique indéfinie à courbure constante 599

ION ZAMFIRESCU, Une extension de la méthode de Gauss pour le calcul des intégrales impropres 615

ANDREI DOBRESCU, Sur les groupes de mouvements des équations aux dérivées partielles du second ordre à n variables 633

VALENTIN POPESCU, Sur quelques « extensions » des intégrales de Riemann et de Lebesgue 641

I. VĂDUVA, Estimation d'une densité de répartition à K-dimensions 653

DAN BURGHELEA, Sur les suites exactes associées aux applications 661

EFTIMIE I. GRECU, Sur les espaces V_3 à connexion affine constante, localement euclidiens 669

ION D. ION, Sur les groupes de valuation 689

COMPTES RENDUS 697

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Год XIV, № 4 1963

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

* * * 15 лет существования Академии РНР 511
Г. ВРЭНЧАНУ, Дискретные группы аффинного пространства 513
МАРЧЕЛ Н. РОШКУЛЕЦ, Моногенные функции в пространствах Римана. I. Моногенные функции на поверхности в пространстве 519
ИВАН ЗИНГЕР, Базисы в пространствах Банаха. I. 533
Г. ТЕЙЛЕР, Две эргодические теоремы относительно стационарных цепей с полными связями, второго порядка множественности, с конечным числом состояний 587
МАРИУС Л. СТОКА, О римановых пространствах неопределенной метрики с постоянной кривизной 599
ИОН ЗАМФИРЕСКУ, Обобщение метода Гаусса вычисления несобственных интегралов 615
АНДРЕЙ ДОБРЕСКУ, О группе движений уравнений в частных производных второго порядка с n-переменными 633
ВАЛЕНТИН ПОПЕСКУ, О некоторых „обобщениях" интегралов Римана и Лебега 641
И. ВЭДУВА, Оценка одной K-размерной плотности распределения . . 653
ДАН БУРГЕЛЯ, О точных рядах, присоединенных приложениям . . 661
ЕФТИМИЕ И. ГРЕКУ, О локально эвклидовых пространствах V_3 с постоянной аффинной связью 669
ИОН Д. ИОН, Об оценочных группах. 689

РЕЦЕНЗИИ 697

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

15 ANI DE EXISTENȚĂ A ACADEMIEI R.P.R.

Se împlinesc 15 ani de la înființarea Academiei R.P.R., instituție de tip nou, factor activ, îndrumător și organizator al activității științifice din întreaga țară. Acest fapt a avut o mare înrîurire asupra dezvoltării științei romînești. Sub regimul democrat popular cercetarea științifică a luat în patria noastră un avînt cu totul necunoscut în trecut. Sprijinul larg, sistematic și organizat, pe care munca de cercetare științifică l-a primit și-l primește din partea Partidului și Guvernului a dat roade evidente în toate domeniile de cercetare. Academia R.P.R. a devenit un puternic centru științific cu peste 30 de institute și centre de cercetare care grupează aproximativ 2 000 de cercetători.

Deosebit de elocvente sînt progresele realizate în matematică. Institutul de matematică al Academiei R.P.R., înființat în 1949, a contribuit și contribuie într-o măsură considerabilă la dezvoltarea științei matematice în țara noastră. Dacă în trecut cercetarea științifică în domeniul matematicii a putut efectiv să ia o oarecare amploare și să creeze o anumită tradiție la noi în țară, aceasta se datorește în mare măsură relativei independențe a creației matematice de condițiile materiale de care este atît de strîns legată cercetarea în științele experimentale. Dar condițiile favorabile determinate de noua structură a Academiei R.P.R., de sprijinul permanent acordat cercetării științifice, au avut ca efect lărgirea considerabilă a domeniilor matematice cercetate, crearea și dezvoltarea în ultimii 15 ani a unor grupuri numeroase de cercetători în domeniul matematicii, care tind tot mai evident să creeze curente proprii, cu preocupările lor caracteristice care ocupă un loc tot mai important în cercetarea matematică mondială.

S-au dezvoltat simțitor publicațiile de specialitate, a crescut în mod impresionant numărul lucrărilor de ansamblu, tratate și monografii, multe dintre acestea fiind distinse cu Premiul de Stat și cu premiile Academiei R.P.R.

De o mare însemnătate pentru progresul științei matematice în țara noastră sînt acțiunile organizate de către Academia R.P.R., cum au fost Congresul matematicienilor romîni din 1956, conferințele și colocviile de

geometrie și topologie, Teoria ecuațiilor cu derivate parțiale (1959), Analiză numerică (1960), Mecanică (1961), Teoria funcțiilor și analiza funcțională (1962), Calculul probabilităților și statistică matematică (1962). Toate aceste manifestări ale științei matematice romînești au avut o largă participare internațională, ceea ce a determinat un schimb deosebit de util de rezultate, de idei, de experiență.

În cadrul bogatelor relații internaționale ale Academiei R.P.R., un număr mare de matematicieni romîni au participat la diverse congrese, conferințe de specialitate, colocvii, care au avut loc în străinătate contribuind la cunoașterea tot mai largă a științei romînești în lume.

În îndeplinirea sarcinilor lor patriotice, oamenii de știință din țara noastră se preocupă ca cercetarea științifică să răspundă cerințelor practice ale dezvoltării social-economice și culturale, să dea lucrări la nivelul științei și tehnicii mondiale, acordînd în același timp atenția cuvenită cercetărilor cu caracter teoretic care lărgesc bazele dezvoltării de perspectivă a cercetării științifice și a tehnicii.

GRUPURI DISCRETE ALE SPAȚIULUI AFIN

DE

ACADEMICIAN GH. VRĂNCEANU

Fiind dată o transformare liniară T, pentru ca ea să definească un grup discret G trebuie ca una din rădăcinile ecuației caracteristice să fie unitatea[1]). Dacă sîntem în spațiul cu trei dimensiuni și dacă celelalte rădăcini ale ecuației caracteristice pe care să le numim a, b sînt reale, diferite de 1 și diferite între ele, transformarea T se poate reduce la forma canonică

$$x' = x + 1, \quad y' = ay, \quad z' = bz \quad (a \neq b \neq 1). \tag{1}$$

Dacă $a = b \neq 1$ avem sau forma canonică

$$x' = x + 1, \quad y' = ay, \quad z' = az \qquad (a \neq 1), \tag{2}$$

care se obține din (1) presupunînd că $a = b$ sau forma canonică

$$x' = x + 1, \quad y' = ay, \quad z' = a(z + y). \tag{3}$$

Dacă avem $a = 1$, $b \neq 1$, deci ecuația caracteristică are 1 ca rădăcină dublă avem de asemenea două forme canonice

$$\begin{aligned} &x' = x + 1, \quad y' = y, \qquad z' = az; \\ &x' = x + 1, \quad y' = x + y, \quad z' = az. \end{aligned} \tag{4}$$

În sfîrșit, dacă $a = b = 1$, deci ecuația caracteristică are o rădăcină triplă egală cu 1 avem trei forme canonice

$$\begin{aligned} &x' = x + 1, \quad y' = y, \qquad z' = z + y; \\ &x' = x + 1, \quad y' = x + y, \quad z' = z; \\ &x' = x + 1, \quad y' = x + y, \quad z' = y + z \end{aligned} \tag{4'}$$

precum și transformarea (2) în care $a = 1$, caz în care transformarea T este o translație.

---

[1]) G. Vrănceanu, *Groupes discrets linéaires*. Rev. math. pures et appl., **VII**, 205—222 (1962).

Ne punem aici problema de a determina grupurile discrete ce conțin transformarea T dată de forma canonică (1) și o translație S în variabile y, z deci o transformare de forma

$$x' = x, \quad y' = y + \beta, \quad z' = z + \gamma. \tag{5}$$

Dacă una din cantitățile β, γ este nulă, de exemplu $\gamma = 0$, atunci T, dat de (1), și S definesc un grup în planul $z = 0$ și acest grup nu poate fi discret dacă $a \neq 1$. Vom presupune deci că sîntem în cazul cînd β, γ sînt ambii diferiți de zero. Putem atunci prin multiplicarea variabilelor y, z cu cîte un factor să facem $\beta = \gamma = 1$ deci să avem ca transformare S translația

$$x' = x, \quad y' = y + 1, \quad z' = z + 1. \tag{6}$$

În acest caz transformata lui S prin T^n cu n pozitiv sau negativ este translația Σ dată de formulele

$$x' = x, \quad y' = y + a^n, \quad z' = z + b^n. \tag{6'}$$

Avem deci în grup o infinitate numerabilă de translații Σ_n ce conțin pe S, căci avem $\Sigma_0 = S$.

Evident că nu putem avea în același timp

$$| a | \geqslant 1, \quad | b | > 1$$

sau $a^n = b^n \neq \pm 1$ căci atunci Σ_n ar avea un punct de acumulare. De asemenea pentru ca grupul T, S să fie discret trebuie ca translațiile (6') să aibă o bază.

Dacă Σ_m și Σ_{m+n} sînt transformări de bază atunci trebuie că orice altă translație să fie un produs de translații Σ_m, Σ_{m+n}. În particular deci trebuie să avem $\Sigma_{2n+m} = \Sigma_m^{\lambda} \Sigma_{n+m}^{\mu}$, $\Sigma_{-n+m} = \Sigma_m^{p} \Sigma_{n+m}^{q}$, unde λ, μ, q p, q sînt numere întregi. Avem deci

$$a^{2n} = \lambda + \mu a^n, \quad a^{-n} = p + q a^n,$$
$$b^{2n} = \lambda + \mu b^n, \quad b^{-n} = p + q b^n.$$

Rezultă deci că eliminînd a^{2n} din primele ecuații, avem

$$a^n (p + q\mu) = 1 - q\lambda$$

ecuație care trebuie să fie identic verificată în a^n căci altfel am avea $a^n = b^n = \pm 1$. Rezultă deci $1 = q\lambda$ deci λ este egal cu ± 1 și a^n, b^n satisfac prin urmare la o ecuație de gradul al doilea

$$r^2 - kr + \varepsilon = 0, \tag{7}$$

unde $\varepsilon = \pm 1$ și k este un număr întreg.

Cum noi presupunem că a^n, b^n sînt reale și distincte trebuie să avem evident $k^2 - 4\varepsilon > 0$. Cum $k^2 - 4\varepsilon$ nu poate fi un pătrat perfect, rezultă că rădăcinile ecuației (7) sînt iraționale.

Dacă n este egal cu unitatea atunci a, b sînt soluții ale unei ecuații (7)

Dacă n nu este egal cu 1 să considerăm formulele

$$a = \alpha + \beta a^n, \quad b = \alpha + \beta b^n, \quad a^{-1} = \rho + \sigma a^n, \quad b^{-1} = \rho + \sigma b^n,$$

unde α, β, σ, ρ sînt numere întregi, formule care rezultă din

$$\Sigma_{m+1} = \Sigma_m^{\alpha} \Sigma_{m+n}^{\beta}, \quad \Sigma_{m-1} = \Sigma_m^{\rho} \Sigma_{m+n}^{\sigma}.$$

Rezultă deci, ținînd seama de (7), că $a + b$ este un număr întreg și că atît produsul ab cît și produsul $(ab)^{-1}$ sînt numere întregi. Deci ab este egal cu ± 1. Aceasta înseamnă că a, b satisfac de asemenea la o ecuație (7).

Avem deci teorema:

O condiție necesară și suficientă pentru ca translațiile Σ să aibă o bază formată din două din ele este ca a, b să satisfacă o ecuație de forma (7).

În acest caz, grupul $G_3(T, S)$ este un grup discret. În adevăr, formulele (7) ne dau

$$a^2 = ka - \varepsilon, \quad b^2 = kb - \varepsilon$$

și obținem formule de forma

$$a^n = h_n a + l_n, \quad b^n = h_n b + l_n,$$

unde h_n, l_n sînt numere întregi oricare ar fi n pozitiv sau negativ diferit de 0 și 1, ceea ce ne spune că toate transformările Σ_n se obțin din baza formată de Σ_0, Σ_1. Rezultă deci că o transformare generală a grupului se scrie

$$\begin{aligned} x' &= x + n, \\ y' &= a^n y + p + q a, \\ z' &= b^n y + p + q b, \end{aligned} \tag{8}$$

unde n, p, q sînt numere întregi.

Or, este clar că o asemenea transformare nu poate avea puncte fixe decît dacă $n = p = q = 0$ în care caz transformarea coincide cu transformarea identică.

Să presupunem acum că în afară de translația S avem încă o translație U dată de formulele (5) unde $\beta \neq \gamma$, căci altfel U nu poate fi independent de S. Să presupunem deci că S, U sînt translațiile de bază. Rezultă atunci că orice translație $\Sigma_n (n \neq 0)$ trebuie să fie produse ale lui S și U. În particular trebuie să avem deci formule de forma

$$a = i + h\beta, \quad b = i + hj, \frac{1}{a} = p + l\beta, \frac{1}{b} = p + lj, \tag{9}$$

unde i, h, p, l sînt numere întregi. De asemenea, transformatele lui U cu T^s, unde s este un întreg, trebuie să fie produse ale lui S și U, deci să avem formule de forma

$$a\beta = m + n\beta, \quad b\gamma = m + n\gamma, \frac{\beta}{a} = r + s\beta, \frac{\gamma}{b} = r + s\gamma, \tag{9'}$$

cu m, n, r, s numere întregi. Rezultă deci ținînd seama de prima și a treia formulă (9) și de prima formulă (9'), β trebuie să satisfacă ecuațiile

$$(i + h\beta)\beta = m + n\beta, \quad (i + h\beta)(p + l\beta) = 1 \tag{9''}$$

și ecuații analoge pentru γ.

Prin urmare, β, γ sînt rădăcinile a două ecuații cu coeficienți întregi

$$h\beta^2 + (i - n)\beta - m = 0, \quad hl\beta^2 + (hp + il)\beta + ip - 1 = 0. \tag{10}$$

Cum h este evident diferit de zero ultima ecuație (10) se scrie ținînd seama de prima

$$ml + ip - 1 + \beta(nl + hp) = 0.$$

Dar această ecuație trebuie să fie identic zero, în raport cu β căci altfel am avea $\beta = \gamma$. Avem deci condițiile

$$ml + ip = 1, \quad nl + hp = 0.$$

Ultima ecuație se poate rezolva luînd

$$p = \rho n, \quad l = -\rho h$$

și atunci prima se scrie

$$\rho(in - mh) = 1$$

ceea ce ne spune că ρ trebuie să fie ± 1, deci $in - mh = \pm 1$.

Pe de altă parte, formulele (9) ne dau

$$a + b = n + i, \quad ab = ni - hm,$$

deci a, b satisfac ecuația (7) în care $k = n + i$. Avem deci teorema:

Dacă translațiile (5), (6) *formează cu* (1) *un grup discret atunci* a, b *sînt soluții ale ecuației* (7) *în timp ce* β, γ *sînt soluții ale ecuației*

$$hR^2 + (2i - k)R - m = 0, \tag{11}$$

unde i, h, m *sînt întregi și unde avem*

$$(k - i)i - hm = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{11'}$$

Vom observa acum că dacă $\varepsilon = 1$, deci $ab = 1$, grupul discret G_3 lasă invariantă forma pătratică indefinită

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{12}$$

și în acest caz grupul a fost studiat de Ausländer și Markus[2]). Varietatea închisă ce se obține identificînd punctele invariante de grup este deci o varietate orientabilă pe care se poate da o metrică indefinită euclidiană. Dacă $\varepsilon = -1$, varietatea închisă este neorientabilă și grupul păstrează valoarea absolută a volumelor $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ deci este un grup măsurabil. Vom

[2]) L. Ausländer, L. Markus, *Flat Lorentz Manifolds*. Memoirs of the American Math. Soc., *30* (1959).

observa de asemenea că ținînd seama că noi am presupus $\beta \neq \gamma$ deci și $a \neq b$, trebuie să avem

$$k^2 - 4\varepsilon > 0$$

deci a, b, β, γ sînt numere iraționale, realizantul ecuației (11) fiind același cu realizantul ecuației (7).

În ceea ce privește grupul discret $G_3(T, S, U)$, el este dat de formulele

$$\begin{aligned} x' &= x + n, \\ y' &= a^n y + p + q\beta, \\ z' &= b^n z + p + q\beta, \end{aligned} \tag{13}$$

unde avem

$$a^n = i_n + h_n\beta\,, \quad b^n = i_n + h_n\gamma$$

cu i_n, h_n numere întregi. Grupul depinde deci de numerele întregi variabile n, p, q și nu putem avea puncte fixe decît dacă $n = p = q = 0$, cînd (12) se reduce la transformarea identică.

Vom determina într-o altă lucrare grupurile discrete în care T este dată de una din formele canonice (2), (3), (4) și de translații în planul y, z și vom arăta că în acest caz a trebuie să fie ± 1. Rezultă deci că singurele grupuri discrete G_3 în care T are rădăcini iraționale reale sînt acelea considerate în această lucrare.

Vom observa aici că în cazul (3) cu $a = 1$, se pot asocia translațiile

$$x' = x,\ y' = y + 1,\ z' = z,$$

$$x' = x,\ y' = y,\ z' = z + \frac{1}{i},$$

unde i este un întreg, și se obțin astfel grupurile $G_3(i)$ ale lui Ausländer.

Primită la redacție la 5 iunie 1963

ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

РЕЗЮМЕ

Исходя из того факта, что линейное преобразование в трехмерном пространстве, являющемся образующей дискретной группы, записывается в виде (1), если корни характеристического уравнения различны и действительны, автор ищет дискретные группы с тремя образующими, составленными из T и из перемещений S, U вдоль осей y, z.

Показывается, что S может быть взят в канонической форме (6), и тогда, если U дается (5), a, b удовлетворяют квадратичному уравнению с целыми коэффициентами (7), а β, γ — корни уравнения (11) с целыми же коэффициентами. Этот результат обобщает результат Ауслендера и Маркуса, определивших дискретные группы, оставляющих инвариантной лоренцеву метрику в трехмерном пространстве.

GROUPES DISCRETS DE L'ESPACE AFFINE

RÉSUMÉ

En partant du fait qu'une transformation linéaire dans l'espace à trois dimensions, constituant le générateur d'un groupe discret, s'écrit sous la forme (1), si les racines de l'équation caractéristique sont distinctes et réelles, on cherche les groupes discrets à trois générateurs formés de T et des translations S, U, le long des axes y, z.

On montre que, si S est exprimé sous la forme canonique (6), et si, dans ce cas, U est exprimé par (5), a, b satisferont à l'équation quadratique à coefficients entiers (7) et β, γ sont les racines de l'équation (11) qui est, elle aussi, une équation à coefficients entiers. Ce résultat généralise un résultat de Ausländer et Markus, qui ont déterminé les groupes discrets qui laissent invariante une métrique de Lorentz dans l'espace à trois dimensions.

FUNCȚII MONOGENE PE SPAȚII RIEMANN

I. FUNCȚII MONOGENE PE O SUPRAFAȚĂ ÎN SPAȚIU

DE

MARCEL N. ROȘCULEȚ

1. Să considerăm o suprafață S în spațiul E_3, căreia îi corespunde un domeniu D din planul $z = u + iv$. Fie

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{1}$$

prima formă pătratică fundamentală asociată suprafeței S și α, β, γ, δ, μ cinci funcții derivabile continuu în D, alese astfel încît

$$\alpha^2 + \gamma^2 = E, \qquad \beta^2 + \delta^2 = G, \quad \alpha\beta + \gamma\delta = F, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\delta)}{\partial u}, \tag{3}$$

condiții care sînt echivalente cu faptul că expresia diferențială complexă

$$\omega = \alpha du + \beta dv + i(\gamma\,du + \delta dv)$$

are următoarele proprietăți:

$$|\,\omega\,| = ds \tag{2'}$$

și

$$\mu\omega = d\varphi + i\,d\psi = dz \tag{3'}$$

adică $|\,\omega\,|$ este elementul de arc pe S iar $\mu\omega$ este *diferențiala* unei funcții complexe $z = \varphi(u, v) + i\psi(u,v)$.

TEOREMA 1. *Forma exterioară*

$$df(z)\,\omega \tag{4}$$

cu

$$f(z) = P(u, v) + i\,Q(u, v), \quad P, Q \in C^1 \text{ în } D,$$

se anulează pentru

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial Q}{\partial u} &= F\frac{\partial P}{\partial u} - E\frac{\partial P}{\partial v},\\ \sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial Q}{\partial v} &= G\frac{\partial P}{\partial u} - F\frac{\partial P}{\partial v},\end{aligned} \tag{5}$$

sau pentru

$$\begin{aligned}\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial Q}{\partial u} &= E\frac{\partial P}{\partial v} - F\frac{\partial P}{\partial u},\\ \sqrt{EG-F^2}\,\frac{\partial Q}{\partial v} &= F\frac{\partial P}{\partial v} - G\frac{\partial P}{\partial u},\end{aligned} \tag{5'}$$

oricare ar fi α, β, γ, δ, *care îndeplinesc condițiile* (2) *și* $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

Demonstrație. Făcînd calculele după regula de înmulțire a formelor exterioare în

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\mathrm{d}u + \left(\frac{\partial P}{\partial v} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial v}\right)\mathrm{d}v\right][\alpha\,\mathrm{d}u + \beta\mathrm{d}v + \mathrm{i}(\gamma\mathrm{d}u + \delta\mathrm{d}v)] = 0$$

trebuie să avem

$$\begin{aligned}\beta\frac{\partial P}{\partial u} - \alpha\frac{\partial P}{\partial v} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial v} - \delta\frac{\partial Q}{\partial u} &= 0,\\ \delta\frac{\partial P}{\partial u} - \gamma\frac{\partial P}{\partial v} + \beta\frac{\partial Q}{\partial u} - \alpha\frac{\partial Q}{\partial v} &= 0,\end{aligned} \tag{6}$$

din care obținem dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

$$\begin{aligned}(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{\partial Q}{\partial u} &= (\alpha\beta + \gamma\delta)\frac{\partial P}{\partial u} - (\alpha^2 + \gamma^2)\frac{\partial P}{\partial v},\\ (\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{\partial Q}{\partial v} &= (\beta^2 + \delta^2)\frac{\partial P}{\partial u} - (\alpha\beta + \gamma\delta)\frac{\partial P}{\partial v}.\end{aligned} \tag{7}$$

Dar

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) - (\alpha\beta + \gamma\delta)^2 = EG - F^2$$

și prin urmare dacă $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ condițiile (7) sînt echivalente cu (5) și dacă $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, condițiile (7) sînt echivalente cu (5'). Teorema este demonstrată. Condițiile (5) sînt de fapt condițiile de monogeneitate ale lui E. Beltrami [1], din care cauză, dacă componentele P și Q îndeplinesc condițiile (6) în D vom spune că $f(z)$ este monogenă în D.

Se verifică imediat că atît în cazul (5) cît și (5') funcțiile P și Q sînt soluțiile ecuației cu derivate parțiale de ordinul al doilea de tip eliptic:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\frac{\partial \Phi}{\partial v}-F\frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{-F\frac{\partial \Phi}{\partial v}+G\frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]=0 \qquad (8)$$

care se reduce la ecuația lui Laplace pentru $E \equiv G \equiv 1$, $F \equiv 0$.

2. Să avem în vedere acum condițiile (3), prin urmare

$$\mu\omega = \mathrm{d}z = \mathrm{d}\varphi + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\psi,$$

unde z este o funcție complexă $\varphi + \mathrm{i}\psi$; vom presupune φ, $\psi \in C^2$ în D.

TEOREMA 2. *Forma exterioară*

$$f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (9)$$

definită pe D, unde $f(z) = P(u,v) + \mathrm{i}Q(u,v)$ îndeplinește condițiile (6), *are diferențiala exterioară nulă pe D.*

Demonstrație. Dacă diferențiem exterior pe (9) avem

$$\mathrm{d}\,[f(z)\,\mathrm{d}z] = \mathrm{d}f(z)\,\mathrm{d}z + f(z)\,\mathrm{d}\,(\mathrm{d}z);$$

dar $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}\varphi) + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\,(\mathrm{d}\psi) = 0$ și $\mathrm{d}z = \mu\omega$ deci

$\mathrm{d}\,[f(z)\,\mathrm{d}z] = \mu\,\mathrm{d}f(z)\,\omega = 0$ pe D deoarece $f(z)$ îndeplinește condițiile (6) pe D.

TEOREMA 3. *Dacă (C) este o curbă simplă, închisă, rectificabilă, situată în D, dacă $f(z)$ este monogenă în D și derivatele lui P, Q sînt continue în D, dacă φ și ψ sînt derivabile de două ori continuu în D, atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Demonstrația rezultă imediat din teorema 2.

Consecință. Integrala

$$\int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z$$

luată pe un arc rectificabil oarecare $AB \subset D$, depinde numai de extremitățile arcului AB.

3. Din condițiile (5) rezultă că, dacă $P(u,v)$ este dat și este soluție a ecuației (6), Q rezultă în afara unei constante complexe arbitrare

$$Q(u,v) = \int_{u_0}^{u} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial P}{\partial u} - E\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}u + \int_{v_0}^{v} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(G\frac{\partial P}{\partial u} - F\frac{\partial P}{\partial v}\right)\mathrm{d}v. \qquad (10)$$

4. Dacă fiecărui punct $(u, v) \in D$ îi asociem două direcții l, l', anume

$$l\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \quad l'\left(\frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}, \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\right),$$

atunci condițiile de monogeneitate (6) se scriu

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{\partial P}{\partial l} &= \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\,\frac{\partial Q}{\partial l'}, \\ \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\,\frac{\partial P}{\partial l'} &= -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\frac{\partial Q}{\partial l}, \end{aligned} \tag{11}$$

și avem relația

$$\frac{\partial P}{\partial l}\cdot\frac{\partial P}{\partial l'} + \frac{\partial Q}{\partial l}\cdot\frac{\partial Q}{\partial l'} = 0.$$

5. Prin integrare putem construi funcții monogene în modul următor:

TEOREMA 4. *Dacă $f(z)$ este o funcție monogenă în D, atunci funcția $F(z)$ definită de*

$$F(z) = \int_{\widehat{AB}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

unde AB este un arc rectificabil oarecare $\subset D$, iar $\mathrm{d}z = \mu\omega$, μ, α, β, γ, $\delta \in C^1$ în D, este o funcție monogenă în D.

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\widehat{AB}} (P + \mathrm{i}Q)\,(\mu\alpha\,\mathrm{d}u + \mu\beta\mathrm{d}v + \mathrm{i}\mu\gamma\,\mathrm{d}u + \mathrm{i}\mu\delta\mathrm{d}v) = \\ &= \int_{\widehat{AB}} (P\mu\alpha - Q\mu\gamma)\,\mathrm{d}u + (P\mu\beta - Q\mu\delta)\,\mathrm{d}v + \\ &\quad + \mathrm{i}\int_{\widehat{AB}} (P\mu\gamma + Q\mu\alpha)\,\mathrm{d}u + (P\mu\delta + Q\mu\beta)\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

și pentru că cele două integrale nu depind de drum, dacă punem

$$F(z) = A(u, v) + \mathrm{i}B(u, v)$$

obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial u} &= P\mu\alpha - Q\mu\gamma, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = P\mu\beta - Q\mu\delta, \\ \frac{\partial B}{\partial u} &= P\mu\gamma + Q\mu\alpha, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = P\mu\delta + Q\mu\beta, \end{aligned} \tag{12}$$

care verifică condițiile de monogeneitate (6), deci A și B sînt soluții ale ecuației cu derivate parțiale (8) iar $F(z)$ este monogenă în D.

Consecința 1. Funcția $f(z) \equiv 1$ este monogenă deci funcția

$$z = \int_{\widehat{AB}} dz$$

este monogenă în D.

Putem arăta și direct acest fapt. Dacă în (10) facem $P \equiv 1$, $Q \equiv 0$, urmează

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \alpha\mu, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \beta\mu;$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \gamma\mu, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \delta\mu$$

și înlocuind în (6) obținem

$$\beta\mu\alpha - \alpha\mu\beta + \gamma\mu\delta - \delta\mu\gamma = 0,$$
$$\delta\mu\alpha - \gamma\mu\beta + \beta\mu\gamma - \alpha\mu\delta = 0.$$

Consecința 2. Funcția $f(z) = z^n$ este monogenă.

În adevăr, deoarece z este monogenă atunci și

$$z^2 = 2\int_{\widehat{AB}} z\, dz$$

este monogenă. Prin recurență rezultă că $f(z) = z^n$ este monogenă.

Din cele de mai sus avem și

TEOREMA 5. *Seria de funcții*

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{13}$$

în domeniul de convergență uniformă al ei cît și al derivatei sale reprezintă o funcție monogenă.

Demonstrație. Fiecare din funcțiile componente ale seriei (13) este o funcție monogenă și condițiile de monogeneitate sînt liniare, deci componentele lui $S(z)$ verifică condițiile de monogeneitate.

6. Să considerăm ca exemplu o suprafață S cu prima formă pătratică fundamentală

$$ds^2 = v^2\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

Se găsesc imediat următoarele sisteme de soluții

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = u, \quad \gamma_1 = v, \quad \delta_1 = 0, \quad \mu_1 = \frac{1}{uv},$$

$$\alpha_2 = v, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \delta_2 = u, \quad \mu_2 = \frac{1}{uv},$$

deci putem lua

$$\omega_1 = u\,dv + iv\,du \quad \text{sau} \quad \omega_2 = v\,du + i\,u\,dv$$

din care obținem

$$z_1 = \int \frac{1}{uv}(udv + ivdu) = \ln v + i \ln u,$$

$$z_2 = \int \frac{1}{uv}(vdu + iudv) = \ln u + i \ln v.$$

Condițiile de monogeneitate (6) sînt pentru primul sistem de soluții

$$u\frac{\partial P}{\partial u} + v\frac{\partial Q}{\partial v} = 0,$$

$$-v\frac{\partial P}{\partial v} + u\frac{\partial Q}{\partial u} = 0$$

și

$$v\frac{\partial P}{\partial v} + u\frac{\partial Q}{\partial u} = 0,$$

$$u\frac{\partial P}{\partial u} - v\frac{\partial Q}{\partial v} = 0$$

pentru al doilea sistem de soluții. În ambele cazuri P și Q verifică aceeași ecuație diferențială de tip eliptic

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{u}\frac{\partial Q}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\frac{\partial Q}{\partial u}\right) = 0. \tag{14}$$

Funcțiile reale definite de seriile

$$a_0 + a_1(\ln u + i \ln v) + \ldots + a_n(\ln u + i \ln v)^n + \ldots,$$

$$b_0 + b_1(\ln v + i \ln u) + \ldots + b_n(\ln v + i \ln u)^n + \ldots,$$

în domeniul D în care seriile derivatelor de ordinul doi sînt uniform convergente, sînt soluții ale ecuației (14).

7. LEMA 1. *Dacă* $P(u, v) + iQ(u, v)$ *și* $M(u, v) + iN(u, v)$ *sînt monogene pe același domeniu* D, *produsul*

$$(P + iQ)(M + iN)$$

este o funcție monogenă pe D.

Demonstrație. Avem

$$A + \mathrm{i}\,B = PM - QN + \mathrm{i}\,(PN + QM),$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = M\frac{\partial P}{\partial u} + P\frac{\partial M}{\partial u} - Q\frac{\partial N}{\partial u} - N\frac{\partial Q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} = M\frac{\partial P}{\partial v} + P\frac{\partial M}{\partial v} - Q\frac{\partial N}{\partial v} - N\frac{\partial Q}{\partial v},$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = N\frac{\partial P}{\partial u} + P\frac{\partial N}{\partial u} + Q\frac{\partial M}{\partial u} + M\frac{\partial Q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial B}{\partial v} = N\frac{\partial P}{\partial v} + P\frac{\partial N}{\partial v} + Q\frac{\partial M}{\partial v} + M\frac{\partial Q}{\partial v}$$

și dacă le înlocuim în (6) obținem, grupînd convenabil,

$$P\left(\beta\frac{\partial M}{\partial u} - \alpha\frac{\partial M}{\partial v} + \gamma\frac{\partial N}{\partial u} + \delta\frac{\partial N}{\partial v}\right) + Q\left(-\beta\frac{\partial N}{\partial u} + \alpha\frac{\partial N}{\partial v} + \right.$$
$$\left. + \gamma\frac{\partial M}{\partial u} - \delta\frac{\partial M}{\partial v}\right) + M\left(\beta\frac{\partial P}{\partial u} - \alpha\frac{\partial P}{\partial v} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial u} - \delta\frac{\partial Q}{\partial v}\right) +$$
$$+ N\left(-\beta\frac{\partial Q}{\partial u} + \alpha\frac{\partial Q}{\partial v} + \gamma\frac{\partial P}{\partial u} - \delta\frac{\partial P}{\partial v}\right) = 0$$

cît și

$$P\left(\delta\frac{\partial M}{\partial u} - \gamma\frac{\partial M}{\partial v} + \beta\frac{\partial N}{\partial u} - \alpha\frac{\partial N}{\partial v}\right) + Q\left(-\delta\frac{\partial N}{\partial u} + \gamma\frac{\partial N}{\partial v} + \right.$$
$$\left. + \beta\frac{\partial M}{\partial u} - \alpha\frac{\partial M}{\partial v}\right) + M\left(\delta\frac{\partial P}{\partial u} - \gamma\frac{\partial P}{\partial v} + \beta\frac{\partial Q}{\partial u} - \alpha\frac{\partial Q}{\partial v}\right) +$$
$$+ N\left(-\delta\frac{\partial Q}{\partial u} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial v} + \delta\frac{\partial P}{\partial u} - \alpha\frac{\partial P}{\partial v}\right) = 0.$$

Ținînd seama că perechile (P, Q), (M, N) verifică în parte sistemul (6) lema este demonstrată.

LEMA 2. *Dacă* $P(u, v) + \mathrm{i}Q(u, v)$ *este monogenă pe domeniul* D, *atunci* $\dfrac{1}{P(u,v)+\mathrm{i}Q(u,v)}$ *este monogenă pe* $D - \{D_0\}$, *unde* $\{D_0\}$ *este mulțimea zerourilor lui* $P(u, v) + \mathrm{i}Q(u, v)$.

Demonstrație. Avem

$$A + \mathrm{i}B = \frac{P}{P^2+Q^2} - \mathrm{i}\frac{Q}{P^2+Q^2},$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \frac{P'_u(Q^2-P^2)-2PQQ'_u}{(P^2+Q^2)^2}, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{P'_v(Q^2-P^2)-2PQQ'_v}{(P^2+Q^2)^2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = -\frac{Q'_u(P^2-Q^2)-2PQP'_u}{(P^2+Q^2)^2}, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = -\frac{Q'_v(P^2-Q^2)-2PQP'_v}{(P^2+Q^2)^2},$$

pe care dacă le introducem în (6), grupînd convenabil, obținem

$$\frac{Q^2-P^2}{(P^2+Q^2)^2}\left[\beta\frac{\partial P}{\partial u} - \alpha\frac{\partial P}{\partial v} - \delta\frac{\partial Q}{\partial u} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial v}\right] +$$

$$+\frac{2PQ}{(P^2+Q^2)^2}\left[-\beta\frac{\partial Q}{\partial u} + \alpha\frac{\partial Q}{\partial v} - \delta\frac{\partial P}{\partial u} + \gamma\frac{\partial P}{\partial v}\right] = 0$$

și

$$\frac{Q^2-P^2}{(P^2+Q^2)^2}\left[\delta\frac{\partial P}{\partial u} - \gamma\frac{\partial P}{\partial v} + \beta\frac{\partial Q}{\partial u} - \alpha\frac{\partial Q}{\partial v}\right] +$$

$$+\frac{2PQ}{(P^2+Q^2)^2}\left[-\delta\frac{\partial Q}{\partial u} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial v} + \beta\frac{\partial P}{\partial u} - \alpha\frac{\partial P}{\partial v}\right] = 0.$$

Deoarece P și Q verifică sistemul (6) parantezele sînt nule și lema este demonstrată.

Consecință. Cîtul a două funcții monogene în D este o funcție monogenă în $D - \{D_0\}$, unde $\{D_0\}$ este mulțimea zerourilor numitorului.

LEMA 3. *Fie funcția $f(z)$ definită pe D cu z definit pe D.*

1) *Dacă $f(z)$ este derivabilă pe D și z derivabilă parțial pe D, atunci $f(z)$ este monogenă pe D.*

2) *Dacă $f(z)$ este derivabilă de două ori pe D și z este derivabilă parțial pe D atunci $f'(z)$ este monogenă pe D.*

3) *Dacă $f(z)$ este derivabilă de două ori pe D și $z \in C^2$ pe D, derivatele parțiale*

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

nu sînt funcții monogene pe D.

Demonstrație. 1) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial u} = f'(z)(\mu\alpha + i\mu\gamma),$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial v} = f'(z)(\mu\beta + i\mu\delta),$$

și dacă punem $f(z) = A(u, v) + iB(u, v)$, $f'(z) = R(u, v) + iS(u, v)$, obținem

$$\frac{\partial A}{\partial u} = \mu\alpha R - \mu\gamma S, \quad \frac{\partial A}{\partial v} = \mu\beta R - \mu\delta S,$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \mu\alpha S + \mu\gamma R, \quad \frac{\partial B}{\partial v} = \mu\beta S + \mu\delta R,$$

care verifică identic relațiile (6).

2) Dacă în 1) înlocuim pe $f(z)$ cu $f'(z)$ rezultă 2).

3) Este suficient să observăm că componentele derivatelor parțiale ale lui $z = \varphi + i\psi$ nu verifică sistemul (6) decît dacă aceste derivate parțiale sînt amîndouă constante pe D.

8. Fie D un domeniu în planul (u, v) în care funcția complexă $f(z) = P(u, v) + iQ(u, v)$ este monogenă, adică P, Q verifică condițiile de monogeneitate (6). Fie $\Delta \subset D$ un domeniu în care funcția complexă $z = \varphi + i\psi$ definită de condițiile (2) și (3), are derivate parțiale de ordinul doi continue. Fie $\Delta' \subset \Delta$ un domeniu simplu conex care conține numai un zero al funcției $\varphi(u, v) + i\psi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, anume punctul $(u_0, v_0) \in \Delta$. Dacă în Δ' derivatele parțiale ale lui P și Q sînt continue avem următoarea :

TEOREMĂ. *Dacă $C \subset \Delta'$ este o curbă închisă, simplă, rectificabilă care înconjoară punctul u_0, v_0, atunci*

$$f(z_0) = \frac{1}{i\lambda(z_0)} \int_C f(z) \frac{dz}{z - z_0}, \tag{15}$$

unde am pus $z_0 = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, $f(z_0) = P(u_0, v_0) + iQ(u_0, v_0)$ iar $\lambda(z_0)$ este variația argumentului lui ln $(z - z_0)$ *cînd punctul (u, v) parcurge conturul C.*

Demonstrație. a) Diferențiala exterioară a formei diferențiale

$$f(z) \cdot \frac{dz}{z - z_0}$$

este nulă. În adevăr

$$d\left[f(z)\frac{dz}{z - z_0}\right] = \frac{1}{z - z_0} df(z)\, dz + \frac{1}{z - z_0} f(z)\, d(dz) - \frac{1}{(z - z_0)^2} f(z)\, dz\, dz,$$

conform teoremei 2 $df(z)dz = 0$, deoarece P și Q îndeplinesc condițiile (6), și conform regulilor de calcul ale diferențialelor exterioare $dzdz = 0$, $d^2z = 0$, deoarece φ și ψ au derivatele de ordinul doi continue.

b) Fie (γ) o curbă închisă, simplă, rectificabilă, situată în Δ' care înconjoară punctul (u_0, v_0) astfel încît pentru orice punct (u, v) situat pe (γ)

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Avem

$$\int_C f(z)\frac{dz}{z - z_0} - \int_\gamma f(z)\frac{dz}{z - z_0} = 0$$

şi

$$\int_C f(z)\frac{dz}{z - z_0} + \int_\gamma [f(z) - f(z_0)]\frac{dz}{z - z_0} - f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0. \quad (16)$$

Dacă notăm $|z - z_0| = \rho$, $\arg(z - z_0) = \theta$ obţinem

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_\gamma d\ln(z - z_0) = \int_\gamma d\ln\rho + i\lambda(z_0) = i\lambda(z_0),$$

unde $\lambda(z_0)$ este variaţia argumentului lui $\ln(z - z_0)$ cînd z parcurge curba (γ), egal cu variaţia argumentului lui $\ln(z - z_0)$ cînd z parcurge curba C, avînd în vedere condiţiile cerute curbei C. Dacă curba (γ), prin deformări continue [2] (p. 95) se reduce la punctul (u_0, v_0), atunci din (16) rezultă imediat, deoarece $\lambda(z_0) \neq 0$,

$$f(z_0) = \frac{1}{i\lambda(z_0)}\int_C f(z)\frac{dz}{z - z_0}.$$

Numărul $\lambda(z_0)$ este acelaşi pentru orice curbă $C \subset \Delta'$ care înconjoară punctul z_0 şi se poate schimba după z_0 în Δ. Funcţia $\frac{1}{z - z_0}$ este monogenă în Δ' conform lemei 3, deci $f(z_0)$ este monogenă în Δ'. Derivatele integralei (15) în raport cu argumentul z_0 vor fi, în virtutea aceleiaşi leme, funcţii monogene în Δ'. Derivatele parţiale ale integralei (15) nu sînt funcţii monogene în Δ'.

Primită la redacţie la 20 mai 1963

МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ РИМАНА

I. МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

РЕЗЮМЕ

Пусть S — поверхность, которой соответствует область D в плоскости $u + iv$. Пусть $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ — первая

основная квадратичная форма, присоединенная к поверхности S, а α, β, γ, δ, μ — пять функций, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = E,\ \beta^2 + \delta^2 = G,\ \alpha\beta + \gamma\delta = F,\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial u},\quad \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\delta)}{\partial u}. \tag{1}$$

Получаются, среди других, следующие результаты:

Теорема 1. *Внешняя форма* $df(z)\ \omega$, *где*

$$f(z) = P(u, v) + i\,Q(u, v),\ P, Q \in C^1,$$

$$\omega = \alpha\,du + \beta\,dv + i\,(\gamma\,du + \delta\,dv),\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in C^1$$

обращается в ноль, если P, Q *удовлетворяют условиям* (6), *эквивалентным* (5) *и* (5′).

Функция $f(z)$, *удовлетворяющая в* D *условиям* (6), *называется моногенной в* D.

Теорема 3. *Если* C — *замкнутая кривая, простая, исправляемая, расположенная в* D, *если* $f(z)$ *моногенна в* D *и производные* P *и* Q *непрерывны в* D; *если* φ *и* ψ *определяемые соотношением*

$$z = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mu\omega = \varphi + i\psi,\ \overset{\frown}{AB} \subset D \tag{2}$$

дважды непрерывно дифференцируемы в D, *тогда*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Теорема 6. *Пусть* D — *область на плоскости* $u + iv$, *в которой функция* $f(z)$ $P(u, v) + iQ(u, v)$ *удовлетворяет условиям* (6). *Пусть* $\Delta \subset D$ — *область, в которой комплексная функция* $z = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, *определяемая* (2), *имеет частные производные второго порядка непрерывными. Пусть* $\Delta' \subset \Delta$ *простая связная область, содержащая только один ноль функции* $\varphi(u, v) + i\psi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, *а именно точку* $(u_0, v_0) \in \Delta'$.

Если $C \subset \Delta'$ — *простая, выпрямляемая, замкнутая кривая, окружающая точку* (u_0, v_0), *если* P, Q *имеют непрерывные в* Δ' *частные производные, то*

$$f(z_0) = \frac{1}{i\,\lambda(z_0)} \int_C f(z) \frac{dz}{z - z_0},$$

где положено $z_0 = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, $f(z_0) = P(u_0, v_0) + iQ(u_0, v_0)$, *а* $\lambda(z_0)$ — *приращение аргумента* $\ln(z - z_0)$, *когда точка* (u, v) *пробегает контур* C.

FONCTIONS MONOGÈNES SUR LES ESPACES DE RIEMANN

I. FONCTIONS MONOGÈNES SUR UNE SURFACE DANS L'ESPACE

RÉSUMÉ

Soit S une surface à laquelle correspond un domaine D dans le plan $u + iv$. Soient $ds^2 = E\,du^2 + 2F du dv + G dv^2$ la première forme quadratique fondamentale associée à la surface S et α, β, γ, δ, μ cinq fonctions satisfaisant aux conditions

$$\alpha^2 + \gamma^2 = E, \quad \beta^2 + \delta^2 = G, \quad \alpha\beta + \gamma\delta = F, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$
$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial u}, \quad \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial v} = \frac{\partial(\mu\delta)}{\partial u}. \tag{1}$$

On obtient, parmi d'autres, les résultats suivants :

THÉORÈME 1. La forme extérieure $df(z)\,\omega$, où

$$f(z) = P(u, v) + i\,Q(u, v),\ P, Q \in C^1,\ \omega = \alpha\,du + \beta dv + i(\gamma\,du + \delta\,dv),\quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^1,$$

s'annule lorsque P, Q satisfont aux conditions (6) équivalentes à (5) et (5′).

Une fonction $f(z)$, satisfaisant aux conditions (6) dans D, s'appelle monogène en D.

THÉORÈME 3. Si C est une courbe fermée, simple, rectifiable, située dans D, si $f(z)$ est monogène en D et les dérivées de P et Q sont continues dans D, si φ et ψ définies par

$$z = \int_{\overset{\frown}{AB}} \mu\omega = \varphi + i\psi,\ \overset{\frown}{AB} \subset D \tag{2}$$

sont deux fois dérivables de façon continue dans D, alors

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

THÉORÈME 6. Soit D un domaine dans le plan $u + iv$, où la fonction $f(z) = P(u, v) + iQ(u, v)$ satisfait aux conditions (6). Soit $\Delta \subset D$ un domaine où la fonction complexe $z = \varphi(u, v) + i\,\psi(u, v)$ définie par (2) a les dérivées partielles de deuxième ordre continues. Soit $\Delta' \subset \Delta$ un domaine simplement connexe ne contenant qu'un zéro de la fonction $\varphi(u, v) + i\psi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, à savoir le point $(u_0, v_0) \in \Delta'$.

Si $C \subset \Delta'$ est une courbe fermée, simple, rectifiable, contournant le point (u_0, v_0), et si P, Q possèdent des dérivées partielles continues dans Δ', alors

$$f(z_0) = \frac{1}{i\lambda(z_0)} \int_C f(z) \frac{dz}{z - z_0},$$

où l'on a posé $z_0 = \varphi(u_0, v_0) + i\psi(u_0, v_0)$, $f(z_0) = P(u_0, v_0) + iQ(u_0, v_0)$, et $\lambda(z_0)$ est la variation de l'argument de $\ln(z - z_0)$, lorsque le point (u, v) parcourt le contour C.

BIBLIOGRAFIE

1. E. BELTRAMI, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Annali di Mathematica, **I**, *2* (1867).

2. S. STOILOW, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă.* Edit. Acad. R.P.R., București, 1954, I.

BAZE ÎN SPAȚII BANACH. I

DE

IVAN SINGER

INTRODUCERE

Lucrarea de față este prima parte a unei lucrări formate din trei părți în care ne propunem să expunem rezultatele cunoscute pînă în prezent asupra bazelor în spații Banach, un domeniu al analizei funcționale care de mai bine de patruzeci de ani continuă să mențină interesul unei serii de matematicieni. Pe lîngă importanța practică a bazelor, atrage atenția și dificultatea problemelor care se pun. De exemplu, problema existenței unei baze în orice spațiu Banach separabil[1]), enunțată de S. Banach în 1932 ([6], p. 111—112 și p. 245), a rămas nerezolvată pînă astăzi, cu toate eforturile unui mare număr de matematicieni, și constituie una din problemele importante ale analizei funcționale (a se vedea de exemplu [40] și [44]).

Lucrarea conține următoarele capitole:

Capitolul I. *Problema bazei. Proprietăți ale bazelor în spații Banach.*

Capitolul II. *Clase speciale de baze în spații Banach.*

Capitolul III. *Generalizări ale noțiunii de bază.*

Capitolul IV. *Aplicații la studiul structurii spațiilor Banach.*

Capitolul V. *Legături cu teoria celei mai bune aproximări.*

Capitolul VI. *Proprietăți ale bazelor în spații Banach concrete.*

Partea I a lucrării cuprinde capitolele I și II.

Toate definițiile necesare în legătură cu baze, sînt date în paragrafele respective. Rezultatele sînt expuse sub forma unor teoreme și propoziții. Pentru ca expunerea să devină mai concisă, adesea am reunit rezultate a mai multor autori într-o singură teoremă sau propoziție, arătînd, bineînțeles, cui se datorește fiecare parte a teoremei sau propoziției respective. În general, după fiecare rezultat mai important s-a in-

[1]) A se vedea capitolul I, § 1.

dicat și autorul acestuia, cu trimiterea bibliografică respectivă [2]). Aceasta ne-a permis ca *în lucrarea de față să nu dăm nici o demonstrație.*

În sfîrșit, menționăm că am pus un accent deosebit pe scoaterea în evidență, în fiecare paragraf, a problemelor deschise.

PRELIMINARII

Vom da aici definițiile unor noțiuni fundamentale. Vom nota prin K unul oarecare dintre corpul numerelor complexe sau corpul numerelor reale.

Definiția 0.1. Fie U un spațiu vectorial topologic peste corpul K. Se numește *bază* a spațiului U un șir $\{x_n\} \subset U$ cu proprietatea că pentru orice $x \in U$ există un șir *unic* de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ astfel încît să avem

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i, \tag{0.1}$$

convergența seriei fiind înțeleasă în sensul topologiei din U.

Din definiția 0.1 se vede că dacă $\{x_n\}$ este o bază a spațiului U, atunci coeficienții α_i ai reprezentării (0.1) depind de elementul x, adică sînt funcționale de x; ele sînt evident funcționale liniare.

Definiția 0.2. Fie U un spațiu vectorial topologic cu bază și fie $\{x_n\}$ o bază a spațiului U. Șirul de funcționale liniare $\{f_n\}$, unde

$$f_j(x) = \alpha_j \quad \left(x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in U;\ j = 1, 2, \ldots\right), \tag{0.2}$$

se numește *șirul de funcționale coeficienți asociat bazei* $\{x_n\}$.

Așadar, dacă $\{x_n\}$ este o bază a spațiului U, atunci orice element $x \in U$ se poate reprezenta, în mod unic, sub forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i. \tag{0.3}$$

Definiția 0.3. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu vectorial topologic U se numește *bază Schauder* a spațiului U, dacă toate funcționalele coeficienți f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sînt continue.

Această denumire se datorește faptului că în cazul particular cînd U este un spațiu Banach, noțiunea de mai sus a fost introdusă de J. Schauder [56], sub denumirea de „bază". După cum a arătat însă S. Banach [6], în acest caz funcționalele f_n sînt automat continue, adică orice bază (în sensul definiției 0.1) a unui spațiu Banach este o bază Schauder a acestui spațiu (a se vedea capitolul I, § 3).

---

[2]) Bibliografia o dăm separat pentru fiecare din cele trei părți ale lucrării.

CAPITOLUL I

PROBLEMA BAZEI. PROPRIETĂŢI ALE BAZELOR ÎN SPAŢII BANACH

§ 1. PROBLEMA BAZEI ÎN SPAŢII BANACH

Dacă un spaţiu Banach E are o bază $\{x_n\}$, atunci el este *separabil*, deoarece mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de forma $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i$, unde r_i sînt numere raţionale (complexe sau reale) şi n un număr natural, este o mulţime numărabilă peste tot densă în E. Se pune, în mod natural, problema dacă este adevărată şi reciproca acestei afirmaţii, adică:

PROBLEMA 1.1 (numită „problema bazei"). *Există oare în orice spaţiu Banach separabil infinitdimensional o bază?*

Această problemă a fost pusă de S. Banach ([6], p. 111—112 şi p. 245).

Teoremele de reprezentare concretă a spaţiilor Banach separabile ne permit să dăm unele formulări echivalente ale problemei bazei.

Astfel, în virtutea teoremei clasice a lui Banach şi Mazur ([8], p. 185, teorema 9), după care orice spaţiu Banach separabil este echivalent (adică izometric izomorf) cu un subspaţiu vectorial închis al spaţiului $C([0,1])$, problema bazei admite următoarea formulare echivalentă:

PROBLEMA 1.2. Există oare o bază în orice subspaţiu vectorial închis infinitdimensional al spaţiului $C([0,1])$?

În legătură cu aceasta, S. Banach a pus şi următoarea problemă ([6], p. 238), care de asemenea a rămas nerezolvată pînă în prezent:

PROBLEMA 1.3. Există oare un spaţiu Banach separabil infinitdimensional F, neizomorf cu $L^2([0,1])$, astfel încît orice subspaţiu vectorial închis al lui F are o bază?

După cum se ştie [8], orice spaţiu Banach separabil este echivalent cu un spaţiu cît al spaţiului l^1. De aici avem următoarea formulare echivalentă a problemei bazei:

PROBLEMA 1.4. Există oare o bază în orice spaţiu cît infinitdimensional al spaţiului l^1? Sau, ceea ce este echivalent: Există oare o bază în orice imagine, printr-un omomorfism metric [2], a spaţiului l^1?

În legătură cu aceasta se pune, în mod natural, următoarea problemă:

PROBLEMA 1.5. Există oare un spaţiu Banach separabil infinitdimensional F, neizomorf cu $L^2([0,1])$, astfel încît orice spaţiu cît al spaţiului F (sau, ceea ce este echivalent, orice imagine, printr-un omomorfism metric, a spaţiului F), are o bază?

---

[3]) Reamintim că o aplicaţie liniară continuă u a lui F pe E se numeşte *omomorfism metric*, dacă aplicaţia liniară continuă biunivocă v a lui $F/u^{-1}(0)$ pe E care se deduce din u (adică $u = v \circ \omega$, unde cu ω se notează aplicaţia canonică a lui F pe $F/u^{-1}(0)$) este o izometrie.

§ 2. EXEMPLE DE BAZE ÎN SPAȚII BANACH CONCRETE

Prima idee care se impune în mod natural în legătură cu problema bazei este aceea de a examina dacă diversele spații Banach separabile concrete, întîlnite în practică, posedă sau nu o bază. Vom arăta acum că răspunsul este afirmativ, dînd cîteva exemple de asemenea baze.

Exemplul 1.1. În spațiul c_0 șirul de elemente

$$x_n = \{\delta_{nj}\}_{j=1}^{\infty} \qquad (n=1, 2, \ldots) \quad (1.1)$$

constituie o bază.

Exemplul 1.2. În spațiul c șirul de elemente

$$x_0 = \{1, 1, \ldots\}, \quad x_n = \{\delta_{nj}\}_{j=1}^{\infty} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (1.2)$$

constituie o bază.

Exemplul 1.3. În spațiul[4]) l^p $(p \geqslant 1)$ șirul de elemente (1.1) formează o bază.

În cele ce urmează, pentru spațiile l^1 și L^1 ([0,1]) vom folosi adesea și notațiile l, L ([0,1]).

Exemplul 1.4. Următoarea bază în C ([0,1]) a fost construită de J. Schauder [56] și se numește *baza Schauder* a spațiului C ([0,1]):

$$x_{-1}(t) = t, \quad x_0(t) = 1 - t,$$

$$x_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t \notin \left(\dfrac{l}{2^k}, \dfrac{l+1}{2^k}\right) \\ 1 \text{ pentru } t = \dfrac{2l+1}{2^{k+1}} \\ \text{liniară pentru } t \in \left[\dfrac{l}{2^k}, \dfrac{2l+1}{2^{k+1}}\right] \\ \qquad \text{și } t \in \left[\dfrac{2l+1}{2^{k+1}}, \dfrac{l+1}{2^k}\right] \end{cases} \quad (1.3)$$

$$(l = 0,1, \ldots, 2^k - 1; \; k = 1, 2, \ldots).$$

Exemplul 1.5. În spațiul $C(Q)$, unde Q este un spațiu metric compact arbitrar, o bază a fost construită (generalizînd construcția lui J. Schauder din spațiul C ([0,1])) de F. S. Vaher [73] și, independent, de C. Bessaga [9].

---

[4]) În tot decursul acestei lucrări, ori de cîte ori vom scrie l^p sau L^p, vom subînțelege că $p < \infty$.

Exemplul 1.6. Tot J. Schauder a demonstrat [57] că în spațiul $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$, sistemul ortogonal al lui Haar [33] definit, după cum se știe, prin

$$x_1(t) \equiv 1,$$

$$x_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} \text{ pentru } t \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} \text{ pentru } t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0 \text{ pentru ceilalți } t \end{cases} \tag{1.4}$$

$$(n = 0,1,2,\ldots;\ k = 1,\ldots,2^n),$$

formează o bază. În cele ce urmează o vom numi *baza Haar* a spațiului $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$.

§ 3. CONTINUITATEA FUNCȚIONALELOR COEFICIENȚI

Pentru a putea recunoaște că un anumit șir $\{x_n\}$ de elemente ale unui spațiu Banach E este sau nu o bază a acestui spațiu, este necesar, în primul rînd, să cunoaștem proprietățile pe care le are orice bază a unui spațiu Banach. De aceea, în capitolul de față vom expune cîteva proprietăți mai importante ale bazelor, precum și diverse caracterizări ale bazelor.

Începem cu următoarea teoremă fundamentală:

TEOREMA 1.1. *Fie $\{x_n\}$ o bază a unui spațiu Banach (separabil) E. Atunci funcționalele coeficienți f_n asociate bazei $\{x_n\}$ sînt continue, adică avem*

$$f_n \in E^* \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.5}$$

Cu alte cuvinte: orice bază a unui spațiu Banach E este o bază Schauder (S. Banach [6], p. 111).

Pentru demonstrație se folosește următoarea propoziție importantă:

PROPOZIȚIA 1.1. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Atunci*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \quad \left(x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E\right) \tag{1.6}$$

este o normă pe E, echivalentă cu norma inițială a spațiului E. De asemenea, E este izomorf[5]) *cu spațiul Banach $\{\{\alpha_n\} \subset K \mid \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ converge$\}$, în care norma se definește prin* $\|\{\alpha_n\}\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$ (S. Banach [6], p. 111).

[5]) Adică: liniar omeomorf.

Din demonstrația teoremei 1.1 rezultă că avem și

PROPOZIȚIA 1.2. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\}$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci există o constantă $M > 0$ astfel, încît*

$$\frac{1}{\|x_n\|} \leqslant \|f_n\| \leqslant \frac{2M}{\|x_n\|} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.7)$$

COROLARUL 1.1. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$.*

a) *Avem* $\inf_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| > 0$ *dacă și numai dacă* $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|f_n\| < \infty$.

b) *Avem* $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$ *dacă și numai dacă* $\inf_{1 \leqslant n < \infty} \|f_n\| > 0$.

§ 4. SISTEME BIORTOGONALE. OPERATORII SUMĂ PARȚIALĂ. CARACTERIZĂRI ALE SISTEMELOR BIORTOGONALE REGULATE

Definiția 1.1. Fie E un spațiu Banach. Se spune că un sistem (x_n, f_n) format dintr-un șir $\{x_n\} \subset E$ și un șir $\{f_n\} \subset E^*$, este un *sistem biortogonal*, dacă

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots). \quad (1.8)$$

Se spune că sistemul biortogonal (x_n, f_n) este *E-fundamental*, dacă șirul $\{x_n\}$ este fundamental [6]) în E.

Din teorema 1.1 rezultă că *dacă $\{x_n\}$ este o bază a unui spațiu Banach E și $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$, atunci (x_n, f_n) este un sistem biortogonal E-fundamental.* Reciproca acestei afirmații nu este însă adevărată, după cum ne arată

Exemplul 1.7. Fie E = spațiul $C_{2\pi}$ al tuturor funcțiilor continue $x(t)$ definite pe axa reală $(-\infty, +\infty)$ și avînd perioada 2π (adică $x(t + 2\pi) = x(t)$ pentru orice $t \in (-\infty, +\infty)$), cu norma uzuală $\|x\| = \max_{t \in (-\infty, +\infty)} |x(t)|$ și fie

$$x_0(t) \equiv \frac{1}{2}, \quad x_{2n-1}(t) = \sin nt, \quad x_{2n}(t) = \cos nt \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (1.9)$$

$$f_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt, \quad f_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin (n+1)t \, dt$$

$$(n = 0, 1, \ldots). \quad (1.10)$$

[6]) Folosim termenul „șir fundamental" în sensul lui Banach [6], adică : mulțimea combinațiilor liniare finite $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i (\alpha_i \in K, i = 1, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots)$ este densă în E. Unii autori folosesc termenul de *șir complet* pentru asemenea șiruri.

Atunci (x_n, f_n) este un sistem biortogonal E-fundamental, dar $\{x_n\}$ nu este o bază a lui E.

Cele de mai sus ne arată că bazele unui spațiu Banach E trebuie căutate numai printre șirurile $\{x_n\} \subset E$ aparținînd sistemelor biortogonale (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$.

Definiția 1.2. Fie E un spațiu Banach. Un sistem biortogonal (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ se numește *sistem biortogonal regulat*, dacă șirul $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E; în cazul contrar, (x_n, f_n) se numește *sistem biortogonal neregulat*.

În vederea studierii sistemelor biortogonale regulate se mai dau următoarele definiții:

Definiția 1.3. Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal. Pentru orice $x \in E$, seria (convergentă sau divergentă) $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$ se numește *dezvoltarea formală a lui x după elementele x_n* și se folosește notația

$$x \sim \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i. \tag{1.11}$$

Definiția 1.4. Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal. Șirul de operatori $\{s_n\}$, unde

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{1.12}$$

se numește *șirul de operatori sumă parțială asociat sistemului biortogonal* (x_n, f_n).

Operatorii s_n astfel definiți sînt evident liniari și continui pe E.

Teorema 1.2. *Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *(x_n, f_n) este un sistem biortogonal regulat.*

2°. *Pentru orice element $x \in E$ dezvoltarea sa formală* (1.11) *este convergentă și are ca sumă elementul x.*

3°. *$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = x$ pentru orice $x \in E$.*

4°. *(x_n, f_n) este E-fundamental și $\sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_n(x) \| < \infty$ pentru orice $x \in E$.*

5°. *(x_n, f_n) este E-fundamental și există o constantă $M \geqslant 1$ astfel încît*

$$\| s_n \| \leqslant M \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.13}$$

Teorema 1.2 se datorește în esență lui S. Banach [6].

În legătură cu 4° din teorema 1.2 prezintă interes

Propoziția 1.3. *Fie E un spațiu Banach și (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal neregulat. Atunci pentru orice număr $a \geqslant 1$ există un element x în subspațiul vectorial al lui E generat de șirul $\{x_n\}$, astfel încît $\| x \| = 1$ și $\sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_n(x) \| = a$* (S. R. Foguel [17]).

Cu ajutorul teoremei 1.2 se demonstrează următoarele două propoziții :

PROPOZIȚIA 1.4. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Fie $\{i_n\}$ un șir crescător de numere întregi pozitive, $\{l_n\}$ șirul crescător de numere întregi pozitive complementar lui $\{i_n\}$, și fie ω aplicația canonică a lui E pe spațiul cît $E/[x_{i_n}]$. Atunci*

a) *$\{x_{l_n}\}$ este o bază a spațiului $[x_{l_n}]$.*

b) *$\{\omega(x_{l_n})\}$ este o bază a spațiului cît $E/[x_{i_n}]$.*

Propoziția 1.4 a fost demonstrată de B. R. Gelbaum ([24], § 2, teorema 1).

PROPOZIȚIA 1.5. *Fie E un spațiu Banach cu o bază $\{x_n\}$ satisfăcînd $0 < \inf_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| \leqslant \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| < \infty$ și fie $\{\alpha_n\}$ un șir de scalari astfel încît $\alpha_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Șirul*

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

este o bază a spațiului E dacă și numai dacă șirul numeric $\left\{ \frac{\| y_n \|}{| \alpha_{n+1} |} \right\}$ este mărginit (B. R. Gelbaum [24], § 4, teorema 1 (d)).

§ 5. CARACTERIZĂRI ALE SISTEMELOR BIORTOGONALE E-FUNDAMENTALE REGULATE

Fie E un spațiu Banach și (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal E-fundamental. Vom nota

$$E_1 = \{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} s_n(x) = x\}, \tag{1.15}$$

$$E_2 = \{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} s_n(x) \text{ există}\}, \tag{1.16}$$

$$E_3 = \{x \in E \mid \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| s_n(x) \| < \infty\}, \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= \{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} \| s_n(x) \| \neq \infty\} = \\ &= \{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} \| s_n(x) \| \text{ există și } < \infty\} \cup \\ &\cup \{x \in E \mid \lim_{n \to \infty} \| s_n(x) \| \text{ nu există}\}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Mulțimile E_1, E_2, E_3, E_4 sînt dense în E și avem incluziunile

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset E_4, \tag{1.19}$$

iar dacă $\{x_n\}$ este o bază a lui E, avem $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$.

PROPOZIȚIA 1.6. *Avem* $E_1 = E_2$ *dacă și numai dacă șirul* $\{f_n\} \subset E^*$ *este total* [7]).

Partea de suficiență a acestei propoziții a fost observată de S. Banach ([6], p. 106).

TEOREMA 1.3. *Fie* E *un spațiu Banach și* (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ *un sistem biortogonal* E*-fundamental. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. (x_n, f_n) *este regulat.*

2°. $E_3 = E$.

3°. $E_2 = E_3$.

4°. $E_3 = E_4$.

Echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 3° a fost demonstrată de M. M. Grinblium ([26], teorema 3), iar echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 4° de S. R. Foguel ([17], teorema 3). Echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 2° nu este altceva decît echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 4° din teorema 1.2.

Din teorema 1.3 și din incluziunile (1.19) se pot deduce noi condiții echivalente cu 1° (de exemplu: $E_1 = E_3$ etc.).

Pentru demonstrația echivalenței 1° $\Leftrightarrow$ 4° din teorema 1.3, este utilă următoarea propoziție a lui S. R. Foguel [17]:

PROPOZIȚIA 1.7. *Fie* E *un spațiu Banach și fie* (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ *un sistem biortogonal* E*-fundamental neregulat. Atunci*

a) *Mulțimea* E_1 *este de prima categorie.*

b) *Mulțimea* E_2 *este de a doua categorie.*

Se poate însă da și o demonstrație directă a echivalenței 1° $\Leftrightarrow$ 4° din teorema 1.3 (a se vedea [59]).

În cele de mai sus am considerat pe E_2, E_3 numai ca submulțimi ale lui E. Ele sînt însă și subspații vectoriale ale lui E. Să introducem pe aceste spații vectoriale o nouă normă prin

$$|||x||| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \|s_n(x)\|, \tag{1.20}$$

și să notăm prin $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ spațiile vectoriale normate astfel obținute.

PROPOZIȚIA 1.8. *Fie* E *un spațiu Banach,* (x_n, f_n) *un sistem biortogonal și* $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ *spațiile vectoriale normate definite mai sus.*

a) $\mathcal{E}_2$ *este un spațiu complet.*

b) $\{x_n\}$ *este o bază a lui* $\mathcal{E}_2$.

c) *Dacă* $\{f_n\}$ *este fundamental în* E^*, *atunci* $\mathcal{E}_3$ *este un spațiu complet.*

d) *Dacă* $\mathcal{E}_2 \neq \mathcal{E}_3$, *atunci șirul* $\{x_n\}$ *nu poate fi fundamental în* $\mathcal{E}_3$.

e) *Dacă* $\{f_n\}$ *este fundamental în* E^*, *și dacă șirul* $\{\psi_n\} \subset \mathcal{E}_3^*$ *definit prin*

$$\psi_n(x) = f_n(x) \text{ pentru orice } x \in \mathcal{E}_3, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

este fundamental în $\mathcal{E}_3^*$, *atunci* $\{x_n\}$ *este o bază a lui* E.

f) *Dacă* $\mathcal{E}_2$ *este reflexiv, atunci* $\{x_n\}$ *este o bază a lui* E.

Propoziția 1.8 a fost demonstrată de M. M. Grinblium ([26], teoremele 1, 2, 4, 5). Ipoteza suplimentară că $\{f_n\} \subset E^*$ este total, pusă de Grinblium în [26], pare a fi de prisos.

---

[7]) În sensul lui Banach, adică $\{x \in E \mid f_n(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots\} = \{0\}$.

§ 6. ŞIRURI TARE LINIAR INDEPENDENTE

În cele precedente am văzut că bazele unui spaţiu Banach E trebuie căutate numai printre şirurile $\{x_n\} \subset E$ cu proprietatea că există un şir $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal.

Definiţia 1.5. Fie E un spaţiu Banach. Se spune că un şir $\{x_n\} \subset E$ este *tare liniar independent*, dacă există un şir $\{f_n\} \subset E^*$ astfel încît (x_n, f_n) să fie un sistem biortogonal.

Vom nota

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K; \quad n = 1, 2, \ldots \right\}, \tag{1.22}$$

$$S_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i & \text{pentru } k < n \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i & \text{pentru } k \geqslant n \end{cases} \tag{1.23}$$

$(k, n = 1, 2, \ldots)$.

TEOREMA 1.4. *Fie E un spaţiu Banach şi fie $\{x_n\}$ un şir de elemente din E. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este un şir tare liniar independent.*

2°. *Din relaţiile* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} x_i = 0$ $(\alpha_i^{(n)} \in K,\ i = 1, 2, \ldots, m(n);\ n = 1, 2, \ldots)$ *rezultă că avem* $\lim_{n\to\infty} \alpha_i^{(n)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

3°. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^{(n)} x_i$ *există, atunci există şi limitele* $\lim_{n\to\infty} \alpha_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

4°. $x_n \notin [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots]$ $(n = 1, 2, \ldots;\ x_0 = 0)$[8]). (1.24)

5°. *Există un şir de constante $\delta_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, şi o constantă C, $0 < C < 1$, astfel încît*

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\, \delta_i \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \quad \text{pentru orice } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K;\ n = 1, 2, \ldots \tag{1.25}$$

6°. *Avem* $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, şi

$$\sup_{\substack{p \in P \\ \|p\| \leqslant 1}} \| S_n(p) \| < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.26}$$

Echivalenţele 1° $\Leftrightarrow$ 2° $\Leftrightarrow$ 3° $\Leftrightarrow$ 4° au fost demonstrate de A. I. Markuşevici [50]. Echivalenţa 1° $\Leftrightarrow$ 4° se află şi în monografia lui Kaczmarz şi Steinhaus ([36], Cap. VIII, § 1). Echivalenţa 1° $\Leftrightarrow$ 5° a fost demonstrată în lucrarea [16]. În sfîrşit, echivalenţa 1° $\Leftrightarrow$ 6° a fost demonstrată de V. N. Nikolskii [52].

[8]) Prin $[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots]$ se notează subspaţiul vectorial închis al lui E generat de elementele $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots$ Şirurile $\{x_n\}$ cu proprietatea (1.20) sînt uneori numite „minimale" ([36], Cap. VIII, § 1).

Definiția 1.6. Fie E un spațiu Banach. Se spune că un șir $\{x_n\} \subset E$ *nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero*, dacă

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = 0, \quad \alpha_i \in K \ (i = 1, 2, \ldots) \text{ implică } \alpha_i = 0 \ (i = 1, 2, \ldots).$$

Evident, un șir $\{x_n\} \subset E$ este o bază a lui E dacă și numai dacă el nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero și orice suprașir al lui $\{x_n\}$ admite deja asemenea dezvoltări.

Din teorema 1.4 (implicația $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$) rezultă că *un șir tare liniar independent* $\{x_n\} \subset E$ *nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero.* Reciproca acestei afirmații nu este însă adevărată, cum ne arată:

Exemplul 1.8. Fie $E = C([0,1])$ și fie

$$x_n(t) = t^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.27}$$

Atunci $\{x_n\}$ este un șir fundamental în E, care nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero, însă șirul $\{x_n\}$ nu este tare liniar independent.

§ 7. CARACTERIZĂRI INTRINSECE ALE BAZELOR. NORMA ȘI INDICELE UNEI BAZE

În § 4 am dat cîteva caracterizări ale acelor șiruri tare liniar independente $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E, care sînt baze ale lui E, iar în § 5 am dat cîteva caracterizări ale șirurilor tare liniar independente fundamentale $\{x_n\} \subset E$, care sînt baze ale lui E. Toate aceste caracterizări au folosit explicit șirul $\{f_n\} \subset E^*$ al sistemului biortogonal (x_n, f_n). Vom da acum condiții necesare și suficiente pentru ca un șir fundamental $\{x_n\} \subset E$, $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, să fie o bază a lui E, exprimate numai în termenii proprietăților șirului $\{x_n\}$. Acestea vor fi deci caracterizări „intrinsece" ale bazelor. Vom nota [9])

$$L_{(n)} = [x_1, \ldots, x_n] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.28}$$

$$L^{(n)} = [x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.29}$$

$$\sigma_{(n)} = \{x \in L_{(n)} \mid \| x \| = 1\} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.30}$$

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K;\ n = 1, 2, \ldots \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{(n)}, \tag{1.31}$$

$$S_l\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i \text{ pentru } l < n \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \text{ pentru } l \geqslant n \end{cases} \qquad (l, n = 1, 2, \ldots), \tag{1.32}$$

$$R_l(p) = p - S_l(p) \quad (p \in P, \ l = 1, 2, \ldots). \tag{1.33}$$

[9]) Prin $[x_1, \ldots, x_n]$ și $[x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots]$ notăm subspațiile vectoriale închise ale lui E generate de $x_1, \ldots, x_n$ respectiv $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$

TEOREMA 1.5. *Fie E un spațiu Banach și fie $\{x_n\}$ un șir fundamental din E, astfel încît $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază a spațiului E.*

2°. *Există un șir de endomorfisme $\{U_n\} \subset \mathfrak{L}(E, E)$ și o constantă $C_1 \geqslant 1$, cu proprietățile:*

$$U_n(x) = x \text{ pentru orice } x \in L_{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (1.34)$$

$$U_n(x) = 0 \text{ pentru orice } x \in L^{(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (1.35)$$

$$\|U_n\| \leqslant C_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.36)$$

În acest caz șirul $\{U_n\}$ este, evident, univoc determinat de șirul $\{x_n\}$.

3°. *Există o constantă $C_2 \geqslant 1$ astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leqslant C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i x_i \right\| \quad (1.37)$$

pentru orice întregi pozitivi n, m și orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \in K$.

4°. *Există o constantă $C_3 > 0$ astfel încît*

$$\operatorname{dist}(\sigma_{(n)}, L^{(n)}) \geqslant C_3 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.38)$$

5°. *Există o constantă $C_4 \geqslant 1$ cu proprietatea următoare: pentru orice n și orice $p_0 \in L_{(n)}$ există un $f \in E^*$ astfel încît*

$$f(p_0) = \|p_0\|, \quad (1.39)$$

$$f(y) = 0 \quad \text{pentru orice } y \in L^{(n)}, \quad (1.40)$$

$$1 \leqslant \|f\| \leqslant C_4. \quad (1.41)$$

6°. *Există o constantă $C_5 \geqslant 1$ astfel încît*

$$\sup_{\substack{p \in P \\ \|p\| \leqslant 1}} \|S_n(p)\| \leqslant C_5 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.42)$$

7°. *Există o constantă $C_6 \geqslant 1$ astfel încît*

$$\sup_{\substack{p \in P \\ \|p\| \leqslant 1}} \|R_n(p)\| \leqslant C_6 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.43)$$

Echivalențele $1° \Leftrightarrow 4° \Leftrightarrow 5°$ au fost date într-o formă întrucîtva mai slabă [10]) de M. M. Grinblium ([25], teoremele A și A′) iar echivalențele $1° \Leftrightarrow 6° \Leftrightarrow 7°$ aparțin lui V. N. Nikolski ([52], § 8). Echivalențele $1° \Leftrightarrow 2°$ și $1° \Leftrightarrow 3°$ sînt de asemenea cunoscute [71], [34].

Din demonstrația teoremei 1.5 rezultă că avem

PROPOZIȚIA 1.9. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Atunci pentru constantele din teorema 1.5 avem*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|s_n\| = \inf C_1 = \inf C_2 = \frac{1}{\sup C_3} = \inf C_4 = \inf C_5. \quad (1.44)$$

[10]) Anume, Grinblium a mai presupus că șirul $\{x_n\}$ este tare liniar independent.

D e f i n i ț i a 1.7. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Atunci numărul (1.44) se numește [9] *norma bazei* $\{x_n\}$, și îl vom nota prin $\nu_{\{x_n\}} = \nu$, iar numărul $\gamma = \gamma_{\{x_n\}} = \frac{1}{\nu}$ se numește [25] *indicele bazei* $\{x_n\}$.

Este evident că pentru orice bază $\{x_n\}$ avem

$$1 \leqslant \nu_{\{x_n\}} < \infty \text{ și } 0 < \gamma_{\{x_n\}} \leqslant 1.$$

Observăm că se poate defini indicele unui șir oarecare $\{x_n\} \subset E$ prin $\gamma_{\{x_n\}} = \inf \text{dist } (\sigma_{(n)}, L^{(n)})$. Șirul $\{x_n\} \subset E$ este o bază dacă și numai dacă $\gamma_{\{x_n\}} > 0$.

Vom nota

$$\Omega(E) = \sup \gamma_{\{x_n\}} = \frac{1}{\inf \nu_{\{x_n\}}} \tag{1.45}$$

unde sup respectiv inf se iau peste toate bazele posibile $\{x_n\}$ ale spațiului E. Numărul $\Omega(E)$ astfel definit este evident univoc determinat de către spațiul E.

M. M. Grinblium [25] a pus următoarea problemă: *există oare spații Banach E, pentru care $\Omega(E) < 1$?* Această problemă a fost rezolvată afirmativ de către M. Z. Solomiak [71]. Vom reveni asupra acestui rezultat în capitolul II, § 1.

Reamintim că dacă F, G sînt două subspații vectoriale închise ale unui spațiu Banach E și $\sigma_F = \{x \in F \mid \| x \| \leqslant 1\}$, numărul

$$\widehat{(F; G)} = \text{dist } (\sigma_F, G) \tag{1.46}$$

se numește *înclinarea* [11]) lui F către G. Cu ajutorul acestei noțiuni, indicele unui șir $\{x_n\}$ (și, în particular, indicele unei baze $\{x_n\}$), se poate exprima astfel:

$$\gamma_{\{x_n\}} = \inf_{1 \leqslant n < \infty} \widehat{([x_1, \ldots, x_n], [x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots])}. \tag{1.47}$$

Avem următoarea propoziție despre posibilitatea „sintezei" unei baze în spațiu din bazele din subspații finitdimensionale ale acestui spațiu (V. I. Gurarii [29], teorema 2):

PROPOZIȚIA 1.10. *Fie* $\{x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n_i)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *baze în subspații* n_i*-dimensionale* $F_i = [x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n_i)}]$ *ale lui* E, *cu proprietatea că există două constante* $\alpha > 0$ *și* $\beta > 0$ *astfel încît*

$$\gamma_{\{x_1^{(i)}, \ldots, x_i^{(n_i)}\}} \geqslant \alpha, \tag{1.48}$$

$$\widehat{(F_1 \oplus \ldots \oplus F_m; F_{m+1} \oplus \ldots \oplus F_n)} \geqslant \beta \quad (m, n = 1, 2, \ldots; m < n), \tag{1.49}$$

$$[x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n_1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n_2)}, \ldots] = E. \tag{1.50}$$

[11]) Există și alte denumiri în literatură, ca: indice de disjuncție [54].

Atunci şirul $\{x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n_1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n_2)}, \ldots\}$ *este o bază a spaţiului* E, *de indice*

$$\gamma \geqslant \frac{\alpha\beta}{2+\alpha}. \tag{1.51}$$

§ 8. ŞIRURI ECHIVALENTE. BAZE ECHIVALENTE

Definiţia 1.8. Fie E, F două spaţii Banach. Se spune că un şir $\{x_n\} \subset E$ este *echivalent* [12]) cu un şir $\{y_n\} \subset F$, şi se notează $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, dacă pentru orice şir de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \text{ converge}. \tag{1.52}$$

PROPOZIŢIA 1.11. *Fie* E, F *două spaţii Banach şi fie* $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset F$. *Următoarele afirmaţii sînt echivalente*:

1°. $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

2°. *Există un întreg pozitiv* n_0 *şi un număr* $M > 0$ *astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i x_i \right\| \leqslant M \sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n_0+m} \left\| \sum_{i=n_0}^{k} \alpha_i y_i \right\|,$$

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i y_i \right\| \leqslant M \sup_{n_0 \leqslant k \leqslant n_0+m} \left\| \sum_{i=n_0}^{k} \alpha_i x_i \right\|,$$

pentru orice întreg pozitiv m *şi orice* $\alpha_{n_0}, \ldots, \alpha_{n_0+m} \in K$.

Dacă şirul $\{x_n\}$ *este o bază a spaţiului* E, *atunci aceste afirmaţii sînt echivalente cu următoarea*:

3°. *Există un întreg pozitiv* n_0 *şi un număr* $M > 0$ *astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i x_i \right\| \leqslant M \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i y_i \right\|,$$

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i y_i \right\| \leqslant M \left\| \sum_{i=n_0}^{n_0+m} \alpha_i x_i \right\|,$$

pentru orice întreg pozitiv m *şi orice* $\alpha_{n_0}, \ldots, \alpha_{n_0+m} \in K$ (M. G. Arsove [1], teoremele 3 şi 4).

TEOREMA 1.6. *Fie* E, F *două spaţii Banach şi fie* $\{x_n\}$ *o bază a spaţiului* E. *Dacă* u *este un izomorfism al lui* E *pe* F *şi* $y_n = ux_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *atunci* $\{y_n\}$ *este o bază a spaţiului* F, *echivalentă cu* $\{x_n\}$. *Reciproc, dacă* $\{y_n\}$ *este o bază a spaţiului* F *echivalentă cu* $\{x_n\}$, *atunci există un izomorfism* u *al lui* E *pe* F *astfel încît* $y_n = ux_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Teorema 1.6 a fost obţinută simultan de M. G. Arsove [1] şi C. Bessaga şi A. Pelczyński [10].

---

[12]) Unii autori folosesc termenul „similar" [1].

§ 9. TEOREME DE STABILITATE

În acest paragraf vom arăta că proprietățile șirurilor $\{x_n\}$ dintr-un spațiu Banach E, considerate în cele precedente, sînt „stabile" în sensul că ele se păstrează pentru orice șir $\{y_n\}$ „suficient de apropiat" de șirul $\{x_n\}$; de asemenea, va reieși că orice astfel de șir $\{y_n\}$ este echivalent cu șirul $\{x_n\}$.

TEOREMA 1.7. *Fie $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ șiruri dintr-un spațiu Banach E. Să presupunem că există o constantă λ, $0 < \lambda < 1$, astfel încît să avem*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - y_i) \right\| \leqslant \lambda \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \tag{1.53}$$

pentru orice întreg pozitiv n și orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Atunci șirul $\{y_n\}$ este echivalent cu șirul $\{x_n\}$ și avem următoarele implicații:

a) *Dacă toate $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, atunci toate $y_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

b) *Dacă șirul $\{x_n\}$ este fundamental în E, la fel este și $\{y_n\}$.*

c) *Dacă șirul $\{x_n\}$ este tare liniar independent, la fel este și $\{y_n\}$.*

d) *Dacă șirul $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E, atunci șirul $\{y_n\}$ este de asemenea o bază a spațiului E.*

Această teoremă se numește uneori teorema lui Paley-Wiener, deoarece pentru cazul cînd E este un spațiu Hilbert, d) a fost dată de Paley și Wiener [53]. R. P. Boas a observat [12] că demonstrația dată de Paley și Wiener este valabilă și într-un spațiu Banach oarecare E, și a demonstrat implicația b). Implicația c) a fost dată de A. I. Markuşevici [50]. Aceste rezultate au fost apoi regăsite de K. I. Babenko [4] și F. W. Schäfke [58].

TEOREMA 1.8. *Fie E un spațiu Banach, fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal, și fie $\{y_n\}$ un șir din E. Dacă*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i - y_i \| \, \| f_i \| = \delta < 1, \tag{1.54}$$

atunci șirul $\{y_n\}$ este tare liniar independent, echivalent cu șirul $\{x_n\}$, și avem implicațiile a), b), d) din teorema 1.7.

Demonstrația folosește teorema 1.7. Implicația d) din teorema 1.8 a fost dată de M. G. Krein și L. A. Liusternik [45] și regăsită, independent, de C. Bessaga și A. Pelczyński[10].

O consecință a teoremei 1.8 este teorema lui Krein-Milman-Rutman [46]:

TEOREMA 1.9. *Fie E un spațiu Banach și fie $\{x_n\}$ un șir tare liniar independent din E. Există un șir de constante $\gamma_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cu proprietățile: dacă un șir $\{y_n\}$ satisface*

$$\| x_n - y_n \| < \frac{1}{\gamma_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.55}$$

atunci șirul $\{y_n\}$ este tare liniar independent, echivalent cu șirul $\{x_n\}$ și au loc implicațiile a), b), d), din teorema 1.7.

COROLARUL 1.2. *Dacă E este un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, atunci în orice submulțime densă D a lui E există un șir $\{y_n\} \subset D$ care este o bază a spațiului E. În particular, există o bază $\{y_n\}$ a lui E de forma*

$$y_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_{ni}\, x_i \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.56}$$

În cazul cînd $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E, condiția (1.54) poate fi slăbită, înlocuind în ea $\delta < 1$ prin $\delta < \infty$, dacă se impune asupra șirului $\{y_n\}$ condiția suplimentară ca el să nu admită dezvoltări netriviale ale lui zero. Cu alte cuvinte, avem

TEOREMA 1.10. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{y_n\}$ un șir din E care nu admite nici o dezvoltare netrivială a lui zero și avînd proprietatea*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i - y_i \| \, \| f_i \| = \delta < \infty, \tag{1.57}$$

unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci $\{y_n\}$ este o bază a spațiului E, echivalentă cu baza $\{x_n\}$ (M. G. Krein și L. A. Liusternik [45]).

Vom arăta un caz în care prima condiție asupra lui $\{y_n\}$ este îndeplinită.

Definiția 1.9. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Un șir $\{y_n\} \subset E$ se numește [2] *triunghiular* în raport cu baza $\{x_n\}$, dacă fiecare y_n se poate reprezenta sub forma

$$y_n = x_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(y_n)\, x_i \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.58}$$

unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$.

PROPOZIȚIA 1.12. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{y_n\} \subset E$ un șir triunghiular în raport cu baza $\{x_n\}$. Atunci șirul $\{y_n\}$ nu admite dezvoltări netriviale ale lui zero* (M. G. Arsove [2], lema 1).

§ 10. APLICAȚIE LA PROBLEMA BAZEI

Problema bazei (§ 1, problema 1.1) pare să aibă un răspuns negativ, adică este probabil că există un spațiu Banach separabil care nu are nici o bază. În acest paragraf vom da o condiție suficientă pentru existența unui asemenea spațiu, care sugerează o metodă posibilă de a *construi* un asemenea spațiu.

Fie F un spațiu Banach și fie G un subspațiu vectorial închis al lui F. Vom nota prin $\mathfrak{P}(F, G)$ mulțimea tuturor proiecțiilor lui F pe G (adică mulțimea tuturor $P \in \mathfrak{L}(F, F)$ cu $P(F) = G$, $P^2 = P$). Pentru prescurtare vom nota afirmația „G este un subspațiu vectorial închis al spațiului Banach F" prin

$$G < F. \tag{1.59}$$

Pentru un spațiu Banach oarecare F vom introduce, după H. F. Bohnenblust (Amer. J. Math., **63**, 64—72 (1961)), funcțiile

$$\varphi_n(F) = \inf_{\substack{G \prec F \\ \dim G = n}} \min_{P \in \mathfrak{L}(F,G)} \|P\| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad (1.60)$$

TEOREMA 1.11. *Dacă există un șir crescător de spații Banach*

$$E_3 \prec E_4 \prec E_5 \prec \ldots \quad (1.61)$$

$$\dim E_n = n \qquad (n = 3, 4, \ldots) \quad (1.62)$$

astfel încît pentru orice întreg pozitiv k să existe întregi pozitivi $n = n(k) \geqslant k + 1$ și $N = N(k) \geqslant n + 1$ cu proprietatea

$$\varphi_n(E_N) > k, \quad (1.63)$$

atunci există un spațiu Banach separabil E care nu are nici o bază.

Demonstrația teoremei 1.11 folosește teorema lui Krein-Milman-Rutman.

Observăm că orice numere n, N, k cu proprietatea (1.63) verifică în mod necesar relația

$$2^{N-n} > k. \quad (1.64)$$

§ 11. PROPRIETĂȚI DE DUALITATE TARE

Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Se pune problema următoare: ce putem spune în acest caz despre șirul $\{f_n\}$?

Șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\} \subset E^*$ asociat bazei $\{x_n\}$ *nu este, în general, o bază a spațiului E^**. Mai mult, se poate întîmpla ca *spațiul adjunct E^* al unui spațiu Banach E cu bază $\{x_n\}$ să nu aibă nici o bază*, cum ne arată:

Exemplul 1.9. Fie $E = l$. Spațiul adjunct $E^* \equiv m$ nu are nici o bază.

Cu toate acestea, se poate da un rezultat pozitiv.

Definiția 1.10. Fie E un spațiu Banach și fie $\{x_n\}$ un șir din E. Se spune că $\{x_n\}$ este un *șir bazic* dacă $\{x_n\}$ este o bază a subspațiului vectorial închis $[x_n] = [x_1, x_2, \ldots]$ al lui E.

TEOREMA 1.12. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci $\{f_n\}$ este un șir bazic (în E^*).*

Teorema 1.12 a fost dată de L. A. Gurevici [32]; o parte a ei se află deja în [6], p. 107, teorema 3.

COROLARUL 1.3. *Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) ($\{x_n\} \subset E$, $\{f_n\} \subset E^*$) un sistem biortogonal. Dacă $\{f_n\}$ este o bază a spațiului E^*, atunci $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E* (S. Karlin [41], teorema 3).

COROLARUL 1.4. *Fie E un spațiu Banach reflexiv cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci $\{f_n\}$ este o bază a spațiului E^** (M. M. Grinblium—L. A. Gurevici [27]).

În Cap. II, § 3, vom da condiții necesare și suficiente asupra unei baze $\{x_n\}$ pentru ca șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\}$ asociat să fie o bază a spațiului E^*.

PROPOZIȚIA 1.13. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$, și fie ν norma bazei $\{x_n\}$ (v. definiția 1.7), adică*

$$\nu = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| s_n \|, \tag{1.65}$$

unde $\{s_n\}$ este șirul de operatori sumă parțială asociat bazei $\{x_n\}$. Avem atunci

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f_i \right\| \leqslant \nu \, \| f \| \quad (f \in E^*). \tag{1.66}$$

Reciproc, dacă un șir $\{\alpha_n\} \subset K$ are proprietatea că $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| < \infty$, atunci există $f \in E^*$ astfel încît

$$f(x_n) = \alpha_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.67}$$

PROPOZIȚIA 1.14. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$, și fie $\nu > 0$ definit prin (1.65). Avem atunci*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \Phi(f_i) \, x_i \right\| \leqslant \nu \, \| \Phi \| \quad (\Phi \in E^{**}). \tag{1.68}$$

Reciproc, dacă un șir $\{\alpha_n\} \subset K$ are proprietatea că $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \infty$, atunci există $\Phi \in E^{**}$ astfel încît

$$\Phi(f_n) = \alpha_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.69}$$

Propozițiile 1.13 și 1.14 au fost date de A. Wilansky ([75], lemele 2 și 1).

Am văzut în exemplul 1.9 că din faptul că un spațiu Banach E are o bază, nu rezultă că și dualul său E^* posedă o bază. În legătură cu aceasta, S. Karlin a pus problema reciprocă ([41], problema 2):

PROBLEMA 1.6. Dacă spațiul adjunct E^* (al unui spațiu Banach E) are o bază, atunci posedă oare și spațiul E o bază?

Vom da un rezultat parțial în legătură cu această problemă în Cap. IV.

§ 12. PROPRIETĂȚI ALE SPAȚIULUI GENERAT DE ȘIRUL DE FUNCȚIONALE COEFICIENȚI ASOCIAT UNEI BAZE

Fie E un spațiu Banach. Pentru un subspațiu V al spațiului adjunct E^* vom nota prin φ aplicația canonică a lui E în V^*, adică aplicația liniară continuă a lui E în V^* definită prin

$$[\varphi(x)](f) = f(x) \qquad (f \in V, \; x \in E). \tag{1.70}$$

TEOREMA 1.13. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $V = [f_n]$ subspațiul vectorial închis al lui E^* generat de șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\}$ asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci*

a) *Avem*

$$\varphi(E) = \{\Psi \in V^* \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(f_i)\, x_i \text{ converge}\}. \tag{1.71}$$

b) $\varphi(E)$ *este închis în* V^* *(în sensul topologiei de spațiu normat).*

c) φ *este un izomorfism.*

d) *Avem*

$$\inf_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \sup_{\substack{f \in V \\ \|f\| \leqslant 1}} \left| f\left(\frac{1}{\|x\|} x\right)\right| > 0. \tag{1.72}$$

e) V^* *este izomorf, prin aplicația*

$$\Psi \to \{\Psi(f_n)\} \quad (\Psi \in V^*), \tag{1.73}$$

cu spațiul Banach de șiruri de scalari

$$E_0 = \left\{ \{\alpha_n\} \subset K \Big| \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \infty \right\}, \tag{1.74}$$

în care norma este definită prin

$$\| \{\alpha_n\} \| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|. \tag{1.75}$$

Rezultatul a) a fost dat în [67], teorema 4, iar b), c), d) și e) au fost date în [69], teorema 1 și corolarul ei. Independent, d) a fost anunțat, fără demonstrație, de M. I. Kadeț ([37], teorema 3).

Vom nota prin π aplicația canonică a lui E în E^{**}; după cum se știe, π este o izometrie. Pentru un subspațiu V al lui E^* vom folosi notația

$$V^{\perp} = \{\Phi \in E^{**} \mid \Phi(f) = 0 \text{ pentru orice } f \in V\}. \tag{1.76}$$

Evident, avem pentru orice subspațiu *total* V al lui E^*,

$$\pi(E) \cap V^{\perp} = \{0\}. \tag{1.77}$$

TEOREMA 1.14. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $V = [f_n]$ subspațiul vectorial închis al lui E^* generat de șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\}$ asociat bazei $\{x_n\}$. Atunci*

a) *Avem*

$$\pi(E) \oplus V^{\perp} = \{\Phi \in E^{**} \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(f_i)\, x_i \text{ converge}\}. \tag{1.78}$$

b) $\pi(E) \oplus V^{\perp}$ *este închis în* E^{**} *(în sensul topologiei de spațiu normat).*

c) *Avem*

$$\inf_{\substack{x\in E,\ x\neq 0\\ \Phi\in V^{\perp}}} \frac{\| \pi(x) + \Phi \|}{\| \pi(x) \|} > 0. \tag{1.79}$$

Rezultatul a) a fost dat în [67], corolarul 7, iar b) și c) au fost date în [69], teorema 1.

§ 13. PROPRIETĂȚI DE DUALITATE SLABĂ. BAZE SLABE * ÎN SPAȚII ADJUNCTE

Dacă E este un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\}\subset E^*$ asociat bazei $\{x_n\}$ este evident total, și prin urmare subspațiul vectorial închis $V = [f_n]$ al lui E^* este dens în E^* pentru topologia slabă $\sigma(E^*, E)$. Vom da acum o întărire a acestui rezultat.

Reamintim că prin *caracteristica* unui subspațiu V al spațiului adjunct E^* se înțelege [14] cel mai mare număr $r = r(V)$ cu proprietatea că sfera unitate $\{f\in V \mid \|f\|\leqslant 1\}$ a lui V este $\sigma(E^*, E)$-densă în r-sfera $\{f\in E^* \mid \|f\|\leqslant r\}$ din E^*. Evident, $0\leqslant r(V)\leqslant 1$, dar se poate întîmpla ca să avem $r(V) = 0$ pentru un subspațiu $\sigma(E^*, E)$-dens V al lui E^*; acesta este „cazul patologic" în sensul lui J. Dixmier [14]. Următoarea teoremă arată că dacă E are o bază $\{x_n\}$ și dacă $V = [f_n]$, acest caz patologic nu poate avea loc:

TEOREMA 1.15. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, fie $V = [f_n]$ subspațiul vectorial închis al lui E^* generat de șirul de funcționale coeficienți $[f_n]$ asociat bazei $\{x_n\}$, și fie ν numărul definit prin* (1.65). *Atunci*

a) *Avem*

$$r(V)\geqslant \frac{1}{\nu}, \tag{1.80}$$

și prin urmare există un număr $t > 0$ astfel încît sfera unitate $\{f\in V \mid \|f\|\leqslant 1\}$ a lui V este $\sigma(E^*, E)$-densă în t-sfera $\{f\in E^* \mid \|f\|\leqslant t\}$ a lui E^*.

b) *Închiderea $\widetilde{S}$ a sferei unitate $S = \{x\in E \mid \|x\|\leqslant 1\}$ a lui E pentru topologia slabă $\sigma(E, V)$ este mărginită.*

Mai mult, $r(V)$ poate lua orice valoare λ astfel încît $0 < \lambda\leqslant 1$, după cum ne arată:

Exemplul 1.10. Fie $\{y_n\}$ următoarea bază a spațiului $E = l$:

$$y_1 = \frac{1}{\lambda}x_1,\quad y_n = -\frac{1}{\lambda}x_1 + x_n \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{1.81}$$

unde prin $\{x_n\}$ se notează baza naturală (1.1) a spațiului l și unde $0 < \lambda\leqslant 1$. Atunci pentru $V = [g_n]$, unde $\{g_n\}\subset E^*$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{y_n\}$, avem

$$r(V) = \lambda. \tag{1.82}$$

Teorema 1.15 și exemplul 1.10 au fost date în [69].

În legătură cu formula (1.80) observăm că în general $r(V) \neq \frac{1}{\nu}$.

În adevăr, într-un spațiu reflexiv E pentru orice bază $\{x_n\}$ avem $V = [f_n] = E^*$, deci avem $r(V) = 1$, dar în asemenea spații se pot evident construi baze $\{x_n\}$ cu $\frac{1}{\nu}$ arbitrar de mic.

De altă parte, în formula (1.80) constanta $\frac{1}{\nu}$ este, într-un anumit sens, cea mai bună posibilă. Pentru a vedea aceasta, dăm mai întîi

Definiția 1.11. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază monotonă* [13]), dacă indicele ei $\gamma_{\{x_n\}}$ (a se vedea definiția 1.7) este egal cu 1.

Deoarece prin definiția 1.7 și propoziția 1.9 avem $\gamma_{\{x_n\}} = \frac{1}{\nu}$, din teorema 1.15 rezultă

COROLARUL 1.5. *Dacă $\{x_n\}$ este o bază monotonă a spațiului E și $V = [f_n]$, atunci*

$$r(V) = 1 = \frac{1}{\nu}.$$

Definiția 1.12. Se spune că un șir $\{f_n\}$ din spațiul adjunct E^* (al unui spațiu Banach E) este o *bază slabă** a spațiului E^*, dacă $\{f_n\}$ este o bază (în sensul definiției 0.1) a spațiului vectorial topologic E^*_σ obținut dotînd pe E^* cu topologia slabă $\sigma(E^*, E)$. În mod similar se definește noțiunea de bază Schauder slabă*.

TEOREMA 1.16. *Un spațiu Banach E are o bază $\{x_n\}$ dacă și numai dacă spațiul adjunct E^* are o bază Schauder slabă * $\{f_n\}$. În acest caz $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$* ([62], teoremele 1 și 3).

În legătură cu bazele Schauder slabe * se pune, în primul rînd, problema existenței lor în orice spațiu $\sigma(E^*, E)$-separabil E^*. După cum s-a arătat în lucrarea [62], răspunsul la această problemă este negativ, de exemplu spațiul m^* este $\sigma(m^*, m)$-separabil, dar nu are nici o bază Schauder slabă *. Totodată, acest exemplu arată că problema bazei în spații local convexe generale (adică extensiunea problemei 1.1 la spații local convexe) are un răspuns *negativ*.

O altă problemă care se pune este aceea de a extinde rezultatele pentru baze în spații Banach la baze în spații local convexe și, în particular, la baze Schauder slabe * în spații adjuncte. Acest lucru nu este însă totdeauna posibil. De exemplu, cum s-a arătat în lucrarea [69], spațiul adjunct $E^* = l$ (al spațiului Banach $E = c_0$) are o bază Schauder slabă *, dar nu are „proprietatea Krein-Milman-Rutman", adică există

[13]) Bazele cu $\inf C_2 = 1$ (v. propoziția 1.9), respectiv cu $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|s_n\| = 1$, au fost considerate, independent, de R. C. James [35] și V. Ia. Kozlov [42] și numite de aceștia „baze ortogonale". Noi însă vom folosi termenul „bază monotonă", propus de M. M. Day [13], păstrînd termenul „bază ortogonală" pentru o clasă mai restrînsă de baze (Cap. II, § 13).

un subspațiu $\sigma(E^*, E)$-dens G al lui E^* care nu conține nici o bază Schauder slabă * a spațiului E^*.

Nu vom expune aici mai multe detalii asupra acestor probleme, deoarece ele ies din cadrul lucrării de față. Aici ne vom mărgini să observăm că în legătură cu bazele Schauder slabe * se pune problema următoare, care poate fi numită [62] „problema restrînsă a bazei Schauder slabe *" :

PROBLEMA 1.7. Există oare în adjunctul E^* al unui spațiu Banach *separabil* E oarecare o bază Schauder slabă* ?

Din teorema 1.16 rezultă imediat

COROLARUL 1.6. *Problema restrînsă a bazei Schauder slabe * este echivalentă cu problema bazei* [62].

§ 14. SPAȚII DE ȘIRURI BAZICE. SPAȚII DE CLASE DE BAZE ASEMENEA

Definiția 1.13. Fie E un spațiu Banach și fie $\mathfrak{F}$ mulțimea tuturor șirurilor bazice din E (definiția 1.10). Se numește [7] *distanța* dintre șirurile bazice $\{x_n\} \in \mathfrak{F}$ și $\{y_n\} \in \mathfrak{F}$ numărul

$$\operatorname{dist}(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\|x_i - y_i\|}{1 + \|x_i - y_i\|}. \tag{1.83}$$

Cu această distanță, $\mathfrak{F}$ devine un spațiu metric.

TEOREMA 1.17. *Fie H un spațiu Hilbert și fie $\mathcal{G}$ subspațiul lui $\mathfrak{F}$ format din toate șirurile bazice ortonormate. Atunci mulțimea $\mathfrak{B}$ a tuturor bazelor ortonormate ale lui H este o mulțime G_δ densă de a doua categorie în $\mathcal{G}$* (S. Banach [7], teorema 1).

Definiția 1.14. Se spune [43] că două baze $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ ale unui spațiu Banach E sînt *asemenea* [14]), dacă avem

$$f_n(x)\, x_n = g_n(x)\, y_n \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{1.84}$$

unde $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sînt șirurile de funcționale coeficienți asociate respectiv lui $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$. Fie $\mathfrak{A}$ mulțimea tuturor claselor de baze asemenea ale lui E. Se numește [43] *distanța* dintre clasele $X \in \mathfrak{A}$ și $Y \in \mathfrak{A}$ numărul

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \sup_{\|x\|=1} \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, y_i \right\|, \tag{1.85}$$

unde $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sînt reprezentanți oarecare din clasa X, respectiv Y și $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ șirurile de funcționale coeficienți asociate acestor baze.

Cu această distanță, $\mathfrak{A}$ devine un spațiu metric.

PROPOZIȚIA 1.15. *Spațiul metric $\mathfrak{A}$ este complet.*

Propoziția 1.15 a fost demonstrată de V. Ia. Kozlov ([43], teorema 2). Tot el a mai observat [43] că dacă E este un spațiu Hilbert, spațiul $\mathfrak{A}$ este nemărginit și toate bazele ortonormate ale lui E sînt situate pe o sferă de rază 1.

[14]) În [43] se folosește termenul „echivalente", pe care noi l-am folosit în alt sens.

§ 15. FORMA GENERALĂ A APLICAŢIILOR LINIARE CONTINUE ÎN SPAŢII CU BAZĂ

Una dintre avantajele spaţiilor cu bază este aceea că în ele aplicaţiile liniare continue se pot scrie într-o formă convenabilă pentru calcule. Într-adevăr, avem

TEOREMA 1.18. *Fie E un spaţiu Banach cu bază $\{x_n\}$ şi fie F un spaţiu Banach. Atunci*

a) *Forma generală a unei aplicaţii liniare continue u a lui F în E este*

$$u(y) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(y)\, x_i \qquad (y \in F), \quad (1.86)$$

unde şirul $\{g_n\} \subset F^*$ are proprietatea că pentru orice $y \in F$ seria (1.86) converge (în spaţiul normat E).

b) *Forma generală a unei aplicaţii liniare continue v a lui E în F este*

$$v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, y_i \qquad (x \in E), \quad (1.87)$$

unde $\{f_n\} \subset E^*$ este şirul de funcţionale coeficienţi asociat bazei $\{x_n\}$ şi unde şirul $\{y_n\} \subset F$ are proprietatea

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y_i \right\| = M < \infty. \quad (1.88)$$

c) *Dacă baza $\{x_n\}$ este monotonă (definiţia 1.11), atunci pentru normele aplicaţiilor u şi v de mai sus avem*

$$\|u\| = \lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{y \in F \\ \|y\| \leqslant 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\, x_i \right\|, \quad (1.89)$$

$$\|v\| = \lim_{n \to \infty} \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, y_i \right\|. \quad (1.90)$$

Teorema 1.18 a fost demonstrată de I. A. Ezrohi [15].

CAPITOLUL II

CLASE SPECIALE DE BAZE ÎN SPAŢII BANACH

§ 1. BAZE MONOTONE ŞI STRICT MONOTONE. PROBLEMELE DE EXISTENŢĂ

O definiţie a noţiunii de bază monotonă a fost dată în Cap. I (definiţia 1.11). Evident, o bază $\{x_n\}$ a unui spaţiu Banach E este monotonă dacă şi numai dacă avem

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i x_i \right\|$$

pentru orice numere întregi pozitive n, m şi orice scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \in K$.

Definiția 2.1. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E *se numește bază strict monotonă*, dacă avem

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \left\| \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_i x_i \right\| \tag{2.1}$$

pentru orice numere întregi pozitive n, m și orice scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n+m} |\alpha_i| \neq 0$.

De exemplu, baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$, baza Schauder în $C([0,1])$ și baza Haar în L^p $([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ sînt baze monotone. Baza (1.1) în l^p $(p \geqslant 1)$ este strict monotonă, însă baza (1.1) în c_0 și baza Schauder în $C([0,1])$ nu sînt strict monotone.

PROPOZIȚIA 2.1. *Fie H un spațiu Hilbert cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente*:

1°. *Baza $\{x_n\}$ este monotonă.*

2°. *Baza $\{x_n\}$ este strict monotonă.*

3°. *Baza $\{x_n\}$ este ortogonală.*

Pentru orice bază într-un spațiu Banach avem următoarea proprietate de „monotonizare":

PROPOZIȚIA 2.2. *În orice spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ se poate introduce o nouă normă $|||\ |||$, echivalentă cu cea inițială, astfel încît în această nouă normă baza $\{x_n\}$ să fie strict monotonă.*

Această propoziție este o consecință a unor rezultate din Cap. V.

Ca la fiecare clasă nouă de baze în spații Banach ce se va introduce în paragrafele următoare, se pune *problema existenței*, adică problema: *există oare în orice spațiu Banach separabil o bază aparținînd clasei speciale considerate*? Pentru clasa bazelor monotone și clasa bazelor strict monotone răspunsul este, după cum au arătat H. F. Bohnenblust (Amer. J. Math., **63**, 64—72 (1941)) și M. Z. Solomiak [71], negativ. Anume, Solomiak a dat

Exemplul 2.1. Fie D un dodecaedru. Atunci vîrfurile lui D se pot tăia prin plane astfel încît să obținem un corp convex centralsimetric S cu proprietatea următoare: Spațiul Banach tridimensional E_3 în care sfera unitate $\{x \in E_3 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ este corpul convex S, nu are nici o bază monotonă (și deci nici o bază strict monotonă).

Același spațiu E_3 constituie și un exemplu de un spațiu Banach pentru care $\Omega(E_3) < 1$, dînd astfel răspuns afirmativ la problema lui M. M. Grinblium formulată în § 7 din Cap. I.

Exemplul 2.1 de mai sus nu rezolvă problema existenței bazelor monotone și strict monotone în spații Banach separabile *infinitdimensionale*. Un răspuns negativ la această problemă a fost obținută recent de V. I. Gurarii [30], prin

Exemplul 2.2. Fie E un subspațiu vectorial închis infinitdimensional al spațiului Banach *real* $C([0,1])$, astfel încît elementele lui E să fie toate funcții analitice și încît în E să existe o funcție avînd, împreună cu derivata sa, semn constant pe (0,1) (Un asemenea spațiu există, de exemplu [47] învelișul liniar închis al puterilor $\{t^{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, unde $n_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < \infty$).

Atunci în spațiul E nu există nici o bază monotonă (și deci nici o bază strict monotonă).

PROPOZIȚIA 2.3. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\}\subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat acestei baze. $\{x_n\}$ este o bază monotonă dacă și numai dacă $\{f_n\}$ este o bază monotonă a spațiului $[f_n]$.*

Odată cu fiecare clasă nouă de spații Banach ce se introduce, este natural să se considere și mulțimea tuturor bazelor care nu aparțin acestei clase. Pentru prescurtare vom denumi bazele din această mulțime prin prefixul „ne" sau „non-" urmat de denumirea clasei inițiale. Pentru asemenea baze (și, în particular, pentru bazele nemonotone) se pune, din nou, problema existenței.

Vom face acum cîteva observații generale și convenții în legătură cu problemele de existență care se pun odată cu introducerea fiecărei clase de baze din acest capitol.

În spațiile Banach de dimensiune finită toate problemele de existență sînt rezolvate și, cu excepția bazelor normale (§ 2), răspunsul (afirmativ sau negativ) la aceste probleme este imediat. De aceea nu-l vom mai menționa separat în fiecare caz, ci *trimitem cititorul la tabelul din* § 17, care cuprinde toate aceste răspunsuri.

În spațiile Banach infinitdimensionale răspunsul la problemele de existență este sau negativ, sau necunoscut (un răspuns afirmativ ar implica și un răspuns afirmativ la problema bazei). În primul caz vom da de fiecare dată cîte un exemplu care arată că răspunsul este negativ. În cazul al doilea, se pune problema mai restrînsă a existenței bazelor din clasa respectivă în spații Banach infinitdimensionale *cu bază*. Dacă ea are un răspuns afirmativ, atunci problema inițială de existență este evident echivalentă cu problema bazei și nu vom face mențiune specială despre ea (*trimitem la tabelul din* § 17). În sfîrșit, dacă problema de existență restrînsă este și ea nerezolvată [1]), o vom enunța ca problemă separată.

Vom păstra convențiile de mai sus în tot decursul capitolului de față. Acestea ne vor permite o scurtare a expunerii.

§ 2. BAZE NORMALE

D e f i n i ț i a 2.2. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază normală*, dacă avem

$$\|x_n\| = \|f_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

unde $\{f_n\}\subset E^*$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$.

Asemenea baze au fost deja considerate de S. Banach ([6], p. 238), dar denumirea de bază normală a fost introdusă de S. Karlin [41].

Baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$ constituie exemple de baze normale. Baza Schauder în $C([0,1])$ nu este o bază normală.

[1]) Evident, în ipotezele de mai sus problema de existență restrînsă nu poate avea un răspuns negativ, deoarece atunci și problema de existență inițială ar avea un răspuns negativ, deci răspunsul la ea ar fi cunoscut.

PROPOZIȚIA 2.4. *O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Hilbert H este normală dacă și numai dacă ea este o bază ortonormată* (S. Karlin [41], teorema 7).

În ceea ce privește problema existenței bazelor normale, avem următorul rezultat:

PROPOZIȚIA 2.5. *Orice spațiu Banach de dimensiune finită are o bază normală.*

În cartea [6] a lui S. Banach această propoziție, pentru spații reale, este dată fără demonstrație ([6], p. 238), cu mențiunea că ea aparține lui S. Auerbach. Ea a fost regăsită de A. E. Taylor ([72], teorema 2).

PROBLEMA 2.1. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază normală?

§ 3. BAZE k-GENERATOARE

Am văzut în cap. I, § 11, că șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\} \subset E^*$ asociat unei baze $\{x_n\} \subset E$ nu este, în general, o bază a spațiului adjunct E^*, ci numai un șir bazic în acest spațiu.

Definiția 2.3. Fie k un număr între nenegativ. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază k-generatoare*, dacă avem[2])

$$\operatorname{codim}_{E^*} [f_n] = k.$$

Bazele 0-generatoare se mai numesc și *baze generatoare*.

De exemplu, baza (1.1) în c_0 și l^p $(p > 1)$, și baza Haar (1.4) în $L^p([0,1])$ $(p>1)$, sînt baze generatoare. Vom da acum un exemplu de bază k-generatoare, unde $k > 0$.

Exemplul 2.3. Fie J spațiul Banach construit de R. C. James în lucrarea [34], adică spațiul tuturor șirurilor de scalari $\{\alpha_n\} \subset K$ pentru care $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și

$$\|\{\alpha_n\}\| = \sup \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{p_{2i-1}} - \alpha_{p_{2i}})^2 + (\alpha_{p_{2n+1}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

unde sup se ia peste toate numerele întregi pozitive n și toate șirurile crescătoare finite de numere întregi pozitive $p_1, p_2, \ldots p_{2n+1}$. Atunci șirul $\{x_n\} \subset J$ definit prin

$$x_n = \{\delta_{nj}\}_{j=1}^{\infty} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

este o bază generatoare a spațiului J. Șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\} \subset J^*$ asociat bazei $\{x_n\}$ este o bază 1-generatoare a spațiului J^*. Baza corespunzătoare a spațiului $(J \oplus J)^*$ este 2-generatoare etc.

Răspunsul la problema existenței bazelor k-generatoare este negativ, cum ne arată

---

[2]) Reamintim că dacă X este un spațiu Banach și G un subspațiu vectorial închis al lui X, atunci, prin definiție, $\operatorname{codim}_X G = \dim X/G$.

Exemplul 2.4. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, al cărui spațiu adjunct E^* este neseparabil (de exemplu $E = l^1$ sau $E = L^1([0,1])$, sau $E = C([0,1])$). Atunci, oricare ar fi numărul întreg nenegativ k, spațiul E nu are nici o bază k-generatoare.

În cazul $k = 0$, răspunsul la problema existenței bazelor non-k-generatoare este de asemenea negativ, cum ne arată

Exemplul 2.5. Fie E un spațiu Banach reflexiv cu bază. Atunci toate bazele din E sînt generatoare [3]).

PROBLEMA 2.2. Fie k un număr întreg > 0. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază non-k-generatoare?

Fie $\{x_n\}$ un șir într-un spațiu Banach E. Vom nota

$$\|f\|_n = \|f|_{[x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots]}\| = \sup_{\substack{x \in [x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots] \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)| \qquad (2.3)$$

$$(f \in E^*, \ n = 1, 2, \ldots).$$

În cazul cînd $\dim E = n$, vom pune $\|f\|_n = 0$.

PROPOZIȚIA 2.6. *Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal, astfel încît $[x_n] = E$. Atunci*

$$\|f\|_n = \operatorname{dist}(f, [f_1, \ldots, f_n]) \quad (f \in E^*, \ n = 1, 2, \ldots). \qquad (2.4)$$

Propoziția 2.6 a fost dată în [66]. După cum a arătat ulterior V. F. Gapoșkin [21], un rezultat mai general a fost dat de S.M. Nikolski ([51], teorema 1).

TEOREMA 2.1. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$ și fie k un număr întreg nenegativ. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. $\{x_n\}$ este o bază k-generatoare a spațiului E.

2°. În orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B_{k+1} al lui E^* există un element nenul $f \in B_{k+1}$ astfel încît $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$ și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B'_{k+1} al lui E^* pentru care elementul f de mai sus este unic pînă la o omotetie.

3°. În orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B_{k+1} al lui E^* există un element nenul $f \in B_{k+1}$ astfel încît $\lim_{m\to\infty} f(y_m) = 0$ pentru toate șirurile mărginite $\{y_m\} \subset E$ satisfăcînd $\lim_{m\to\infty} f_i(y_m) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B'_{k+1} al lui E^* pentru care elementul f de mai sus este unic pînă la o omotetie.

4°. În orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B_{k+1} al lui E^* există un element nenul $f \in B_{k+1}$ astfel încît $\lim_{m\to\infty} f(y_m) = 0$ pentru toate șirurile mărginite satisfăcînd $f_i(y_m) = 0$ $(m > i)$, și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional B'_{k+1} al lui E^* pentru care elementul f de mai sus este unic pînă la o omotetie.

---

[3]) Acest exemplu, precum și alte exemple din acest capitol, care dau proprietăți ale spațiilor reflexive cu bază, sînt consecințe ale unor rezultate din capitolul IV.

5°. *În orice subspațiu vectorial* $(k+1)$*-dimensional* P_{k+1} *al spațiului Banach de șiruri de scalari*

$$\mathcal{E} = \{\{\alpha_n\} \subset K \mid \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| < \infty\}, \tag{2.5}$$

(în care norma este definită prin $\|\{\alpha_n\}\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$*), există un element nenul* $\{\alpha_n\} \in P_{k+1}$ *astfel încît seria* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ *este convergentă, și există un subspațiu vectorial* $(k+1)$*-dimensional* P'_{k+1} *al lui* $\mathcal{E}$ *pentru care elementul* $\{\alpha_n\}$ *de mai sus este unic pînă la o omotetie.*

Teorema 2.1 a fost dată în [70] ([70], teoremele 2 și 4). În cazul particular $k = 0$, implicațiile $1° \Leftrightarrow 2° \Rightarrow 5°$ au fost demonstrate de R.C. James ([34], teorema 3), iar celelalte implicații de A. Wilansky ([75], teoremele 1 și 2).

Pentru bazele 0-generatoare, din teoreme 1.13 și 1.14 (Cap. I, § 12), rezultă

TEOREMA 2.2. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază generatoare* $\{x_n\}$ *și fie* $\{f_n\}$ *baza spațiului* E^* *formată din funcționalele coeficienți asociate bazei* $\{x_n\}$. *Atunci*

a) *Dualul* E^* *este izomorf, prin aplicația*

$$f \to \{f(x_n)\} \qquad (f \in E^*), \tag{2.6}$$

cu spațiul Banach de șiruri

$$\left\{\{\alpha_n\} \subset K \;\middle|\; \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| < \infty\right\}, \tag{2.7}$$

în care norma se definește prin $\|\{\alpha_n\}\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|$. *Dacă* $\{x_n\}$ *este o bază generatoare monotonă a lui* E, *acest izomorfism este o izometrie.*

b) *Bidualul* E^{**} *este izomorf, prin aplicația*

$$\Phi \to \{\Phi(x_n)\}, \tag{2.8}$$

cu spațiul Banach de șiruri

$$E_0 = \left\{\{\alpha_n\} \subset K \;\middle|\; \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \infty\right\}, \tag{2.9}$$

în care norma se definește prin $\|\{\alpha_n\}\| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$. *Dacă* $\{x_n\}$ *este o bază generatoare monotonă a lui* E, *acest izomorfism este o izometrie.*

c) *Avem*[4])

$$\pi(E) = \{\Phi \in E^{**} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(f_i)x_i \text{ converge}\}, \tag{2.10}$$

[4]) Reamintim că π notează aplicația canonică a lui E în E^{**} (a se vedea Cap. I, § 12).

și imaginea lui $\pi(E)$ *în* E_0 *prin izomorfismul de la b) este*

$$\left\{ \{\alpha_n\} \subset K \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \text{ converge} \right\}. \tag{2.11}$$

A doua parte a afirmației b) a fost dată de R. C. James [34], iar prima parte a afirmației c) aparține lui B. R. Gelbaum ([22], teorema 6).

§ 4. RETROBAZE ÎN SPAȚII ADJUNCTE

Definiția 2.4. *Fie* E^* spațiul adjunct al unui spațiu Banach E. O bază $\{f_n\}$ a spațiului E^* se numește [22] *retrobază*, dacă pentru șirul de funcționale coeficienți $\{\Phi_n\}$ asociat bazei $\{f_n\}$ avem $\{\Phi_n\} \subset \pi(E)$.

De exemplu, baza (1.1) a spațiului l^p $(p \geqslant 1)$ este o retrobază. De altă parte, B. R. Gelbaum [22] a arătat următorul exemplu de bază a lui l, care nu este o retrobază:

Exemplul 2.6. Fie $E \cdot = c_0^{\cdot} \equiv l$ și fie

$$f_1 = \{1, 0, 0, \ldots\}, f_n = \{(-1)^{n+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, 1, 0, 0, \ldots\} \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2.12}$$

Atunci $\{f_n\}$ este o bază a lui E^*, dar nu este o retrobază.

Teorema 2.3. *Fie* $\{f_n\}$ *o bază a spațiului adjunct* E^* *al unui spațiu Banach* E. *Următoarele afirmații sînt echivalente*:

1°. $\{f_n\}$ *este o retrobază a lui* E^*.

2°. *Există o bază generatoare* $\{x_n\}$ *a spațiului* E *astfel încît* $\{f_n\}$ *să fie șirul de funcționale coeficienți asociat bazei* $\{x_n\}$.

3°. *Toate subspațiile* $[f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots]$ $(n = 1, 2, \ldots; f_0 = 0)$ *ale lui* E^* *sînt închise pentru topologia slabă* $\sigma(E^*, E)$.

Teorema 2.3 a fost dată de B. R. Gelbaum ([22], teoremele 17 și 5). Echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 2° reduce studiul retrobazelor la cel al bazelor generatoare. De aceea în cele ce urmează ne vom mărgini să considerăm numai baze generatoare $\{x_n\}$ ale spațiului E.

Sînt deschise următoarele probleme de existență:

Problema 2.3. Există oare în orice spațiu adjunct separabil infinitdimensional E^* o bază?

Problema 2.3′. Dacă E are o bază și E^* este separabil, are E^* o bază?

Problema 2.3″. Dacă E are o bază și V este un subspațiu separabil al lui E^*, are V o bază?

Acestea sînt cazuri particulare ale problemei bazei. Problema 2.3″ conține drept cazuri particulare problemele 2.3′ și 1.6 (Cap. I, § 11).

Problema 2.4. Există oare în orice spațiu adjunct infinitdimensional E^* cu bază $\{f_n\}$ o retrobază?

Problema 2.4′. Dacă E are o bază și E^* este separabil, are E^* o retrobază?

Un răspuns afirmativ la prima (respectiv la a doua) din aceste probleme ar implica un răspuns afirmativ la problema 1.6 (respectiv la problema 2.3′).

Problema existenței non-retrobazelor are un răspuns negativ, cum ne arată

Exemplul 2.7. Fie E un spațiu Banach reflexiv cu bază. Atunci E^* are o bază și toate bazele din E^* sînt retrobaze.

În sfîrșit, este deschisă și următoarea problemă, pusă de S. Karlin ([41], problema 1):

PROBLEMA 2.5. Fie E^* un spațiu adjunct cu bază normală $\{f_n\}$. Este oare atunci $\{f_n\}$ o retrobază a lui E^*?

§ 5. BAZE k-MĂRGINIT COMPLETE

Ținînd seama de proprietatea 5° din teorema 2.1 (și de faptul[5]) că $\{f_n\}$ este o bază a lui $[f_n]$), este naturală

D e f i n i ț i a 2.5. Fie k un număr întreg nenegativ. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază k-mărginit completă*, dacă în orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional P_{k+1} al spațiului Banach de șiruri de scalari

$$E_0 = \left\{ \{\alpha_n\} \subset K \,\middle|\, \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| < \infty \right\} \tag{2.13}$$

(în care norma este definită prin $\| \{\alpha_n\} \| = \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|$) există un element nenul $\{\alpha_n\} \in P_{k+1}$ astfel încît seria $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ este convergentă, și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional P'_{k+1} al lui E_0 pentru care elementul $\{\alpha_n\}$ de mai sus este unic pînă la o omotetie. Bazele 0-mărginit complete se mai numesc și *baze mărginit complete*.

De exemplu, baza (1.1) în l^p ($p \geqslant 1$) și baza Haar (1.4) în $L^p([0,1])$ ($p > 1$) sînt baze mărginit complete, însă baza (1.1) în c_0, baza Haar în $L^1([0,1])$ și baza Schauder în $C([0,1])$ nu sînt baze mărginit complete. Baza de vectori unitari a spațiului Banach J definit în exemplul 2.3 este 1-mărginit completă. Baza naturală a spațiului $J \oplus J$ este 2-mărginit completă, ș.a.m.d.

Răspunsul la problema existenței bazelor k-mărginit complete este negativ, cum ne arată

Exemplul 2.8. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, care nu este izomorf cu nici un spațiu adjunct (de exemplu $E = c_0$, $E = L^1([0,1])$ sau $E = C([0,1])$. Atunci, oricare ar fi numărul întreg nenegativ k, spațiul E nu are nici o bază k-mărginit completă.

În cazul $k = 0$, răspunsul la problema existenței bazelor non-k-mărginit complete este de asemenea negativ, cum ne arată

[5]) A se vedea cap. I, § 11, teorema 1.12.

Exemplul 2.9. Fie E un spațiu Banach reflexiv cu bază. Atunci toate bazele din E sînt mărginit complete.

PROBLEMA 2.6. Fie k un număr întreg >0. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază non-k-mărginit completă?

TEOREMA 2.4. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, fie $\{f_n\} \subset E^*$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$, și fie k un număr întreg nenegativ. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază k-mărginit completă a spațiului E.*

2°. $\operatorname{codim}_{E^{**}} (\pi(E) \oplus [f_n]^{\perp}) = k$.

3°. $\operatorname{codim}_{[f_n]^*} \varphi(E) = k$.

4°. *In orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional Q_{k+1} al lui E^{**} există un element nenul $\Phi \in Q_{k+1}$ astfel încît seria $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(f_i)\, x_i$ este convergentă și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional Q'_{k+1} al lui E^{**} pentru care acest element Φ este unic pînă la o omotetie.*

5°. *In orice subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional R'_{k+1} al lui $[f_n]^*$ există un element nenul $\Psi \in R_{k+1}$ astfel încît seria $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(f_i)\, x_i$ este convergentă și există un subspațiu vectorial $(k+1)$-dimensional R'_{k+1} al lui $[f_n]^*$ pentru care acest element Ψ este unic pînă la o omotetie.*

6°. *$\{f_n\}$ este o bază k-generatoare a spațiului $[f_n]$.*

Teorema 2.4 a fost dată în [70] ([70], teoremele 1 și 4). În cazul particular $k = 0$, implicațiile $4^0 \Rightarrow 3°$ și $1° \Rightarrow 3°$ au fost date, într-o formă ceva mai slabă, de S. Karlin ([41], teoremele 9 și 10), iar implicația $3° \Rightarrow 1°$ a fost dată în [63] ([63], teorema 5; a se vedea și [67], teorema 5). Menționăm că în cazul particular $k = 0$ afirmațiile de mai sus sînt echivalente cu următoarea:

7°. *Pentru orice număr $c > 0$ există un număr $r_c > 0$ astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = 1, \quad \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| \geqslant c \text{ implică } \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| \geqslant 1 + r_c. \quad (2.14)$$

Acest rezultat a fost enunțat, fără demonstrație, de A.R. Lovaglia [48].

§ 6. BAZE DE TIP l_+

Definiția 2.6. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [66] *bază de tip l_+*, dacă $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$ și dacă există o constantă $\eta > 0$ astfel încît să avem, pentru orice șir finit de scalari $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \geqslant 0$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \geqslant \eta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \quad (2.15)$$

Pentru orice asemenea bază avem, evident, $\inf_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| \geqslant \eta$.

De exemplu, baza (1.1) în l este de tip l_+, și tocmai acest exemplu justifică denumirea „bază de tip l_+". Baza (1.1) în c_0 și $l^p (p > 1)$, baza Schauder în $C([0,1])$, și baza Haar în $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ nu sînt de tip l_+. Mai mult, răspunsul la problema existenței unei baze de tip l_+ este negativ, cum ne arată

Exemplul 2.10. Fie E un spațiu Banach infinitdimensional reflexiv cu bază. Atunci spațiul E nu are nici o bază de tip l_+.

TEOREMA 2.5. *Fie E un spațiu Banach cu bază, și fie $\{x_n\}$ o bază a lui E astfel încît* $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| < \infty$. *Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază de tip l_+ a spațiului E.*

2°. *Există o constantă $\eta > 0$ astfel încît să avem, pentru orice șir $\{\alpha_n\} \subset K$ cu proprietățile $\alpha_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| \geqslant \eta \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i . \tag{2.16}$$

3°. *Există $f \in E^*$ astfel încît*

$$f(x_n) \geqslant 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.17}$$

Teorema 2.5 a fost dată în [66].

§ 7. BAZE DE TIP P. BAZE DE TIP P^*

D e f i n i ț i a 2.7. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [66] *bază de tip P*, dacă $\inf_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| > 0$ și dacă

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| < \infty . \tag{2.18}$$

Pentru orice asemenea bază avem, evident, $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| < \infty$.

D e f i n i ț i a 2.8. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [66] *bază de tip P^**, dacă $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| < \infty$ și dacă pentru șirul de funcționale coeficienți $\{f_n\}$ asociat bazei $\{x_n\}$ avem

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\| < \infty . \tag{2.19}$$

De exemplu, baza (1.1) în c_0 este de tip P. Baza (1.1) în $l^p (p \geqslant 1)$, baza Schauder (1.3) în $C([0,1])$ și baza Haar (1.4) în $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ nu sînt de tip P. Baza (1.1) în l este de tip P^*. Baza (1.1) în c_0 și $l^p (p > 1)$, baza Schauder în $C([0,1])$ și baza Haar în $L^p([0,1])$ $(p \geqslant 1)$ nu sînt de tip P^*.

Răspunsul la problema existenței bazelor de tip P și P^* este negativ, cum ne arată

Exemplul 2.11. Fie E un spațiu Banach reflexiv infinitdimensional cu bază. Atunci spațiul E nu are nici o bază de tip P și nici o bază de tip P^*.

TEOREMA 2.6. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$ și fie $\{f_n\}$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază de tip P a spațiului E.*

2°. *$\{f_n\}$ este o bază de tip P^* a spațiului $[f_n]$.*

3°. $\sup_{1\leqslant n<\infty} \|x_n\| < \infty$ *și șirul $\{z_n\}$ definit prin*

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$

este o bază a spațiului E.

4°. *Există o constantă $M > 0$ astfel încît să avem, pentru orice $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$,*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right| \leqslant M \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|. \tag{2.21}$$

5°. *Există $\Psi \in [f_n]^*$ astfel încît*

$$\Psi(f_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.22}$$

6°. *Există $\Phi \in E^{**}$ astfel încît*

$$\Phi(f_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.23}$$

7°. *Șirul $\{f_1 - f_2, f_2 - f_3, \ldots\}$ nu este fundamental în spațiul $[f_n]$.*

8°. *Există o constantă $M > 0$ cu proprietatea că pentru orice șir $\{\alpha_n\} \subset K$, $\alpha_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tinzînd monoton către zero, suma $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ există și satisface*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right\| \leqslant M \mid \alpha_1 \mid. \tag{2.24}$$

TEOREMA 2.7. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$, și fie $\{f_n\}$ șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază de tip P^* a spațiului E.*

2°. *$\{f_n\}$ este o bază de tip P a spațiului $[f_n]$.*

3°. *Șirul $\{b_n\}$ definit prin*

$$b_1 = x_1, \qquad b_n = x_n - x_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.25}$$

este o bază a spațiului E.

4°. *Există o constantă* $L > 0$ *astfel încît să avem, pentru orice* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right| \leqslant L \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|. \tag{2.26}$$

5°. *Există* $f \in E^*$ *astfel încît*

$$f(x_n) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.27}$$

6°. *Subșirul* $\{b_2, b_3, \ldots\}$ *al lui* (2.25) *nu este fundamental în* E.

7°. *Există o constantă* $L > 0$ *cu proprietatea că pentru orice șir* $\{\alpha_n\} \subset K$, $\alpha_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *tinzînd monoton către zero, suma* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$ *există și satisface*

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i \right\| \leqslant L \mid \alpha_1 \mid. \tag{2.28}$$

Teoremele 2.6 și 2.7 au fost date în [66].

COROLARUL 2.1. *O bază* $\{x_n\}$ *de tip* P^* *nu conține nici un subșir slab convergent.*

§ 8. RELAȚII ÎNTRE DIVERSE TIPURI DE BAZE

PROPOZIȚIA 2.7. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază* $\{x_n\}$, *și fie* $\{p_n\}$ *un șir crescător de numere întregi pozitive și* $p_0 = 0$. *Fie*

$$y_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} \alpha_i x_i, \qquad y_n \neq 0 \ (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.29}$$

Atunci șirul $\{y_n\}$ *este un șir bazic*[6]) *în spațiul* E.

Definiția 2.9. Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Un șir $\{y_n\} \subset E$ se numește *șir bazic bloc* (*relativ la baza* $\{x_n\}$) dacă el este de forma (2.29), unde $\{p_n\}$ este un șir crescător de numere întregi pozitive și $p_0 = 0$.

TEOREMA 2.8. *Fie* E *un spațiu Banach infinitdimensional cu bază.*

a) *Orice bază de tip* P (*a spațiului* E) *este non-mărginit completă. Implicația reciprocă nu este adevărată.*

b) *Orice bază non-mărginit completă* $\{x_n\}$ *admite un șir bazic bloc* $\{y_n\}$ *de tip* P.

c) *Orice bază de tip* P *este de tip non-*l_+. *Implicația reciprocă nu este adevărată.*

d) *Orice bază de tip* P^* *este de tip* l_+. *Implicația reciprocă nu este adevărată.*

---

[6]) A se vedea Cap. I, definiția 1.10.

e) *Orice bază de tip* l_+ (*și deci orice bază de tip* P^*) *este non-generatoare. Implicația reciprocă nu este adevărată.*

f) *Orice bază non-generatoare* $\{x_n\}$ *admite un șir bazic bloc* $\{y_n\}$ *de tip* l_+.

g) *Orice bază* $\{x_n\}$ *de tip* l_+ *admite o „contracție"* $\{z_n\}$[7]) *de tip* P^*.

h) *O bază nu poate fi simultan de tip* P *și de tip* P^*.

i) *E are o bază de tip* P *dacă și numai dacă el are o bază de tip* P^*.

j) *Între cele zece tipuri de baze: generatoare, mărginit completă,* l_+, P, P^*, *non-generatoare, non-mărginit completă, non-*l_+, *non-*P, *și non-*P^*, *avem 22 relații de implicație (cele 10 triviale plus cele 12 date de a), c), d), e) și h) de mai sus). Toate celelalte 78 relații dintre ele sînt: non-implicație.*

Teorema 2.8 a fost dată în [66]. În demonstrația afirmației d) se dă următorul exemplu:

Exemplul 2.12. Fie $E = c_0$, fie

$$x_n = \{(-1)^{n+1}, (-1)^{n+2}, \ldots, (-1)^{2n}, 0, 0, \ldots\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.30}$$

și fie

$$z_{4l-3} = \sum_{i=1}^{4l-3} x_i, \quad z_{4l-2} = \sum_{i=1}^{4l-2} x_i, \quad z_{4l-1} = 2\sum_{i=1}^{4l-1} x_i, \tag{2.31}$$

$$z_{4l} = 2\sum_{i=1}^{4l} x_i \qquad (l = 1, 2, \ldots).$$

Atunci $\{z_n\}$ este o bază de tip l_+ a lui c_0, dar nu este o bază de tip P^*.

§ 9. BAZE NECONDIȚIONATE. ȘIRURI PERMUTATIV ECHIVALENTE

Definiția 2.10. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază necondiționată*[8]), dacă pentru orice $x \in E$ seria $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$ (unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$) converge necondiționat către x.

De exemplu, baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$ și baza Haar în $L^p([0,1])$ $(p > 1)$ sînt necondiționate [49]. Baza Schauder în $C([0,1])$ și baza Haar în $L^1([0,1])$ nu sînt baze necondiționate. Mai mult, problema existenței unei baze necondiționate are un răspuns negativ, cum ne arată

Exemplul 2.13. Spațiile Banach $E = C([0,1])$, $E = L^1([0,1])$, $E = J$ (din exemplul 2.3) și $E =$ un spațiu separabil care conține un subspațiu izomorf cu spațiul J, nu au nici o bază necondiționată.

---

[7]) Adică $z_n = \lambda_n x_n$, unde $0 < \lambda_n \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

[8]) Unii autori, de exemplu S. Karlin [41], B. R. Gelbaum [22], R. E. Fullerton [18], folosesc termenul „bază absolută". Termenul „bază necondiționată" are însă o răspîndire mai largă.

Prima afirmație aparține lui S. Karlin [41], a doua a fost demonstrată independent în [60] și în [55], iar ultimele două aparțin lui C. Bessaga și A. Pelczyński ([11], corolarul 2).

Vom nota prin $\mathfrak{N}$ mulțimea tuturor numerelor întregi pozitive, adică

$$\mathfrak{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{2.32}$$

Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal. Pentru un șir crescător $\{i_n\} \subset \mathfrak{N}$ definim operatorii $s_{i_1, \ldots, i_n}$ prin

$$s_{i_1, \ldots, i_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x)\, x_{i_j} \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2.33}$$

Pentru un șir $\{\beta_n\} \subset K$ definim operatorii $s_{\{\beta_n\}, l}$ prin

$$s_{\{\beta_n\}, l}(x) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i f_i(x)\, x_i \qquad (x \in E,\ l = 1, 2, \ldots). \tag{2.34}$$

Vom nota prin $\Pi(\mathfrak{N})$ mulțimea tuturor permutărilor mulțimii $\mathfrak{N}$. Pentru o permutare $\sigma \in \Pi(\mathfrak{N})$ definim operatorii $s_{\sigma, n}$ prin

$$s_{\sigma, n}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{\sigma(i)}(x)\, x_{\sigma(i)} \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2.35}$$

Următoarea teoremă dă cîteva caracterizări ale bazelor necondiționate între sistemele biortogonale E-fundamentale.

TEOREMA 2.9. *Fie E un spațiu Banach și fie (x_n, f_n) $(\{x_n\} \subset E, \{f_n\} \subset E^*)$ un sistem biortogonal E-fundamental. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază necondiționată a spațiului E.*

2°. *Pentru orice șir crescător $\{i_n\} \subset \mathfrak{N}$ și orice $x \in E$ seria $\sum_{j=1}^{\infty} f_{i_j}(x)\, x_{i_j}$ converge.*

3°. *Pentru orice șir $\{\varepsilon_n\} \subset K$ cu $|\varepsilon_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, și orice $x \in E$ seria $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i f_i(x)\, x_i$ converge.*

4°. *Pentru orice șir mărginit $\{\beta_n\} \subset K$ și orice $x \in E$ seria $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i(x) x_i$ converge.*

5°. *Pentru orice șir crescător $\{i_n\} \subset \mathfrak{N}$ avem*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \| s_{i_1, \ldots, i_n}(x) \| < \infty \qquad (x \in E). \tag{2.36}$$

6°. *Pentru orice șir $\{\varepsilon_n\} \subset K$ cu $|\varepsilon_n| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, avem*

$$\sup_{1 \leqslant l < \infty} \| s_{\{\varepsilon_n\}, l}(x) \| < \infty \qquad (x \in E). \tag{2.37}$$

7°. *Pentru orice șir mărginit* $\{\beta_n\} \subset K$ *avem*

$$\sup_{1\leqslant l<\infty} \| s_{\{\beta_n\},l}(x) \| < \infty \quad (x \in E). \tag{2.38}$$

8°. *Pentru orice permutare* $\sigma \in \Pi(\mathfrak{N})$ *avem*

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{\sigma,n}(x) \| < \infty \quad (x \in E). \tag{2.39}$$

9° — 12°. *Avem*

$$\sup_{\substack{\{i_n\}\subset\mathfrak{N}\\ i_1<i_2<\ldots}} \sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{i_1,\ldots,i_n}(x) \| < \infty \quad (x \in E), \tag{2.40}$$

și, respectiv, cîte o condiție corespunzătoare pentru $\{\varepsilon_n\}$, $\{\beta_n\}$ *și* σ.

13°—16°. *Pentru orice șir crescător* $\{i_n\} \subset \mathfrak{N}$ *avem*

$$\sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{i_1,\ldots,i_n} \| < \infty, \tag{2.41}$$

și, respectiv, cîte o condiție corespunzătoare pentru $\{\varepsilon_n\}$, $\{\beta_n\}$ *și* σ.

17° — 20°. *Avem*

$$\sup_{\substack{\{i_n\}\subset\mathfrak{N}\\ i_1<i_2<\ldots}} \sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{i_1,\ldots,i_n} \| < \infty, \tag{2.42}$$

și, respectiv, cîte o condiție corespunzătoare pentru $\{\varepsilon_n\}$, $\{\beta_n\}$ *și* σ.

În acest caz, există o constantă $M \geqslant 1$ *astfel încît*

$$\sup_{\substack{\{i_n\}\subset\mathfrak{N}\\ i_1<i_2<\ldots}} \sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{i_1,\ldots,i_n}(x) \| = \sup_{\sigma\in\Pi(\mathfrak{N})} \sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{\sigma,n}(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\{\beta_n\}\subset K\\ |\beta_1|,|\beta_2|,\ldots\leqslant 1}} \sup_{1\leqslant l<\infty} \| s_{\{\beta_n\},l}(x) \| \leqslant M \sup_{\substack{\{\varepsilon_n\}\subset K\\ |\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=\ldots=1}} \sup_{1\leqslant l<\infty} \| s_{\{\varepsilon_n\},l}(x) \| \leqslant$$

$$\leqslant 4M \sup_{\substack{\{i_n\}\subset\mathfrak{N}\\ i_1<i_2<\ldots}} \sup_{1\leqslant n<\infty} \| s_{i_1,\ldots,i_n}(x) \| \quad (x \in E), \tag{2.43}$$

și fiecare din aceste numere definește o nouă normă în E, *echivalentă cu norma inițială a spațiului* E.

Echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 2° a fost dată de M.M. Grinblium ([25], teoremele B) și Б)), iar implicația 1° $\Rightarrow$ 5° se află în cartea lui M.M. Day ([13], Cap. IV, § 4, teorema 1).

Definiția 2.11. Fie E, F două spații Banach. Se spune că un șir $\{x_n\} \subset E$ este *permutativ echivalent*[9]) cu un șir $\{y_n\} \subset F$, dacă există o permutare $\sigma \in \Pi(\mathfrak{N})$ astfel încît șirul $\{x_n\}$ să fie echivalent cu șirul $\{y_{\sigma(n)}\}$ (în sensul din Cap. I, definiția 1.8).

[9]) A. Pelczyński, care a introdus această noțiune în [55], folosește termenul „comutativ echivalent".

De exemplu, în spațiile l^2 și L^2 ([0,1]) orice două baze necondiționate mărginite[10]) sînt permutativ echivalente. Spre deosebire de aceasta, în spațiile l^p și $L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ avem

PROPOZIȚIA 2.8. *Dacă $1 < p \neq 2$, atunci în fiecare din spațiile l^p și L^p ([0,1]) există două baze necondiționate mărginite care nu sînt permutativ echivalente.*

Propoziția 2.8 a fost demonstrată de A. Pelczyński ([55], teorema 7).

PROBLEMA 2.7. Există oare în spațiul l două baze necondiționate mărginite care nu sînt permutativ echivalente? Dar în spațiul c_0? (A. Pelczyńsky [55], p. 224).

PROPOZIȚIA 2.9. *În spațiul l (sau în spațiul c_0) există două baze necondiționate mărginite care nu sînt permutativ echivalente dacă și numai dacă există în acest spațiu două baze necondiționate mărginite neechivalente.*

§ 10. BAZE CONDIȚIONATE. BAZE CU DISCONTINUITATE SIMPLĂ A NECONDIȚIONĂRII

D e f i n i ț i a 2.12. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază condiționată*, dacă ea nu este o bază necondiționată[11]).

Exemple de baze condiționate au fost date la începutul paragrafului precedent.

PROBLEMA 2.8. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază condiționată?

Un răspuns afirmativ la această problemă ar da o nouă caracterizare a spațiilor Banach de dimensiune finită.

Menționăm că în spațiile Banach concrete în care există o bază necondiționată, se cunoaște și existența unei baze condiționate, cum ne arată exemplele următoare:

Exemplul 2.14. Șirul $\{x_n\} \subset c_0$ definit prin

$$x_n = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.44)$$

este o bază condiționată a spațiului c_0 ([66]; a se mai vedea B. R. Gelbaum [22]).

---

[10]) Pentru prescurtare, numim baza $\{x_n\}$ *mărginită*, dacă $0 < \inf_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| \leqslant \sup_{1 \leqslant n < \infty} \| x_n \| < \infty$. Este evident că o condiție de mărginire este necesară, deoarece de exemplu baza de vectori unitari $\{x_n\}$ a lui l^2 nu este permutativ echivalentă cu baza $\{nx_n\}$ a aceluiași spațiu, deși ambele baze sînt necondiționate.

[11]) În paragrafele 9 și 10 ne abatem de la metodele de introducere a claselor speciale de baze, folosite în restul capitolului. În adevăr, conform acestor metode ar fi trebuit sau să introducem întîi bazele condiționate și prin aceasta, în mod automat, și bazele necondiționate (ceea ce nu am făcut, pentru a sublinia importanța bazelor necondiționate), sau să denumim bazele condiționate „baze non-necondiționate" (ceea ce ar fi constituit o abatere de la terminologia uzuală).

Exemplul 2.15. Șirul $\{x_n\} \subset l$ definit prin

$$x_1 = \{1, 0, 0, \ldots,\}, \; x_n = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2}, 1, -1, 0, 0, \ldots\} \; (n = 2, 3, \ldots) \quad (2.45)$$

este o bază condiționată a spațiului l [66].

Exemplul 2.16. Șirul $\{x_n\} \subset L^p([0,2\pi])$ definit prin

$$x_0(t) \equiv 1, \; x_{2n-1}(t) = \sin nt, \; x_{2n}(t) = \cos nt \; (n = 1, 2, \ldots) \quad (2.46)$$

este o bază condiționată a spațiului $L^p([0,2\pi])$ dacă $1 < p \neq 2$. Acest exemplu a fost dat de S. Karlin ([41], teorema 12).

Exemplul 2.17. Fie $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Atunci șirul $\{x_n\} \subset L^2([0,2\pi])$ definit prin

$$x_n(t) = |t|^\alpha e^{int} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad (2.47)$$

este o bază condiționată a spațiului Hilbert $L^2([0,2\pi])$. Acest exemplu a fost dat de K. I. Babenko [5] (a se mai vedea B.R. Gelbaum [23] și V. F. Gapoșkin [19]).

Exemplul 2.18. Fie $1 < p \neq 2$, fie P, Q două subspații vectoriale închise infinitdimensionale ale spațiului l^p astfel încît $P \oplus Q = l^p$, și fie $\{x_n\} \subset P$, $\{y_n\} \subset Q$ baze necondiționate mărginite neechivalente ale lui P, respectiv Q (în virtutea teoremei 1 din [55], P și Q sînt izomorfe cu l^p, deci în virtutea propoziției 2.8 asemenea baze există). Atunci sau șirul $\{z'_n\}$ definit prin

$$z'_{2n-1} = x_n, \; z'_{2n} = x_n + y_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (2.48)$$

sau șirul $\{z''_n\}$ definit prin

$$z''_{2n-1} = y_n, \; z''_{2n} = x_n + y_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad (2.49)$$

este o bază condiționată a spațiului l^p. Acest exemplu a fost dat în [68].

O clasă particulară de baze condiționate a fost introdusă de V. G. Vinokurov [74] prin

D e f i n i ț i a 2.13. O bază condiționată $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește *bază cu o discontinuitate a necondiționării* dacă $\{x_n\}$ este reuniunea a două subșiruri $\{x_{i_n}\}$ și $\{x_{j_n}\}$ care sînt baze necondiționate în $[x_{i_n}]$ și, respectiv, $[x_{j_n}]$. Discontinuitatea necondiționării bazei $\{x_n\}$ se numește *simplă*, dacă orice permutare a cel puțin uneia din șirurile $\{x_{i_n}\}$, $\{x_{j_n}\}$ este o parte a unei permutări $\{x_{\sigma(n)}\}$ a bazei[12]) $\{x_n\}$, cu proprietatea că $\{x_{\sigma(n)}\}$ este de asemenea o bază a spațiului E.

De exemplu, baza de vectori unitari a spațiului J din exemplul 2.3 este o bază cu o discontinuitate a necondiționării. Baza condiționată a spațiului l^p, dată în exemplul 2.18, este o bază cu o discontinuitate simplă a necondiționării.

---

[12]) Se spune că o permutare $\{x_{\tau(i_n)}\}$ a elementelor subșirului $\{x_{i_n}\}$ este o parte a unei permutări $\{x_{\sigma(n)}\}$ a elementelor șirului $\{x_n\}$, dacă $\tau(i_n) = \sigma(i_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

PROBLEMA 2.9. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază cu o discontinuitate a necondiționării? Dar o bază cu o discontinuitate simplă a necondiționării?

PROPOZIȚIA 2.10. *Fie E un spațiu Banach cu o bază necondiționată mărginită*[13]) *$\{x_n\}$ care este reuniunea a două subșiruri $\{x_{i_n}\}$ și $\{x_{j_n}\}$ având proprietatea că nu există nici un izomorfism al lui $[x_{i_n}]$ pe $[x_{j_n}]$ care să aplice x_{i_n} în x_{j_n} $(n = 1, 2, \ldots)$. Atunci spațiul E are o bază $\{y_n\}$ cu o discontinuitate simplă a necondiționării* (V. G. Vinokurov [74]).

PROBLEMA 2.10. Există oare în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază o bază care nu este o bază cu o discontinuitate a necondiționării? Dar o bază care nu este o bază cu o discontinuitate simplă a necondiționării?

În legătură cu problema 2.10, are interes

PROPOZIȚIA 2.11. *Fie E un spațiu Banach având o bază $\{x_n\}$ cu o discontinuitate simplă a necondiționării. Să presupunem că $\{x_{j_n}\}$ este subșirul lui $\{x_n\}$ care are proprietatea de permutare din definiția 2.13. În aceste condiții, dacă subspațiul $[x_{i_n}]$ al lui E are un complementar direct, atunci spațiul E are o bază necondiționată* (V. G. Vinokurov [74]).

§ 11. CARACTERIZĂRI INTRINSECE ALE BAZELOR NECONDIȚIONATE

Fie E un spațiu Banach și fie $\{x_n\}$ un șir din E. Vom nota, pentru un șir crescător arbitrar $\{i_n\} \subset \mathfrak{N}$,

$$L_{(i_1,\ldots,i_n)} = [x_{i_1},\ldots,x_{i_n}] \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (2.50)$$

$$L^{(i_1,\ldots,i_n)} = [x_j]_{j\in\mathfrak{N},\, j\neq i_1,\ldots,i_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad (2.51)$$

$$\sigma_{(i_1,\ldots,i_n)} = \{x \in L_{(i_1,\ldots,i_n)} \mid \|x\| = 1\} \qquad (n=1, 2, \ldots), \quad (2.52)$$

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K;\ n=1, 2, \ldots \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{(1,\ldots,n)} \quad (2.53)$$

$$S_{i_1,\ldots,i_l}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} x_{i_j} \ (m < l, i_m < n, i_{m+1} \geqslant n) \\ \sum_{j=1}^{l} \alpha_{i_j} x_{i_j} \ (i_l \leqslant n). \end{cases} \quad (2.54)$$

TEOREMA 2.10. *Fie E un spațiu Banach și fie $\{x_n\}$ un șir fundamental din E, astfel încît $x_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. $\{x_n\}$ este o bază necondiționată a spațiului E.

2°. Orice permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ $(\sigma \in \Pi(\mathfrak{N}))$ a șirului $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E.

---

[13]) În lucrarea lui Vinokurov [74] s-a omis, în mod necorect, condiția ca baza $\{x_n\}$ să fie mărginită.

3°. *Există un șir dirijat de endomorfisme* $\{U_{i_1}, \ldots, {}_{i_n}\} \subset \mathfrak{L}(E,E)$, *unde* $(i_1, \ldots, i_n)$ *parcurge mulțimea dirijată numărabilă* $\mathfrak{D}$ *a tuturor șirurilor finite crescătoare* $(i_1, \ldots, i_n) \subset \mathfrak{N}$ *și o constantă* $M_1 \geqslant 1$, *cu proprietățile:*

$$U_{i_1,\ldots,i_n}(x) = x \quad \text{pentru orice } x \in L_{(i_1,\ldots,i_n)},\ (i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}, \tag{2.55}$$

$$U_{i_1,\ldots,i_n}(x) = 0 \quad \text{pentru orice } x \in L^{(i_1,\ldots,i_n)},\ (i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}, \tag{2.56}$$

$$\| U_{i_1,\ldots,i_n} \| \leqslant M_1 \qquad ((i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}). \tag{2.57}$$

4°. *Există o constantă* $M_2 \geqslant 1$ *astfel încît*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} \right\| \leqslant M_2 \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{l_j} x_{l_j} \right\| \tag{2.58}$$

pentru orice $n, m \in \mathfrak{N}$ *și orice* $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}, \alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_m} \in K$ *ai căror indici satisfac* $\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{l_1, \ldots, l_m\} = \varnothing$.

5°. *Există o constantă* $M_3 \geqslant 1$ *astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \alpha_i x_i \right\| \leqslant M_3 \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \tag{2.59}$$

pentru orice $n \in \mathfrak{N}$ *și orice* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ *cu* $|\varepsilon_i| = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

6°. *Există o constantă* $M_4 \geqslant 1$ *astfel încît*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i x_i \right\| \leqslant M_4 \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \tag{2.60}$$

pentru orice $n \in \mathfrak{N}$ *și* $\beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ *cu* $|\beta_i| \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

7°. *Există o constantă* $M_5 > 0$ *astfel încît*

$$\operatorname{dist}(\sigma_{(i_1,\ldots,i_n)}, L^{(i_1,\ldots,i_n)}) \geqslant M_5 \tag{2.61}$$

pentru orice $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}$.

8°. *Există o constantă* $M_6 \geqslant 1$ *cu proprietatea următoare: Pentru orice* $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}$ *și orice* $p_0 \in L_{(i_1,\ldots,i_n)}$ *există un* $f \in E^*$ *astfel încît*

$$f(p_0) = \|p_0\|, \tag{2.62}$$

$$f(y) = 0 \text{ pentru orice } y \in L^{(i_1,\ldots,i_n)}, \tag{2.63}$$

$$1 \leqslant \|f\| \leqslant M_6. \tag{2.64}$$

9°. *Există o constantă* $M_7 \geqslant 1$ *astfel încît*

$$\sup_{\substack{p \in P \\ \|p\| \leqslant 1}} \| S_{i_1,\ldots,i_n}(p) \| \leqslant M_7 \qquad ((i_1, \ldots, i_n) \in \mathfrak{D}). \tag{2.65}$$

Echivalențele 1° $\Leftrightarrow$ 7° $\Leftrightarrow$ 8° au fost date, într-o formă mai slabă[14]), de M.M. Grinblium [25], echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 4° a fost dată de R. C. James [34], echivalențele 1° $\Leftrightarrow$ 5° $\Leftrightarrow$ 6° au fost date într-o formă mai slabă[14]), de L. A. Gurevici [31], iar echivalența 1° $\Leftrightarrow$ 6° generală de C. Bessaga și A. Pelezyński [10].

Din demonstrația teoremei 2.10 și din inegalitățile (3.43) cititorul va deduce ușor relațiile dintre constantele din teorema 2.10 (a se vedea relațiile corespunzătoare (1.44) din cap. I pentru cazul unei baze arbitrare $\{x_n\}$).

Ca o aplicație, se obține următoarea teoremă :

TEOREMA 2.11. a) *Orice bază necondiționată generatoare* $\{x_n\}$ *(a unui spațiu Banach* E*) admite un șir bazic bloc echivalent cu baza naturală* (1.1) *a spațiului* l.

b) *Orice bază necondiționată mărginit completă* $\{x_n\}$ *admite un șir bazic bloc echivalent cu baza naturală* (1.1) *a lui* c_0.

c) *Orice bază necondiționată de tip* l_+ *(deci și orice bază necondiționată de tip* P^**) este echivalentă cu baza naturală* (1.1) *a lui* l.

d) *Orice bază necondiționată de tip* P *este echivalentă cu baza naturală* (1.1) *a lui* c_0.

Teorema 2.11 se află, deși nu sub formă explicită, în lucrarea [34] a lui R. C. James ([34], demonstrațiile lemelor 1 și 2).

§ 12. CARACTERIZĂRI GEOMETRICE ALE SPAȚIILOR BANACH CU BAZĂ NECONDIȚIONATĂ

Presupunem cunoscute noțiunile geometrice care vor interveni în acest paragraf (rază, con, con miniedral etc.).

D e f i n i ț i a 2.14. Fie E un spațiu Banach și fie $\{r_n\}$ un șir de raze în E cu vîrful în origine, avînd următoarele proprietăți :

α) $\bigcup_{i=1}^{\infty} r_i$ generează un spațiu vectorial dens în E.

β) Pentru orice $n \in \mathfrak{N}$, subspațiul vectorial închis $F_n = [r_m]_{m \in \mathfrak{N}, m \neq n}$ este un hiperplan.

γ) $r_n \cap F_n = \{0\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

δ) Dacă H_n este semispațiul închis mărginit de F_n și conținînd pe r_n și dacă $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$, atunci pentru orice $x \in \mathcal{C}$ submulțimea $\mathcal{C} \cap (x - \mathcal{C})$ a lui E este compactă.

În acest caz mulțimea $\mathcal{C}$ definită în δ) se numește un *con bazic necondiționat.*

PROPOZIȚIA 2.12. *Fie* $\mathcal{C}$ *un con bazic necondiționat într-un spațiu Banach. Atunci*

a) $\mathcal{C}$ *este un con miniedral cu razele extremale* r_n.

b) $\mathcal{C}$ *este învelișul convex închis al mulțimii* $\bigcup_{i=1}^{\infty} r_i$.

[14]) În [25] și [31] se presupune dinainte că șirul $\{x_n\}$ este o bază a spațiului E.

c) *Pentru orice* $x \in \mathcal{C}$, *mulțimea* $\mathcal{C} \cap (x - \mathcal{C})$ *este liniar omeomorfă cu un cub finitdimensional sau cu paralelotopul fundamental al lui Hilbert* (R. E. Fullerton [18], teoremele 1 și 2).

TEOREMA 2.12. *Fie E un spațiu Banach. Următoarele condiții sînt echivalente*:

1°. *Spațiul E are o bază necondiționată.*

2°. *Spațiul E conține un con bazic necondiționat.*

3°. *Pe spațiul E se poate introduce o ordonare parțială compatibilă cu structura topologică și vectorială a lui E și avînd următoarele proprietăți*:

A) *Există un șir* $\{x_n\}$ *de elemente din E, care sînt pozitive, generează un spațiu vectorial dens în E și astfel încît pentru orice* $n \in \mathfrak{N}$ *mulțimea* $\{y \in E \mid 0 \leqslant y \leqslant x_n\}$ *coincide cu segmentul* $[0, x_n] = \{\lambda x_n \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

B) *Pentru orice* $n \in \mathfrak{N}$ *subspațiul vectorial închis* $F_n = [x_m]_{m \in \mathfrak{N},\, m \neq n}$ *este un hiperplan care nu conține pe* x_n.

C) *Toate mulțimile* („*intervalele*" *în sensul ordinei*)

$$I(x, y) = \{z \in E \mid x \leqslant z \leqslant y\} \qquad (x, y \in E) \tag{2.66}$$

sînt compacte (R. E. Fullerton [18], teorema 3 și corolarul ei).

Fie acum E un spațiu cu bază condiționată $\{x_n\}$. Atunci se arată, ca în demonstrația teoremei 2.12, că șirul $\{r_n\}$ al razelor determinate de elementele x_n și 0 satisface condițiile $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ din definiția 2.14, și că mulțimea $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$, definită ca acolo, este un con. Însă acest con $\mathcal{C}$ evident nu satisface condiția $\delta)$ din definiția 2.14 (deoarece în caz contrar $\{x_n\}$ ar fi, prin teorema 2.12, o bază necondiționată). Este nerezolvată următoarea problemă, pusă de R. E. Fullerton [18]:

PROBLEMA 2.11. Să se înlocuiască condiția $\delta)$ din definiția 2.14 astfel, încît să se obțină o caracterizare a bazelor condiționate.

§ 13. BAZE ORTOGONALE. BAZE STRICT ORTOGONALE

În acest paragraf și în cele ce urmează vom studia cîteva clase speciale de baze necondiționate.

D e f i n i ț i a 2.15. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [64] *bază ortogonală*, dacă avem

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} \right\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{l_j} x_{l_j} \right\| \tag{2.67}$$

pentru orice n, $m \in \mathfrak{N}$ și orice $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}, \alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_m} \in K$ a căror indici satisfac $\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{l_1, \ldots, l_m\} = \varnothing$. Baza $\{x_n\}$ se numește [64] *bază strict ortogonală*, dacă avem

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} \right\| < \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i_j} x_{i_j} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{l_j} x_{l_j} \right\| \tag{2.68}$$

pentru orice n, $m \in \mathfrak{N}$ și orice $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}, \alpha_{l_1}, \ldots, \alpha_{l_m} \in K$ $(\{i_1, \ldots, i_n\} \cap \{l_1, \ldots, l_m\} = \emptyset)$ cu proprietatea $\sum_{j=1}^{m} |\alpha_{l_j}| \neq 0$.

Baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$ constituie exemple de baze ortogonale. Baza (1.1) în l^p $(p \geqslant 1)$ este strict ortogonală, însă baza ortogonală (1.1) în c_0 nu este strict ortogonală.

Deoarece evident *orice bază ortogonală este monotonă*, din exemplul 2.1 rezultă că în spații Banach de dimensiune finită problema existenței bazelor ortogonale și strict ortogonale are un răspuns negativ. Mai mult, deoarece în virtutea implicației $1° \Rightarrow 4°$ din teorema 2.10 *orice bază ortogonală (și deci orice bază strict ortogonală) este necondiționată*, din exemplul 2.13 rezultă că problema existenței bazelor ortogonale și strict ortogonale are un răspuns negativ și în clasa spațiilor Banach infinitdimensionale cu bază.

PROPOZIȚIA 2.13. *Fie H un spațiu Hilbert cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *Baza $\{x_n\}$ este ortogonală.*

2°. *Baza $\{x_n\}$ este strict ortogonală.*

3°. *Baza $\{x_n\}$ este un șir ortogonal (adică $(x_i, x_j) = 0$ pentru $i \neq j$).*

Teorema 2.10 și observația care o urmează permit deducerea unor caracterizări ale bazelor ortogonale și strict ortogonale, pe care le lăsăm cititorului. Aici dăm numai

TEOREMA 2.13. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *$\{x_n\}$ este o bază ortogonală.*

2°. *Orice permutare $\{x_{\sigma(n)}\}$ $(\sigma \in \Pi(\mathfrak{N}))$ a bazei $\{x_n\}$ este o bază monotonă.*

3°. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in K$, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \in E$, $|\alpha_n| \leqslant |\beta_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *implică* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$ și $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \right\|$.

4°. $\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| x_i \right\|$ *pentru orice* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$.

5°. *Spațiul E ordonat parțial prin ordinea naturală indusă de baza* $\{x_n\}$ $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha_n \geqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots\right)$ *este un KB-lineal* [39].

Pentru baze necondiționate (și numai pentru acestea), avem următoarea teoremă de „ortogonalizare".

TEOREMA 2.14. *Fie E un spațiu Banach cu bază $\{x_n\}$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1°. *Există un spațiu Banach F cu bază ortogonală $\{y_n\}$, astfel încît baza $\{x_n\}$ este echivalentă cu baza $\{y_n\}$.*

2°. *Există o normă $\| \ \|_1$ în E, echivalentă cu norma inițială a spațiului E, astfel încît în norma $\| \ \|_1$ baza $\{x_n\}$ este ortogonală.*

3°. *Există un spațiu Banach F cu bază strict ortogonală $\{y_n\}$, astfel încît baza $\{x_n\}$ este echivalentă cu baza $\{y_n\}$.*

4°. *Există o normă* $\|\ \|_2$ *în* E, *echivalentă cu norma inițială a spațiului* E, *astfel încît în norma* $\|\ \|_2$ *baza* $\{x_n\}$ *este strict ortogonală.*

5°. *Baza* $\{x_n\}$ *este necondiționată.*

Teorema 2.14 a fost dată în [64] ([64], teoremele 1 și 3).

§ 14. BAZE SIMETRICE

Definiția 2.16. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [61] *bază simetrică*, dacă avem

$$|||\ x\ ||| = \sup_{\sigma\in\Pi(\mathfrak{N})}\ \sup_{\substack{|\beta_1|,\,|\beta_2|,\ldots\leqslant 1\\ 1\leqslant n<\infty}} \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x)\, x_{\sigma(i)} \right\| < \infty \text{ pentru toate } x\in E, \tag{2.69}$$

unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$.

Baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$ constituie exemple de baze simetrice. Baza Haar în $L^p([0,1])$ $(p > 1)$ nu este o bază simetrică [20].

Din teorema 2.9 (echivalențele 1° $\Leftrightarrow$ 7° $\Leftrightarrow$ 8°) rezultă că *orice bază simetrică este necondiționată.* Prin urmare (exemplul 2.13), problema existenței bazelor simetrice are un răspuns negativ. Mai mult, această problemă are un răspuns negativ și în clasa spațiilor Banach cu bază necondiționată, cum ne arată

Exemplul 2.19. În spațiul Banach $E = L^p([0,1])$ $(1 < p \neq 2)$ nu există nici o bază simetrică [38].

Pentru o bază simetrică $\{x_n\}$ avem

$$|||\ x_1\ ||| = |||\ x_2\ ||| = \ldots = \sup_{1\leqslant n<\infty} \|x_n\| \tag{2.70}$$

Propoziția 2.14. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază simetrică* $\{x_n\}$. *Atunci*

a) *Numărul* $|||x|||$ *definit prin* (2.69) *este o normă pe* E, *echivalentă cu norma inițială a spațiului* E.

b) *Pentru orice* $x\in E$ *avem* $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\rho(i)}(x)\, x_{\tau(i)} \in E$ *și*

$$\left|\left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} f_{\rho(i)}(x)\, x_{\tau(i)} \right|\right|\right| = |||\ x\ |||, \tag{2.71}$$

oricare ar fi permutările ρ *și* τ *ale mulțimii* $\mathfrak{N}$.

c) *Avem* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E$ *dacă și numai dacă* $\sum_{i=}^{\infty} \alpha_i x_{i+1} \in E$, *și în acest caz*

$$\left|\left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_{i+1} \right|\right|\right|. \tag{2.72}$$

d) *Pentru orice* $x \in E$ *avem*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{2i}(x)\, x_i \in E, \quad \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-1}(x)\, x_i \in E, \tag{2.73}$$

$$\max\left(\left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i}(x) x_i \right\|, \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i-1}(x) x_i \right\| \right) \leqslant |||x|||, \tag{2.74}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_{2i} \in E, \quad \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_{2i-1} \in E. \tag{2.75}$$

Propoziția 2.14 a fost dată în [61] ([61], teoremele 1, 2 și 3).

Vom nota prin $\mathcal{O}$ mulțimea tuturor șirurilor crescătoare din $\mathcal{N}$.

TEOREMA 2.14. *Fie* E *un spațiu Banach cu bază* $\{x_n\}$. *Următoarele afirmații sînt echivalente* :

1°. $\{x_n\}$ *este o bază simetrică a spațiului* E.

2°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiționată și pentru orice șir crescător de întregi pozitivi* $\{i_n\} \in \mathcal{O}$ *baza* $\{x_{i_n}\}$ *a spațiului* $[x_{i_n}]$ *este echivalentă cu baza* $\{x_n\}$.

3°. *Orice permutare* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *a bazei* $\{x_n\}$ *este o bază a spațiului* E, *echivalentă cu baza* $\{x_n\}$.

4°. *Avem*

$$\sup_{\sigma \in \Pi(\mathcal{N})} \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_{\sigma(i)} \right\| < \infty \quad (x \in E). \tag{2.76}$$

5°. *Avem*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_{\sigma(i)} \right\| < \infty \quad (x \in E,\ \sigma \in \Pi(\mathcal{N})). \tag{2.77}$$

6°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiționată și avem*

$$\sup_{(\{i_n\},\{l_n\}) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}} \sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x) x_{l_j} \right\| < \infty \quad (x \in E). \tag{2.78}$$

7°. $\{x_n\}$ *este o bază necondiționată și avem*

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} f_{i_j}(x) x_{l_j} \right\| < \infty \quad (x \in E, (\{i_n\}, \{l_n\}) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}). \tag{2.79}$$

Teorema 2.14 a fost dată în [65]. Implicația 3° $\Rightarrow$ 2° a fost demonstrată, independent, de Kadeț și Pelczyński [38]. Observăm că în afirmațiile 2°, 6°, și 7° de mai sus a fost esențial să presupunem separat că $\{x_n\}$ este o bază necondiționată, cum ne arată

Exemplul 2.20. Fie $E = c_0$ și fie $\{x_n\}$ baza

$$x_n = \{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0\ 0\ , \ldots\} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.80}$$

a spațiului c_0. Atunci $\{x_n\}$ este o bază condiționată a lui c_0, dar toate subșirurile $\{x_{i_n}\}$ ale lui $\{x_n\}$ sînt echivalente cu baza $\{x_n\}$, și $\{x_n\}$ satisface (2.78), (2.79).

§ 15. BAZE PERFECT OMOGENE

Am definit noțiunea de șir bazic bloc în § 8, definiția 2.9, iar noțiunea de bază mărginită într-o trimitere din § 9.

Definiția 2.17. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește ([10], definiția 2) *bază perfect omogenă*, dacă $\{x_n\}$ este o bază mărginită și dacă orice șir bazic bloc mărginit $\{y_n\}$ este echivalent cu baza $\{x_n\}$.

Baza (1.1) în c_0 și l^p $(p \geqslant 1)$ constituie exemple de baze perfect omogene.

PROPOZIȚIA 2.15. *Orice bază perfect omogenă este simetrică și prin urmare necondiționată* ([65], corolarul 2).

Din propoziția 2.15 și exemplul 2.19 rezultă că problema existenței bazelor perfect omogene are un răspuns negativ, chiar și în clasa spațiilor Banach cu bază necondiționată.

Reciproca propoziției 2.15 nu este adevărată, cum ne arată

Exemplul 2.20. Fie E_n spațiul tuturor sistemelor de n scalari $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ și fie

$$S_n = \bigcup_{\sigma \in \Pi_n} \left\{ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in E_n \,\middle|\, |\alpha_{\sigma(j)}| \leqslant \frac{1}{j} \ (j = 1, \ldots, n) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in E_n \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqslant |\alpha_n| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_j| \leqslant 1, \ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j| \leqslant 1 \right\},$$

unde cu Π_n se notează mulțimea tuturor permutărilor ale mulțimii $\{1, \ldots, n\}$. Fie E spațiul tuturor șirurilor infinite de scalari $x = \{\alpha_n\}$ cu proprietatea

$$\| x \| = \inf \left\{ t > 0 \,\middle|\, \frac{1}{t} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in S_n \ (n = 1, 2, \ldots) \right\} < \infty. \quad (2.81)$$

Atunci E, cu norma (2.81), este un spațiu Banach în care șirul de vectori unitari este o bază simetrică dar non-perfect omogenă [65].

În sfîrșit, menționăm următoarea problemă, pusă de A. Pelczyński:

PROBLEMA 2.12. Oare bazele naturale (1.1) în c_0 și $l^p (p \geqslant 1)$ sînt (abstracție făcînd de o echivalență) singurele baze perfect omogene?

Cum a observat A. Pelczyński, această problemă se reduce la următorul caz particular (a se vedea Cap. IV):

PROBLEMA 2.13. Fie $\{x_n\}$ o bază perfect omogenă a unui spațiu Banach reflexiv E. Este oare atunci $\{x_n\}$ echivalentă cu baza naturală (1.1) a unui spațiu $l^p (p > 1)$ convenabil?

§ 16. BAZE ABSOLUT CONVERGENTE. BAZE UNIFORME

Definiția 2.18. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [41] *bază absolut convergentă*, dacă toate seriile $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$ $(x \in E)$ converg absolut, adică dacă avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(x)x_i\| < \infty \qquad (x \in E), \tag{2.82}$$

unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$.

De exemplu, baza (1.1) în l este absolut convergentă. Mai mult, avem următoarea teoremă:

TEOREMA 2.15. *O bază mărginită $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach infinitdimensional E este absolut convergentă dacă și numai dacă ea este echivalentă cu baza naturală* (1.1) *a spațiului l. Prin urmare, un spațiu Banach infinitdimensional E are o bază absolut convergentă*[15]) *dacă și numai dacă E este izomorf cu spațiul l.*

Teorema 2.15 a fost dată de S. Karlin ([41], observația după teorema 11). Karlin a înlocuit însă cuvîntul „izomorf" prin „echivalent" (adică: izometric izomorf), ceea ce nu este corect. Mai mult, se știe că există spații izomorfe cu l care nu sînt echivalente cu nici un spațiu adjunct; un asemenea exemplu a fost dat de B. Grünbaum [28].

În legătură cu definiția 2.18 și teorema 2.15 are interes următoarea propoziție a lui C. Bessaga și A. Pelczyński ([11], lema 1.1):

PROPOZIȚIA 2.16. *Pentru ca o bază necondiționată $\{x_n\}$ cu proprietatea* $\sup_{1 \leqslant n < \infty} \|x_n\| < \infty$ *să fie echivalentă cu baza naturală* (1.1) *a spațiului l este necesar și suficient să existe o funcțională $f \in E^*$ astfel încît*

$$\inf_n |f(x_n)| > 0. \tag{2.83}$$

Definiția 2.19. O bază $\{x_n\}$ a unui spațiu Banach E se numește [41] *bază uniformă*, dacă toate seriile $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$ $(x \in E,\ \|x\| \leqslant 1)$ converg uniform în sfera $\{ x \in E \mid \|x\| \leqslant 1 \}$ (unde $\{f_n\}$ este șirul de funcționale coeficienți asociat bazei $\{x_n\}$).

TEOREMA 2.16. *Un spațiu Banach E are o bază uniformă dacă și numai dacă E este de dimensiune finită* (S. Karlin [41], teorema 4).

§ 17. TABEL ASUPRA PROBLEMEI EXISTENȚEI BAZELOR DIN DIVERSELE CLASE SPECIALE DE BAZE

Vom folosi următoarele notații. Vom nota prin + un răspuns afirmativ la problema existenței, adică afirmația: în orice spațiu Banach din

[15]) Nu neapărat mărginită (deoarece baza $\{x_n\}$ este absolut convergentă dacă și numai dacă baza $\left\{\frac{1}{\|x_n\|}\, x_n\right\}$ este absolut convergentă).

coloana respectivă există o bază aparținînd clasei din linia respectivă. Vom nota prin — un răspuns negativ la problema existenței, adică afirmația: există un exemplu de un spațiu Banach din coloana respectivă în care nu există nici o bază aparținînd clasei din linia respectivă. Vom nota prin ? afirmația: problema existenței este deschisă. În sfîrșit, vom nota prin ? ! afirmația: problema existenței este deschisă și este echivalentă cu problema bazei (aceasta revine la afirmația: în orice spațiu Banach infinitdimensional cu bază există și o bază aparținînd clasei din linia respectivă). Cu aceste convenții, rezultatele asupra problemei existenței bazelor aparținînd diverselor clase speciale de baze considerate în acest capitol, se pot rezuma în următorul tabel:

Problema existenței bazelor	în spații Banach de dimensiune finită	în spații Banach infinitdimensionale	în spații Banach infinitdimensionale cu bază
monotone, strict monotone	—	—	—
nemonotone, non-strict monotone	+	? !	+
normale	+	?	?
non-normale	+	? !	+
generatoare	+	—	—
non-generatoare	—	—	—
k-generatoare, $k > 0$	—	—	—
non-k-generatoare, $k > 0$	+	?	?
mărginit complete	+	—	—
non-mărginit complete	—	—	—
k-mărginit complete, $k > 0$	—	—	—
non-k-mărginit complete, $k > 0$	+	?	?
l_+	+	—	—
non-l_+	—	? !	+
P	+	—	—
non-P	—	? !	+
P^*	+	—	—
non-P^*	—	? !	+
necondiționate	+	—	—
condiționate	—	?	?
cu o discontinuitate (simplă sau nu) a necondiționării	—	?	?
care nu au o discontinuitate (simplă sau nu) a necondiționării	+	?	?
ortogonale, strict ortogonale	—	—	—
neortogonale, non-strict ortogonale	+	? !	+
simetrice	+	—	—
nesimetrice	—	? !	+
perfect omogene, dim $E > 1$	—	—	—
non-perfect omogene, dim $E > 1$	+	? !	+
absolut convergente	+	—	—
non-absolut convergente	—	? !	+
uniforme	+	—	—
neuniforme	—	—	—

Din acest tabel se vede că avem numai următoarele situații: a) — — —; b) + — —; c) + ? ! + ; d) — ? ! —; e) + ? ? ; f) — ? ?. Cauza acestui fenomen a fost explicată în § 1.

În sfîrşit, menţionăm că se pot obţine noi clase de baze luînd intersecţiile finite ale claselor de mai sus, în cazul cînd aceste intersecţii sînt nevide (de exemplu : baze monotone normale, baze monotone normale generatoare necondiţionate etc.). Lăsăm cititorului studiul problemelor de existenţă care se pun pentru aceste clase de baze.

Notă la corectură. Pentru demonstraţii ale propoziţiei 2.5 în cazul spaţiilor Banach complexe, a se vedea

A. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Москва, 1960, pag. 407 şi

A. F. Ruston, *Auerbach's theorem and tensor products of Banach spaces*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **58**, 476—480 (1962).

Primită la redacţie la 30 mai 1963

БАЗИСЫ В ПРОСТРАНСТВАХ БАНАХА. I

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа является первой частью обзорной работы по базисам в пространствах Банаха. Вся работа состоит из следующих глав:

Гл. I — Проблема базиса. Свойства базисов в пространствах Банаха.

Гл. II — Специальные классы базисов в пространствах Банаха.

Гл. III — Обобщения понятия базиса.

Гл. IV — Применения к исследованию структуры пространств Банаха.

Гл. V Связи с теорией наилучшего приближения.

Гл. VI. — Свойства базисов в конкретных пространствах Банаха.

Настоящая работа содержит главы I и II. Даются подробные библиографические ссылки. Литература для следующих частей будет дана отдельно. *Доказательств не дается.* Особо подчеркиваются нерешенные задачи.

Отметим, что теорема 1.11 (гл. I, § 10) дает достаточное условие для существования сепарабельного, не имеющего ни одного базиса, пространства Банаха, которое подсказывает возможный метод построения такого пространства.

BASES IN BANACH SPACES. I

ABSTRACT

The present paper is the first part of an expository paper concerning bases in Banach spaces. The whole paper consists of the following chapters :

Ch. I. *The basis problem. Some properties of bases in Banach spaces.*

Ch. II. *Special classes of bases in Banach spaces.*

Ch. III. *Generalizations of the notion of a basis.*

Ch. IV. *Applications to the study of the structure of Banach spaces.*

Ch. V. *Relations with the theory of best approximation.*

Ch. VI. *Some properties of bases in concrete Banach spaces.*

The present paper contains Chapters I and II. Detailed bibliographical references are given. The literature for the following parts will be given separately. *Proofs are not given.* The unsolved problems are especially pointed out.

Let us mention that theorem 1.11 (Chapter I, § 10) gives a sufficient condition for the existence of a separable Banach space having no basis, which suggests a possible method of constructing such a space.

BIBLIOGRAFIE

1. M. G. ARSOVE, *Similar bases and isomorphisms in Fréchet spaces*, Math. Ann., **135**, 283—293 (1958).
2. — *The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces*, Pacific J. Math., **10**, 365—379 (1960).
3. M. G. ARSOVE, R. E. EDWARDS, *Generalized bases in topological linear spaces*, Studia Math., **19**, 95—113 (1960).
4. К. И. БАБЕНКО, *О базисах в гильбертовом пространстве*, ДАН СССР, **57**, 427—430 (1947).
5. — *О сопряженных функциях*, ДАН СССР, **62**, 157—160 (1948).
6. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Monografje Matematyczne, Warszawa, 1932.
7. — *Sur la divergence des séries orthogonales*, Studia Math., **9**, 139—155 (1940).
8. S. BANACH, S. MAZUR, *Zur Theorie der linearen Dimension*, Studia Math., **4**, 100—112 (1933).
9. C. BESSAGA, *Bases in certain spaces of continuous functions*, Bull. Acad. Pol. Sci., **5**, 11—14 (1957).
10. C. BESSAGA, A. PEŁCZYŃSKI, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math., **17**, 151—164 (1958).
11. — *A generalization of results of R. C. James concerning absolute bases in Banach spaces*, Studia Math., **17**, 165—174 (1958).
12. R. P. BOAS, *General expansion theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **26**, 139—143 (1940).
13. M. M. DAY, *Normed linear spaces*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer Verlag, 1958.
14. J. DIXMIER, *Sur un thèoreme de Banach*, Duke Math. J., **15**, 1057—1071 (1948).
15. И. А. ЭЗРОХИ, *Общие формы линейных операций в пространствах со счетным базисом*, ДАН СССР, **59**, 1537—1540 (1948).
16. C. FOIAȘ, I. SINGER, *Some remarks on strongly linearly independent sequences and bases in Banach spaces*, Revue de math. pures et appl. **6**, 589—594 (1961).
17. S. R. FOGUEL, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, Pacific J. Math., **7**, 1065—1072 (1957).
18. R. E. FULLERTON, *Geometric structure of obsolute basis systems in a linear topological space*, Pacific J. Math., **12**, 137—147 (1962).
19. В. Ф. ГАПОШКИН, *Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях*, Матем. сборник, **46** (**88**), 359—372 (1958).
20. — *Об одном свойстве безусловных базисов в пространстве L^p*, Успехи матем. наук, **14**, *4* (*88*), 143—148 (1959).
21. — *Рецензия 3Б 379*, Реферативный журнал, математика, *3Б*, 84 (1963).
22. B. R. GELBAUM, *Expansions in Banach spaces*, Duke Math. J., **17**, 187—196 (1950).
23. — *A nonabsolute basis for Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 720—721 (1951).
24. — *Notes on Banach spaces and bases*, An. Acad. Bras. Ci., **30**, 29—36 (1958).
25. М. М. ГРИНБЛЮМ, *Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа (B)*, ДАН СССР, **31**, 428—432 (1941).
26. — *К теории биортогональных систем*, ДАН СССР, **55**, 291—294 (1947).
27. М. М. ГРИНБЛЮМ, Л. А. ГУРЕВИЧ, *Об одном свойстве базиса в гильбертовом пространстве*, ДАН СССР, **30**, 287—289 (1941).

28. B. GRÜNBAUM, *Some applications of expansion constants*, Pacific J. Math., **10**, 194—201 (1960).
29. В. И. ГУРАРИЙ, *О наклонах подпространств и условных базисах в пространстве Банаха*. ДАН СССР, **145**, 504—506 (1962).
30. — *О базисах в пространствах непрерывных функций*, ДАН СССР, **148**, 493—495 (1963).
31. Л. А. ГУРЕВИЧ, *О базисе безусловной сходимости*, Успехи матем. наук, **8**, *5* (*57*), 153—156 (1953).
32. — *О базисе в сопряженном пространстве*, Труды семин. по функц. анал., **6**, 42—43 (1958).
33. A. HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1909.
34. R. C. JAMES, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math., **52**, 518—527 (1950).
35. — *A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37**, 174—117 (1951).
36. S. KACZMARZ, H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1935.
37. М. И. КАДЕЦ, *О биортогональных системах и базисах суммирования*, Функц. анал. и его применение, Акад. Наук Азерб. ССР. Баку, 106—108 (1961).
38. M. I. KADEC, A. PEŁCZYŃSKI, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math., **21**, 161—176 (1962).
39. Л. В. КАНТОРОВИЧ, Б. З. ВУЛИХ, А. Г. ПИНСКЕР, *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах*, ГИТТЛ, Москва—Ленинград, 1950.
40. I. KAPLANSKY, *Functional Analysis*, Surveys in Applied Math., IV, 3—34 (1957).
41. S. KARLIN, *Bases in Banach spaces*, Duke Math. J., **15**, 971—985 (1948).
42. В. Я. КОЗЛОВ, *О базисах в пространстве* L_2 [0,1], Матем. сборник, **26** (**68**), 85—102 (1950).
43. — *Об одном обобщении понятия базиса*, ДАН СССР, **73**, 643—646 (1950).
44. G. KÖTHE, *Probleme der linearen Algebra in topologischen Vektorraumen*, Proc. Internat. Sympos. on Linear Spaces (July 5—12, 1960), Jerusalem Academic Press, 1961.
45. М. Г. КРЕЙН, Л. А. ЛЮСТЕРНИК, *Функциональный анализ*, Матем. в СССР за 30 лет (1917—1947), 608—697, Москва-Ленинград, 1947.
46. М. Г. КРЕЙН, Д. П. МИЛМАН, М. А. РУТМАН, *Об одном свойстве базиса в пространстве Банаха*. Зап. Мат. Т-ва (Харьков), **16**, 106—108 (1940).
47. А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ, *Об одной последовательности полиномов*, ДАН СССР, **72**, 621—624 (1950).
48. A. R. LOVAGLIA, *Locally uniformly convex Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **78**, 225—238 (1955).
49. J. MARCINKIEWICZ, *Quelques théorèmes sur les séries orthogonales*, Ann. Soc. Polon. Math., **16**, 84—96 (1937).
50. A. MARKOUCHEVITCH, *Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires*, ДАН СССР, **41**, 227—229 (1943).
51. С. М. НИКОЛЬСКИЙ, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Изв. АН СССР, **10**, 207—256 (1946).
52. В. Н. НИКОЛЬСКИЙ, *Некоторые вопросы наилучшего приближения в функциональном пространстве*, Труды физ.-мат. фак. Калининск. гос. пед. инст. **16**, 119—160 (1954).
53. R. E. A. C. PALEY, N. WIENER, *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York, 1934.
54. D. DEL PASQUA, *Su una nozione di varietà lineari disgiunte di uno spazio di Banach*, Rend. Math. Pura Appl., **13**, 406—422 (1955).
55. A. PEŁCZYŃSKI, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math., **19**, 209—228 (1960).
56. J. SCHAUDER *Zur Theorie der stetiger Abbildungen in Funktionalräumen*, Math. Zeitschr., **26**, 47—65 (1927).
57. — *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Zeitschr., **28**, 317—320 (1928).
58. F. W. SCHÄFKE, *Das Kriterium von Paley und Wiener im Banachschen Raum*, Math. Nachr., **3**, 59—61 (1949).
59. I. SINGER, *Elementary proof of a theorem of S. R. Foguel on biorthogonal systems in Banach spaces*, Revue de math. pures et appl., **3**, 305—307 (1958).

60. I. SINGER, *Sur les espaces de Banach à base absolue, canoniquement équivalents à un dual d'espace de Banach*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **251**, 620—621 (1960).
61. — *О банаховых пространствах с симметричным базисом*, Revue de math. pures et. appl., Acad. R.P.R., **6**, 159—166 (1961).
62. — *Weak* bases in conjugate Banach spaces*, Studia Math., **21**, 75—81 (1961).
63. — *On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate space. II*, Math. Ann., **145**, 64—76 (1962).
64. — *Об одной теореме И. М. Гельфанда*, Успехи матем. наук, **17**, 169—176 (1962).
65. — *Some characterizations of symmetric bases in Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., **10**, 185—192 (1962).
66. — *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math., **21**, 351—369 (1962).
67. — *On Banach spaces reflexive with respect to a linear subspace of their conjugate space. III*, Revue de math. pures et appl., **8**, 139—150 (1963).
68. — *Existence of conditional bases in the spaces* $l^p (1 < p \neq 2)$, Revue de math. pures et appl. (sub tipar).
69. — *Weak* bases in conjugate Banach spaces. II*, Revue de math. pures et appl. (sub tipar).
70. — *Bases and quasi-reflexivity of Banach spaces*, Math. Ann. (sub tipar).
71. М. З. СОЛОМЯК, *Об ортогональном базисе в пространстве Банаха*, Вестник ЛГУ, **1**, 27—36 (1957).
72. A. E. TAYLOR, *A geometric theorem and its applications to biorthogonal systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**, 614—616 (1947).
73. Ф. С. ВАХЕР, *О базисе в пространстве непрерывных функций, определенных на компакте*, ДАН СССР, **101**, 589—592 (1955).
74. В. Г. ВИНОКУРОВ, *О биортогональных системах, проходящих через заданные подпространства*, ДАН СССР, **85**, 685—687 (1952).
75. A. WILANSKY, *The basis in Banach space*, Duke Math. J., **18**, 785—798 (1951).

DOUĂ TEOREME ERGODICE REFERITOARE LA LANȚURILE CU LEGĂTURI COMPLETE, STAȚIONARE, DE ORDINUL DE MULTIPLICITATE DOI, CU UN NUMĂR FINIT DE STĂRI

DE

G. THEILER

1. Lanțurile cu legături complete, introduse în [1], au făcut și continuă să facă obiectul unui mare număr de cercetări.

O expunere sistematică a unora din principalele rezultate obținute pînă în 1959 se găsește în [3].

În timp ce atenția s-a concentrat asupra lanțurilor simple, lanțurile multiple au fost mai puțin cercetate.

Aici ne propunem a expune două teoreme ergodice pentru lanțuri de ordinul doi, corespunzătoare teoremelor ergodice pentru lanțuri simple, prezentate în [3] (p. 25—31 și 31—34).

Dar mai întîi să definim un astfel de lanț de ordinul doi.

Să considerăm un șir de variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$, fiecare putînd să ia una din valorile $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$, în condițiile următoare :

a_1) $$P[X_1 = a_i] = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m+1, \quad \sum_{i=1}^{m+1} p_i = 1;$$

a_2) $$P[X_2 = a_j | X_1 = a_i] = \varphi_{i,j}(p_1, p_2, \ldots, p_m) = \varphi_{i,j}(\bar{p}),$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, m, \quad m+1,$$

unde s-a notat

$$\bar{p} = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$$

și desigur unde

$$\sum_{j=1}^{m+1} \varphi_{i,j}(\bar{p}) = 1;$$

a_3) $$P[X_3 = a_k \mid X_2 = a_j,\ X_1 = a_i] =$$

$$= \psi_{i,j,k}[p_1, p_2, \ldots, p_m;\ \varphi_{i,1}(p_1, p_2, \ldots, p_m) \cdots \varphi_{i,m}(p_1, p_2, \ldots p_m)] =$$

$$= \psi_{i,j,k}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})], \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, m, m+1,$$

unde pentru prescurtare s-a notat

$$\bar{\varphi}_i(\bar{p}) = \{\varphi_{i,1}(\bar{p}),\ \varphi_{i,2}(\bar{p}), \ldots, \varphi_{i,m}(\bar{p})\},$$

$\psi_{i,j,k}$ sînt funcții date de $\bar{p}$ și $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$ și desigur unde

$$\sum_{k=1}^{m+1} \psi_{i,j,k}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})] = 1;$$

a_4) $P[X_4 = a_l | X_3 = a_k, X_2 = a_j, X_1 = a_i] = \psi_{j,k,l}[\bar{\varphi}_i(\bar{p}), \bar{\psi}_{i,j}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})]]$, unde s-a notat

$$\bar{\psi}_{i,j}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})] = \{\psi_{i,j,1}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})], \ldots, \psi_{i,j,m}[\bar{p}, \bar{\varphi}_i(\bar{p})]\};$$

a_5) pentru $n > 4$ vom introduce notația

$$P[X_n = a_{j_n} | X_{n-1} = a_{j_{n-1}}, \ldots, X_1 = a_{j_1}] = p_{j_1, j_2, \ldots, j_n}.$$

Prin definiție se ia

$$P[X_n = a_{j_n} | X_{n-1} = a_{j_{n-1}}, \ldots, X_1 = a_{j_1}] =$$

$$= \psi_{j_{n-2}, j_{n-1}, j_n}[\bar{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}}, \bar{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}], \tag{1}$$

unde s-a notat

$$\bar{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_s} = \{p_{j_1, j_2, \ldots, j_s, 1}, p_{j_1, j_2, \ldots, j_s, 2}, \ldots, p_{j_1, j_2, \ldots, j_s, m}\}.$$

Relația (1) caracterizează lanțurile multiple de ordinul doi considerate.

2. Întrucît funcțiile $\psi_{i,j,k}$ se consideră date, lanțul este determinat cînd se cunoaște vectorul $\bar{p}$ și totalitatea vectorilor $\bar{\varphi}_i(\bar{p})$ adică matricea

$$\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1(\bar{p}),\ \bar{\varphi}_2(\bar{p}), \ldots, \bar{\varphi}_{m+1}(\bar{p}))$$

care conține $m(m+1)$ elemente.

În total sînt necesare $m + m(m+1) = m(m+2)$ elemente.

Dacă se notează cu $P_i^{(n)}$ probabilitatea ca $X_n = a_i$, aceasta ar trebui exprimată mai precis $P_i^{(n)}[\bar{p}, \bar{\varphi}]$.

Se poate stabili cu ușurință următoarea relație funcțională fundamentală:

$$P_i^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]], \tag{2}$$

unde

$$\bar{\psi}_j[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})] = (\bar{\psi}_{j,1}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})], \ldots, \bar{\psi}_{j,m+1}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]).$$

3. Dintre cele două teoreme anunțate, vom prezenta pe prima într-un caz corespunzător celui din [1] în vederea construirii efective de lanțuri duble de tipul anunțat, iar a doua sub două variante: prima pentru cazul considerat în prima teoremă, a doua pentru cazul unui spațiu metric complet, cu metrica îndeplinind anumite condițiuni.

TEOREMA I. *Se consideră un lanț cu legături complete, staționar, de ordinul de multiplicitate doi, ale cărui funcții fundamentale* $\psi_{j,k,i}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]$, $1 \leqslant j, k \leqslant m+1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *sînt definite într-un domeniu* Δ *de puncte* $\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})$ *din* $R^{m(m+2)}$, *definit de relațiile*

$$0 \leqslant p_j \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{m} p_j \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi_{j,k}(\bar{p}) \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{m} \varphi_{j,k}(\bar{p}) \leqslant 1,$$

și verifică condițiile

(i) $$0 < \psi_{j,k,i}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})] < 1,$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,i}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]}{\partial p_u \text{ sau } \partial \varphi_{j_u}(\bar{p})} \right| < \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant u \leqslant m,$$

funcțiile $\psi_{j,k,i}[\bar{p}, \varphi_j(\bar{p})]$ *avînd derivate parțiale de primul ordin continue în* Δ.

În aceste condiții lanțul este ergodic.

TEOREMA II_1. *Se consideră un lanț cu legături complete staționar, ale cărui funcții fundamentale* $\psi_{j,k,i}[\bar{p}, \varphi_j(\bar{p})]$, $1 \leqslant j, k \leqslant m+1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *sînt definite într-un domeniu* Δ *de puncte* $[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ *din* $R^{m(m+2)}$ *satisfăcînd relațiile*

$$0 \leqslant p_j \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{m} p_j \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varphi_{j,k}(\bar{p}) \leqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{m} \varphi_{j,k}(\bar{p}) \leqslant 1,$$

și verifică condițiile

(i) $$0 < \psi_{j,k,i_0}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})] \leqslant 1,$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,i}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]}{\partial p_u \text{ sau } \partial \bar{\varphi}_{j_u}(\bar{p})} \right| \leqslant \frac{1}{2} \text{ pentru } j \neq i_0 \text{ și} < \frac{1}{2} \text{ pentru } j = i_0,$$

$1 \leqslant u \leqslant m$, *funcțiile* $\psi_{j,k,i}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p})]$ *avînd derivatele parțiale de primul ordin continue în* Δ *iar* $1 \leqslant i_0 \leqslant m+1$.

În aceste condiții lanțul este ergodic, cu excepția, poate, a punctelor $[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})]$ *pentru care* $p_{i_0} = 0$.

TEOREMA II_2. *Dacă*:

1) *Domeniul* Δ *este un spațiu metric complet cu distanța*

$$\rho[[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})], [\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')]] \leqslant \rho[\overline{p}, \overline{p}'] + \rho[\overline{\varphi}(\overline{p}), \overline{\varphi}'(\overline{p}')],$$
$$[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})], [\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')] \in \Delta,$$

2) f_j *este o aplicație* $\Delta \to \Delta$ *care transformă punctul*

$$[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] \text{ în } [\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})]], \quad j = 1, 2, \ldots, m+1,$$

atunci fiind dată funcția $F[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]$ *să presupunem că funcțiile* $F^{(n)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]$ *definite prin relația de recurență*

$$F^{(n+1)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} p_j F^{(n)}[f_j[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]], \quad n \geqslant 1,$$

verifică următoarele condiții:

(i) *există un* $B > 0$ *astfel încît*

$$|F[\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')] - F[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]| \leqslant B\rho[[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})], [\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')]]$$

pentru orice $[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})], [\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')] \in \Delta$;

(ii) *există o valoare* i_0 *a lui* i, $1 \leqslant i_0 \leqslant m+1$ *pentru care* $\psi_{j,k,i_0} > 0$, j, k *oarecare*, $1 \leqslant j, k \leqslant m+1$;

(iii) *aplicațiile* $\overline{\psi}_j$ *sînt mărginite iar*

$$\rho[\overline{\psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})], \overline{\psi}_j[\overline{p}', \overline{\varphi}_j'(\overline{p}')]] \leqslant \|\psi\|_j \rho[[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})], [\overline{p}', \overline{\varphi}_j'(\overline{p}')]],$$

unde $\|\psi\|_j \leqslant \frac{1}{2}$ *dacă* $j \neq i_0$ *și* $\|\psi\|_{i_0} < \frac{1}{2}$.

În aceste condiții funcțiile $F^{(n)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]$ *tind cînd* $n \to \infty$ *către o constantă* F *exceptînd poate punctele* $[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})]$ *pentru care* $p_{i_0} = 0$.

Demonstrația teoremei I. 1. Se pornește de la relația funcțională de bază (2) din care se deduce

$$P_i^{(n+1)}[(\overline{p}', \overline{\varphi}'(\overline{p}')] - P_i^{(n+1)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} [p_j' - p_j] P_i^{(n)}[\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})]] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m+1} p_j' [P_i^{(n)}[\overline{\varphi}_j'(\overline{p}'), \psi_j(\overline{p}', \overline{\varphi}_j'(\overline{p}')] - P_i^{(n)}[\overline{\varphi}_j(\overline{p}), \overline{\psi}_j[\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p})]]. \quad (3)$$

Întrucît

$$P_i^{(3)}[\overline{p}, \overline{\varphi}(\overline{p})] = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m+1} p_j \varphi_{jk}(\overline{p}) \psi_{j,k,i}(\overline{p}, \overline{\varphi}_j(\overline{p}))$$

se vede imediat că

$$P_i^{(3)}[\overline{p}', \overline{\varphi}'] - P_i^{(3)}[\overline{p}, \overline{\varphi}] = \sum_{j,k} [p_j' \varphi_{jk}' - p_j \varphi_{jk}] \psi_{j,k,i}[\overline{p}, \overline{\varphi}_j] +$$
$$+ \sum_{j,k} p_j' \varphi_{jk}' [\psi_{j,k,i}(\overline{p}', \overline{\varphi}_j') - \psi_{j,k,i}(\overline{p}, \overline{\varphi}_j)],$$

prin urmare

$$|P_i^{(3)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(3)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < \sum_{j,k} |p_j'(\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}) + \varphi_{jk}(p_j' - p_j)| +$$

$$+ \sum_{j,k} p_j' \varphi_{jk}' |\psi_{j,k,i}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,i}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)| < \sum_{j,k} p_j' |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| +$$

$$+ \sum_j |p_j' - p_j| \underbrace{\sum_k \varphi_{jk}}_{1} + \sum_{j,k} p_j' \varphi_{jk}' |\psi_{j,k,i}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,i}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)| <$$

$$< \sum_j |p_j' - p_j| + \sum_{j,k} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| + \sum_{j,k} p_j' \varphi_{jk}' \sum_u \left[\left| \frac{\partial \psi_{j,k,i}}{\partial p_u''} \right| \cdot |p_u' - p_u| + \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial \psi_{j,k,i}}{\partial \varphi_{ju}''} \right| \cdot |\varphi_{ju}' - \varphi_{ju}| \right]$$

conform ipotezei (ii)

$$\left| \frac{\partial \psi_{j,k,i}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)}{\partial p_u \text{ sau } \partial \varphi_{ju}} \right| < \lambda < \frac{1}{2}$$

astfel că

$$|P_i^{(3)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(3)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < h \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| + h \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| +$$

$$+ \lambda h \left[\sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| + \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| \right],$$

unde $1 < h < 2$, h număr determinat.

A fortiori va fi valabilă relația

$$|P_i^{(3)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(3)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < M_1 \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}|, \quad (4)$$

unde M_1 și M_2 sînt numere mai mari decît $(\lambda + 1)h$, numere pe care le vom determina ulterior.

2. Dacă în relația (2) în loc de $\bar{p}$ și $\bar{\varphi}$ se ia $\bar{\varphi}_j$ și $\bar{\psi}_j[\bar{p}, \bar{\varphi}_j]$ se obține

$$|P_i^{(3)}[\bar{\varphi}_j', \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j')] - P_i^{(3)}[\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_i(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)]| < M_1 \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| +$$

$$+ M_2 \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} |\psi_{j,k,l}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)|.$$

Dacă în relația (1) se ia $n = 3$, se obține

$$|P_i^{(4)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(4)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < \sum_{j=1}^{m+1} |p_j' - p_j| + \sum_{j=1}^{m+1} p_j' \left[M_1 \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| + \right. \quad (5)$$

$$\left. + M_2 \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} |\psi_{j,k,l}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)| \right] < h \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| +$$

$$+ M_1 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j' \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} |\psi_{j,k,l}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)|.$$

3. Considerăm acum funcţia ajutătoare

$$\Phi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j) = \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \varepsilon_{k,l} \psi_{j,k,l}[\bar{p}, \bar{\varphi}_j],$$

unde $\varepsilon_{k,l}$ este egal cu $+1$ respectiv -1 după cum diferenţa

$$[\psi_{j,k,l}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j'] - \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j]]$$

pentru $(\bar{p}', \bar{\varphi}_j')$, $(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)$ determinaţi are semnul $+$ sau $-$.

Aplicînd acestei funcţii formula creşterilor finite, putem scrie

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} |\psi_{j,k,l}(\bar{p}', \bar{\varphi}_j') - \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \sum_{u=1}^{m} \left[\left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)}{\partial p_u''} \right| \cdot |p_u' - p_u| + \left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)}{\partial \varphi_{ju}''} \right| \cdot |\varphi_{ju}' - \varphi_{ju}| \right] =$$

$$= \sum_{u=1}^{m} |p_u' - p_u| \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}}{\partial p_u''} \right| + \sum_{u=1}^{m} |\varphi_{ju}' - \varphi_{ju}| \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}}{\partial p_{ju}''} \right|. \tag{6}$$

Dacă

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}}{\partial p_u''} \right| < a \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{l=1}^{m} \left| \frac{\partial \psi_{j,k,l}}{\partial \varphi_{ju}''} \right| < b$$

atunci primul membru din (6) este mai mic decît

$$a \sum_{u=1}^{m} |p_u' - p_u| + b \sum_{u=1}^{m} |\varphi_{ju}' - \varphi_{ju}|.$$

În consecinţă

$$|P_i^{(4)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(4)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < h \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| + M_1 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}| +$$

$$+ M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j' \left[a \sum_{u=1}^{m} |p_u' - p_u| + b \sum_{u=1}^{m} |\varphi_{ju}' - \varphi_{ju}| \right], \tag{7}$$

deci

$$|P_i^{(4)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(4)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < (h + M_2 a) \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| +$$

$$+ [M_1 + M_2 b] \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}|. \tag{7'}$$

Pentru ca (7') să fie de acelaşi tip ca şi (4) este necesar ca

$$h + M_2 a < M_1, \quad M_1 + M_2 b < M_2.$$

Aceste relaţii sînt compatibile şi din ele rezultă

$$h + M_2 a < M_1 < M_2 (1 - b) \tag{8}$$

deci

$$h + M_2 a < M_2(1 - b), \quad M_2 > \frac{h}{1 - a - b},$$

ceea ce implică $a + b < 1$.

Desigur în plus este necesar ca $(\lambda + 1)\, h < h + M_2 a$, $M_2 > \frac{\lambda h}{a}$.

În particular, luînd $a = b$ (ceea ce este firesc, neexistînd a priori un motiv special în a distinge derivatele funcțiilor $\psi_{j,k,i}$ în raport cu p_u față de cele luate în raport cu φ_{ju} trebuie ca

$$2a < 1, \quad a < \frac{1}{2}$$

și sîntem în condițiile teoremei.

Procedînd acum cu $P_i^{(5)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ la fel cum am procedat pentru $P_i^{(4)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ ș.a.m.d., vedem că în general

$$|P_i^{(n)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| < M_1 \sum_{j=1}^{m} |p_j' - p_j| + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{m} |\varphi_{jk}' - \varphi_{jk}|. \quad (9)$$

Egala continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ este stabilită.

Observație. Restul demonstrației este la fel ca în cazul lanțurilor simple și anume :

a) *Existența funcțiilor limită pentru șirul* $P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$.

Din proprietatea de egală continuitate a funcțiilor $P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ rezultă că mulțimea acestor funcții este compactă.

Se poate extrage deci un subșir convergent $P_i^{\nu_k}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ care să tindă uniform către o limită continuă $P_i^{\nu}[\bar{p}, \bar{\varphi}]$.

Dacă se notează cu

$$\overline{P}_i^{(n)} = \sup_{(\bar{p}\ \bar{\varphi}) \in \Delta} P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}), \quad \underline{P}_i^{(n)} = \inf_{(\bar{p}, \bar{\varphi}) \in \Delta} P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$$

și se ține seama de relația (2) se vede imediat că șirul $\overline{P}_i^{(n)}$ este monoton descrescător iar șirul $\underline{P}_i^{(n)}$ monoton crescător și în plus

$$\overline{P}_i^{(n)} \leqslant \overline{P}_i^{(1)} < 1, \quad \underline{P}_i^{(n)} \geqslant P_i^{(1)}, \quad \overline{P}_i^{(n)} > \underline{P}_i^{(n)}.$$

Prin urmare, ambele șiruri sînt convergente

$$\lim_{n \to \infty} \overline{P}_i^{(n)} = \overline{P}_i, \quad \lim_{n \to \infty} \underline{P}_i^{(n)} = \underline{P}_i, \quad 0 < \underline{P}_i \leqslant \overline{P}_i < 1.$$

Pornind acum de la relația

$$P_i^{(\nu_k + 1)}(\bar{p}, \bar{\varphi}) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(\nu_k)}[\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi})]$$

și ținînd seama de faptul că fiecare probabilitate $P_i^{(\nu_k)}[\ \ldots\ ]$ tinde către o limită determinată cînd $\nu_k \to \infty$, rezultă același lucru și pentru membrul stîng.

Subșirul $P_i^{(\nu_k+1)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ este deci de asemenea convergent și tinde către o limită $P_i^{(\nu+1)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ satisfăcînd relația:

$$P_i^{(\nu+1)}(\bar{p}, \bar{\varphi}) = \sum_{j=1}^{m+1} p_j P_i^{(\nu)}[\bar{\varphi}, \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j)]. \tag{10}$$

În mod analog se poate construi un șir $P_i^{(\nu_k+s)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ (s fiind un număr întreg ($s > 1$)) de funcții continue limită, în Δ și care admit toate aceeași margine superioară $\overline{P}_i$ și aceeași margine inferioară P_i.

b) *Unicitatea funcției limită.* Funcția limită $P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ poate fi scrisă sub forma

$$P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}, \bar{\varphi}) =$$

$$= \sum_{\substack{1 \\ i_1, i_2, \ldots, i_s}}^{m+1} p_{j_1} p_{j_1, j_2} \cdots p_{j_1, j_2 \ldots j_s} P_i^{(\nu)}[\bar{p}_{j_1, j_2 \ldots j_{s-1}}, \bar{\psi}_j(\bar{p}_{j_1, j_{s-1}}, \bar{p}_{j_1, \ldots, j_s})], \tag{11}$$

unde s-a notat

$$p_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \psi_{j_{n-2}, j_{n-1}, j_n}[\bar{p}_{j^1, j_2, \ldots, j_{n-2}}, \bar{p}_{j_1, j_2 \ldots, j_{n-1}}]$$

cu $p_{j_1} = p_{j_1}$, $p_{j_1, j_2} = \varphi_{j_1, j_2}$ restul stabilindu-se prin recurență, notația vectorială însemnînd

$$\bar{p}_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}} = \{p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, 1}, p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, 2}, \ldots, p_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, m}\}$$

și unde desigur

$$\sum_{i_1, j_2 \ldots j_{s-1}}^{m+1} p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_1 j_2 \ldots j_s} = 1.$$

Să considerăm domeniul Δ_a definit prin relațiile

$$0 < a \leqslant p_j, \varphi_{i,j} \leqslant 1 - a < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m+1, j = 1, 2, \ldots, m)$$

și în plus $\psi_{j,k,i}(\bar{p}, \bar{\varphi})$, pentru $j, k = 1, 2, \ldots, m+1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, sînt cuprinse în Δ_a.

Atunci, oricare ar fi succesiunea $j_1, j_2, \ldots, j_s$

$$p_{j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_1 j_2 \cdots j_s} > 0.$$

Fie acum $(\bar{p}', \bar{\varphi}') \in \Delta_a$ un punct în care $P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ ia valoarea maximă.

Notăm prin $p'_{j_1, j_2, \ldots, j_s}$ valoarea probabilității $p_{1j_1, j_2, \ldots, j_s}$ dacă în loc de $(\bar{p}, \bar{\varphi})$ se ia $(\bar{p}', \bar{\varphi}')$.

Din (11) rezultă imediat că

$$P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') = P_i^{(\nu)}[\bar{p}'_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}}, \bar{\psi}_j(\bar{p}'_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}}, \bar{p}'_{j_1, j_2, \ldots, j_s})]. \tag{12}$$

Dacă $(\bar{p}'', \bar{\varphi}'')$ reprezintă un punct în care $P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}', \bar{\varphi}')$ ia cea mai mică valoare, se vede imediat că

$$P_i^{(\nu+s)}(\bar{p}'', \bar{\varphi}'') = P_i^{(\nu)}[\bar{p}''_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}''_{j_1, j_2, \ldots, j_{s-1}}, \bar{p}''_{j_1, j_2, \ldots, j_s})]. \tag{12'}$$

Să luăm acum în relațiile (12), (12′) toți indicii egali cu i_0. Relațiile de mai sus devin

$$P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}', \overline{\varphi}') = P_i^{(\nu)}[\overline{p}'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{\psi}_j(\overline{p}'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{p}'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}})], \quad (12'')$$

$$P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}'', \overline{\varphi}'') = P_i^{(\nu)}[\overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{\psi}_j(\overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}})] \quad (12''')$$

și atunci

$$\lim_{s\to\infty} p'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}, l} = \lim_{s\to\infty} p''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}, l} = \overline{p}_l.$$

c) Funcțiile $P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}, \overline{\varphi})$ fiind egal continue în raport cu $(\overline{p}, \overline{\varphi})$ rezultă

$$|P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}'', \overline{\varphi}'') - P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}', \overline{\varphi}')| < \varepsilon$$

cu $\varepsilon > 0$ arbitrar dacă

$$|p'_j - p''_j| < \eta, \quad |\varphi''_{jk} - \varphi'_{jk}| < \eta$$

cu η convenabil ales $[k = 1, 2, \ldots, m+1, j = 1, 2, \ldots, m]$.
Pentru s suficient de mare

$$|p''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}, l} - p'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}, l}| < \eta, \quad 1 \leqslant l \leqslant m,$$

și deci

$$|P_i^{(\nu)}[\overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{\psi}_j(\overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{p}''_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}})] -$$

$$- P_i^{(\nu)}[\overline{p}'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ ori}}}, \overline{\psi}_j(p'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s-1 \text{ or i}}}, \overline{p}'_{\underbrace{i_0, i_0, \ldots, i_0}_{s \text{ ori}}})]| < \varepsilon.$$

Ținînd seama de (12″) și (12‴) rezultă

$$|P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}'', \overline{\varphi}'') - P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}', \overline{\varphi}')| < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

d) Să notăm cu $\overline{P}_i(a)$, $\underline{P}_i(a)$ marginea superioară și inferioară a funcției $P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}, \overline{\varphi})$ în Δ_a.

Desigur $\overline{P}_i(a) = P_i^{(\nu+s)}(\overline{p}', \overline{\varphi}')$, $\underline{P}_i(a) = P_i^{(\nu+s)}(p'', \overline{\varphi}'')$,

deci

$$\overline{P}_i(a) - \underline{P}_i(a) < \varepsilon$$

pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar.

Prin urmare

$$\overline{P}_i(a) = \underline{P}_i(a).$$

Aceasta înseamnă că $P_i^{(\nu)}(\overline{p}, \overline{\varphi})$ se reduce la o constantă $P_i(a)$ în Δ_a.

Cum a poate fi arbitrar de mic, concluzia rămîne valabilă în Δ.

Am demonstrat astfel că

$$\lim_{n\to\infty} P_i^{(n)}(\bar{p}, \bar{\varphi}) = P_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

unde P_i nu depinde de $\bar{p}$ și $\bar{\varphi}$ dar depinde de funcțiile $\psi_{j.k.i}$. Teorema este complet demonstrată.

Demonstrarea teoremei II. Întrucît teorema II_1 este un caz particular al teoremei II_2 și anume cazul în care distanța dintre două puncte este egală cu suma valorilor absolute ale diferenței coordonatelor corespunzătoare ale celor două puncte, iar norma este minimul sumei valorilor absolute ale derivatelor parțiale de primul ordin, după cum se indică în enunțul teoremei II_1, este suficient a demonstra teorema II_2.

a) Din formula de recurență din enunțul teoremei II_2, rezultă

$$F^{(n+1)}[\bar{p}', \bar{\varphi}'(\bar{p}')] - F^{(n+1)}[\bar{p}, \bar{\varphi}(\bar{p})] = \sum_{j=1}^{m+1}(p_j' - p_j) F^{(n)}[\bar{\varphi}_j'(\bar{p}'), \bar{\psi}_j[\bar{p}', \bar{\varphi}_j'(\bar{p}')]] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} p_j \{F^{(n)}[\bar{\varphi}_j'(\bar{p}'), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j'(\bar{p}')]] - F^{(n)}[\bar{\varphi}_j(\bar{p}), \bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j(\bar{p}))]]. \quad (13)$$

Din (1) și (i) rezultă inegalitatea

$$|F(\bar{p}', \bar{\varphi}') - F(\bar{p}, \bar{\varphi})| \leqslant M_1 \rho(\bar{p}, \bar{p}') + M_2 \rho(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'), \quad (14)$$

unde M_1, $M_2 \geqslant B$ vor fi determinate ulterior.

Făcînd în (13) $n = 1$ se deduce pe baza lui (14)

$$|F^{(2)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - F^{(2)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| \leqslant h\rho(\bar{p}, \bar{p}') +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m+1} p_j [M_1 \rho(\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_j') + M_2 \rho[\bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j); \psi_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j')]] \quad (15)$$

unde h a fost ales în mod convenabil.

Cum $\rho(\bar{\varphi}_j, \bar{\varphi}_j') \leqslant \rho(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}')$, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, din (15) urmează

$$|F^{(2)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - F^{(2)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| \leqslant h\rho(\bar{p}, \bar{p}') + M_1 \rho(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}') +$$

$$+ M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \rho[\bar{\psi}_j(\bar{p}, \bar{\varphi}_j), \bar{\psi}_j(\bar{p}', \bar{\varphi}_j')]. \quad (15')$$

Ținîndu-se seama de (iii) și (l) rezultă imediat

$$|F^{(2)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - F^{(2)}(\bar{p}, \bar{\varphi})| \leqslant [h + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j]. \rho(\bar{p}, \bar{p}') +$$

$$+ [M_1 + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j]. \rho(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'). \quad (15'')$$

Pentru ca relația (15'') să fie de aceeași formă ca și (14) este necesar ca

$$h + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j \leqslant M_1,$$

$$M_1 + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j \leqslant M_2.$$

Cu alte cuvinte este necesar ca

$$h + M_2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j \leqslant M_1 \leqslant M_2 \left[1 - \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j \right], \tag{16}$$

$$h \leqslant M_2 \left[1 - 2 \sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \psi \|_j \right] \tag{16'}$$

ceea ce implică

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j < \frac{1}{2}.$$

Or, pe baza lui (iii)

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j \| \bar{\psi} \|_j < \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_{i_0} (1 - 2 \| \bar{\psi} \|_{i_0}) < \frac{1}{2}.$$

Dacă se ia

$$M_2 \geqslant \frac{h}{1 - [1 - p_{i_0}(1 - 2 \| \bar{\psi} \|_{i_0})]} = \frac{h}{p_{i_0}(1 - 2 \| \bar{\psi} \|_{i_0})}$$

iar M_1 din (16), rezultă că relația (15'') implică

$$| F^{(2)}(\bar{p}', \bar{\varphi}') - F^{(2)}(\bar{p}, \bar{\varphi}) | \leqslant M_1 \rho(\bar{p}, \bar{p}') + M_2 \rho(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}'). \tag{16''}$$

Tot așa, pornind de la (16'') în loc de (14) și făcînd $n = 2$ în (13) se poate obține o relație de același tip pentru $F^{(3)}(\bar{p}, \bar{\varphi})$ ș.a.m.d. Egala continuitate este stabilită pentru orice $p_{i_0} \neq 0$.

b) Se observă că în demonstrarea teoremei I am presupus existența cel puțin a unui punct de atracție. Acest lucru este firesc, fiind o consecință a faptului că norma respectivă este mai mică ca 1 (desigur i_0 poate fi oricare din numerele 1, 2, ..., $m + 1$).

Aceeași situație are loc și în cazul teoremelor II_1 și II_2 și de aceea este inutil a ne opri asupra acestui lucru.

Restul demonstrației este analog ca la punctele a) și b) din demonstrația teoremei I, modificările de făcut fiind mici, din care cauză nu vom insista.

În încheiere, țin să subliniez diferența dintre teoremele de mai sus și o teoremă a prof. Gh. Mihoc care a servit drept punct de plecare și în care probabilitățile p_j relative la variabila X_1 sînt arbitrare, dar funcțiile $\varphi_{j,k}(\bar{p})$ relative la X_2 sînt date.

În cazul teoremelor de mai sus atît probabilitățile p_j cît și funcțiile $\varphi_{j,k}$ sînt arbitrare, probabilitățile p_j și funcțiile $\varphi_{j,k}$ comportîndu-se între ele ca variabile independente legate numai prin tehnica formării lanțului.

Primită la redacție la 20 martie 1963

ДВЕ ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОЛНЫМИ СВЯЗЯМИ, ВТОРОГО ПОРЯДКА МНОЖЕСТВЕННОСТИ, С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

РЕЗЮМЕ

Введение в [1] цепи с полными связями составляли и продолжают составлять предмет большого числа исследований, направленных в особенности на простые цепи.

Кратные цепи мало изучены.

Недавно [2] проф. Т. Михок начал изучение цепей второго порядка, в предположении, что вероятности перехода второй переменной цепи являются заданными функциями вероятностей первой переменной.

Содержащиеся в настоящей работе теоремы относятся к случаю, когда вероятности перехода второй переменной — произвольные функции первой переменной.

Рассмотренные теоремы соответствуют эргодическим теоремам для простых цепей из [1] и теореме Форте [3] (стр. 31—33), и позволяют эффективно построить цепи такого типа.

DEUX THÉORÈMES ERGODIQUES RELATIFS AUX CHAÎNES À LIAISONS COMPLÈTES, STATIONNAIRES, DE L'ORDRE DEUX DE MULTIPLICITÉ, À UN NOMBRE FINI D'ÉTATS

RÉSUMÉ

Les chaînes à liaisons complètes introduites dans [1] ont fait et continuent à faire l'objet d'un grand nombre de recherches dirigées surtout sur les chaînes simples.

Les chaînes multiples ont été peu étudiées.

Récemment [2], le professeur Mihoc a commencé l'étude des chaînes de l'ordre deux, dans l'hypothèse que les probabilités de transitions de la seconde variable aléatoire de la chaîne sont des fonctions données des probabilités de la première variable.

Les théorèmes de cette communication sont relatifs au cas où les probabilités de transitions de la seconde variable sont des fonctions arbitraires de la première.

Les théorèmes considérés sont les correspondants des théorèmes ergodiques des chaînes simples de [1] et du théorème correspondant de Fortet [3] (p. 31—33) et permettent la construction effective de telles chaînes.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Onicescu, Gh. Mihoc, *Sur les chaînes de variables statistiques.* Bull. Sci. Math., *59* (1935).
2. Gh. Mihoc, *Colocviul de Calculul probabilităţilor şi statistică matematică.* Braşov. 1962.
3. G. Ciucu, R. Theodorescu, *Procese cu legături complete.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1960.

ASUPRA SPAȚIILOR RIEMANNIENE CU METRICA NEDEFINITĂ, CU CURBURA CONSTANTĂ

DE

MARIUS I. STOKA

Fie V_n un spațiu riemannian a cărui metrică este

$$ds^2 = a_{ij}dx^i dx^j, \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

F. Schur a demonstrat [3] că spațiul V_n are curbura riemanniană constantă K, dacă simbolurile lui Riemann de prima speță au expresiile

$$R_{ijkl} = K(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk}).$$

Plecînd de la această formulă se demonstrează că metrica unui spațiu riemannian cu curbura constantă poate fi pusă sub forma lui Riemann [1] [1])

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (dx^i)^2}{\left[1 + \frac{K}{4}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2\right]^2}, \qquad (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{1'}$$

Dacă spațiul este cu metrica definită, se poate obține formula (1') cu $\varepsilon_i = 1$, plecînd de la expresia curburii riemanniene față de un sistem de congruențe ortogonale [4] [2]).

De asemenea, V. F. Kagan a demonstrat [2] că, dacă curbura spațiului este constantă ($K \neq 0$), componentele tensorului metric al spațiului sînt

$$a_{ij} = \frac{1}{4K}\left(\frac{2}{\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{\Theta^2}\frac{\partial\Theta}{\partial x^i}\frac{\partial\Theta}{\partial x^j}\right),$$

unde

$$\Theta = \varepsilon_1 (x^1)^2 + \ldots + \varepsilon_n (x^n) + \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_i, \varepsilon_0 = \pm 1).$$

[1]) p. 85.
[2]) p. 297.

Recent, prof. G. Vrănceanu a introdus noțiunea de congruențe pseudoortogonale într-un spațiu riemannian cu metrica nedefinită [5].

Dacă scriem metrica (1) sub forma

$$ds^2 = \varepsilon_u (ds^u)^2, \quad (\varepsilon_u = \pm 1),$$

unde

$$ds^u = \lambda^u_v dx^v,$$

atunci congruențele (λ) constituie un sistem de congruențe pseudoortogonale în spațiul V_n.

În acest caz conexiunea γ^a_{bc} a lui Levi Civita față de sistemul de congruențe pseudoortogonale este dată de formulele

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}(w^a_{bc} + \varepsilon_a\varepsilon_b w^b_{ca} + \varepsilon_a\varepsilon_c w^c_{ba}), \tag{2}$$

w^a_{bc} fiind coeficienții covarianților biliniari ai formelor ds^a.

Componentele tensorului de curbură sînt

$$\gamma^a_{bcd} = \frac{\partial\gamma^a_{bc}}{\partial s^d} - \frac{\partial\gamma^a_{bd}}{\partial s^c} + \gamma^a_{sc}\gamma^s_{bd} - \gamma^a_{sd}\gamma^s_{bc} + \gamma^a_{bs}w^s_{cd}, \tag{3}$$

unde γ^a_{bc} au valorile (2).

Spațiul V_n este cu curbura constantă K dacă coeficienți γ^a_{bcd} cu trei și patru indici distincți sînt nuli, iar coeficienții cu doi indici distincți sînt dați de relațiile

$$\gamma^a_{bab} = \gamma^\alpha_{\alpha\alpha a} = -\gamma^a_{\alpha a\alpha} = -\gamma^\alpha_{\beta\alpha\beta} = K, \tag{4}$$

unde $\varepsilon_a = \varepsilon_b = 1$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$.

În această lucrare, plecînd de la condiția ca un spațiu riemannian cu metrica nedefinită să aibă curbura constantă, scrisă față de sistemul de congruențe pseudoortogonale, obținem formula (1′). Obținem de asemenea, pentru spațiile cu curbura pozitivă, respectiv negativă, formule analoage cu formula lui Beltrami pentru metrica unui spațiu V_n cu metrica definită, cu curbura negativă.

În partea a doua a lucrării determinăm grupurile de mișcări ale spațiilor riemanniene cu metrica nedefinită, cu curbură constantă.

În partea a treia determinăm ecuațiile finite ale grupurilor de mișcări ale spațiilor V_3 cu metrica nedefinită și curbura constantă.

I

Putem presupune că metrica (1) este pusă sub forma

$$ds^2 = \rho^2\varepsilon_u (dx^u)^2, \qquad (u = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

unde $\rho = \rho(x^1, \ldots, x^n)$ și $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_p = 1$, $\varepsilon_{p+1} = \ldots = \varepsilon_n = -1$.

Sistemul de congruențe pseudoortogonale este în acest caz

$$ds^u = \rho dx^u.$$

Singurii coeficienți w_{bc}^{a} nenuli sînt

$$w_{uv}^{u} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x^v}, \qquad (u \neq v = 1, \ldots, n).$$

Cu aceste valori, din (2) deducem

$$\gamma_{vu}^{u} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x^v}, \quad \gamma_{uu}^{v} = \frac{\varepsilon_u \varepsilon_v}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x^v}, \quad (u \neq v),$$

coeficienții nescriși fiind nuli.

Din (3) rezultă că componentele nenule ale tensorului de curbură γ_{bcd}^{a} sînt

$$\gamma_{vuw}^{u} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^v \partial x^w}, \quad (u \neq v \neq w)$$

$$\gamma_{vuv}^{u} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^v)^2} + \varepsilon_u\varepsilon_v \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^u)^2}\right] - \varepsilon_v \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^s}\right]^2.$$

Condițiile (4) devin

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^a)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^b)^2}\right] - \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^s}\right]^2 = K, \qquad (a, b = 1, \ldots, p)$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^a)^2} - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^\alpha)^2}\right] - \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^s}\right]^2 = K, \quad (\alpha = p+1, \ldots, n)$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^\alpha)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^\beta)^2}\right] - \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\partial}\right)}{\partial x^s}\right]^2 = -K, \; (\beta = p+1, \ldots, n)$$

Deci, pentru ca spațiul V_n cu metrica (5) să fie cu curbura constantă K, trebuie ca

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \qquad (i \neq j, = 1, \ldots, n) \\
&\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^a)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^\alpha)^2} = 0, \quad (a = 1, \ldots, p; \quad \alpha = p+1, \ldots, n) \\
&\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^a)^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial (x^b)^2}\right] - \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial x^s}\right]^2 = K.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Din prima ecuație (6) rezultă

$$\frac{1}{\rho} = f_1(x^1) + \ldots + f_n(x^n),$$

care înlocuită în a doua ecuație (6) ne dă

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_a}{\mathrm{d}(x^a)^2} + \frac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}(x^\alpha)^2} = 0,$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}^2 f_a}{\mathrm{d}(x^a)^2} = 2a, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}(x^\alpha)^2} = -2a, \quad (a = \text{const.}),$$

adică

$$f_a(x^a) = a(x^a)^2 + c_a x^a + l_a, \qquad (a = \text{indice fix}),$$

$$f_\alpha(x^\alpha) = -a(x^\alpha)^2 + c_\alpha x^\alpha + l_\alpha, \qquad (\alpha = \text{indice fix}).$$

Deci

$$\frac{1}{\rho} = a\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i x^i + l, \quad \left(l = \sum_{i=1}^{n} l_i\right). \tag{7}$$

Înlocuind această expresie în a treia ecuație (6), găsim

$$4al - \sum_{i=1} \varepsilon_i (c_i)^2 = K. \tag{8}$$

Dacă $a \neq 0$, printr-o schimbare de variabile de forma

$$\bar{x}^i = \lambda x^i + \lambda^i, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

putem presupune $c_i = 0$ și $l = 1$. În acest caz din (8) rezultă $a = \frac{K}{4}$ și relația (7) devine

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \frac{K}{4}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2,$$

deci metrica (5) se scrie

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^p)^2 - (\mathrm{d}x^{p+1})^2 - \ldots - (\mathrm{d}x^n)^2}{\left\{1 + \frac{K}{4}\left[(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1}) - \ldots (x^n)^2\right]\right\}^2}. \tag{9}$$

Dacă presupunem $a = 0$, printr-o schimbare pseudoortogonală obținem, dacă $K > 0$:

$$c_1 = \ldots = c_{n-1} = l = 0, \quad c_n^2 = K,$$

iar dacă $K < 0$:

$$c_2 = \ldots = c_n = l = 0, \quad c_1^2 = -K,$$

Metrica (5) ia deci forma

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^p)^2 - (dx^{p+1})^2 - \ldots - (dx^n)^2}{-K(x^n)^2}, \quad (K > 0), \quad (10)$$

sau

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^p)^2 - (dx^{p+1})^2 - \ldots - (dx^n)^2}{-K(x^1)^2}, \quad (K < 0). \quad (11)$$

Rezultă

TEOREMA 1. *Metrica unui spațiu riemannian V_n, cu metrica nedefinită și curbura constantă K, poate fi pusă sub forma (9) sau sub formele (10) respectiv (11).*

II

Să determinăm acum grupurile de mișcări ale spațiilor riemanniene cu metrica nedefinită și curbura constantă.

Înlocuind în ecuațiile lui Killing coeficienții metricii (10) obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x^a} = 0, && (a, b = 1, \ldots, p) \\ &\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} = 0, && (\alpha, \beta = p+1, \ldots, n) \\ &\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^a} = 0, \\ &\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \frac{\xi^n}{x^n}, && (i = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

unde ξ^i sînt coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului de mișcări.

Din ultima ecuație (12) rezultă

$$\xi^n = x^n f_n(x^1, \ldots, x^{n-1}).$$

Înlocuind această valoare în ecuațiile

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^n} - \frac{\partial \xi^n}{\partial x^a} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^n} + \frac{\delta \xi^n}{\partial x^\alpha} = 0,$$

obținem

$$\xi^a = \frac{(x^n)^2}{2}\frac{\partial f_n}{\partial x^a} + f_a(x', \ldots, x^{n-1}),$$

$$\xi^\alpha = -\frac{(x^n)^2}{2}\frac{\partial f_n}{\partial x^\alpha} + f_\alpha(x', \ldots, x^{n-1}), \qquad (\alpha \neq n).$$

Cu aceste valori, ecuațiile (12) se scriu

$$\left.\begin{aligned}
&(x^n)^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^a \partial x^b} + \frac{\partial f_a}{\partial x^b} + \frac{\partial f_b}{\partial x^a} = 0,\\
&(x^n)^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^a \partial x^\alpha} + \frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^a} = 0,\\
-&(x^n)^2\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha} = 0,\\
&\frac{(x^n)^2}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial (x^a)^2} + \frac{\partial f_a}{\partial x^a} = f_n,\\
-&\frac{(x^n)^2}{2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial (x^\alpha)^2} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\alpha} = f_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (12')$$

De aici deducem

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial (x^h)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^h \partial x^K} = 0, \quad (h, K = 1, \ldots, n-1),$$

de unde

$$f_n(x^1, \ldots, x^{n-1}) = a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n.$$

Ultimele două relații (12′) ne dau

$$f_i(x^1, \ldots, x^{n-1}) = x^i(a_1 x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) -$$

$$-\frac{a_i}{2}(x^i)^2 + \varphi_i(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^{n-1}), \quad (i = 1, \ldots n-1).$$

Primele trei relații (12′) se scriu

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^b} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial x^a} + a_b x^a + a_a x^b = 0,\\
&\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^a} + a_\alpha x^a - a_a x^\alpha = 0,\\
&\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} + a_\beta x^\alpha + a_\alpha x^\beta = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Din acest sistem rezultă

$$\varphi_1 = -\frac{a_1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_1}{2}(x^1)^2 + a_{12}x^2 + \ldots + a_{1,n-1}x^{n-1} + b_1,$$

$$\varphi_2 = -\frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_2}{2}(x^2)^2 - a_{12}x^1 + a_{23}x^3 + \ldots + a_{2,n-1}x^{n-1} + b_2,$$

. . . . . .

$$\varphi_p = -\frac{a_p}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_p}{2}(x^p)^2 - a_{1p}x^1 - a_{2p}x^2 - \ldots - a_{p-1,p}x^{p-1} +$$
$$+ a_{p,p+1}x^{p+1} + \ldots + a_{p,n-1}x^{n-1} + b_p,$$

$$\varphi_{p+1} = \frac{a_{p+1}}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_{p+1}}{2}(x^{p+1})^2 + a_{1,p+1}x^1 + \ldots + a_{p,p+1}x^p +$$
$$+ a_{p+1,p+2}x^{p+2} + \ldots + a_{p+1,n-1}x^{n-1} + b_{p+1},$$

. . . . . .

$$\varphi_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_{n-1}}{2}(x^{n-1})^2 + a_{1,n-1}x^1 + \ldots + a_{p,n-1}x^p -$$
$$- a_{p+1,n-1}x^{p+1} - \ldots - a_{n-2,n-1}x^{n-2} + b_{n-1}.$$

Coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului sînt deci

$$\xi^1 = -\frac{a_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^1(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) + a_{12}x^2 + \ldots +$$
$$+ a_{1,n-1}x^{n-1} + b,$$

$$\xi^2 = -\frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^2(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) - a_{12}x^1 + a_{23}x^3 +$$
$$+ \ldots + a_{2,n-1}x^{n-1} + b_2,$$

. . . . . .

$$\xi^p = -\frac{a_p}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^p(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) - a_{1p}x^1 - a_{2p}x^2 -$$
$$- \ldots - a_{p-1,p}x^{p-1} + a_{p,p+1}x^{p+1} + \ldots + a_{p,n-1}x^{n-1} + b_p,$$

$$\xi^{p+1} = \frac{a_{p+1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^{p+1}(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) + a_{1,p+1}x' +$$
$$+ \ldots + a_{p,p+1}x^p + a_{p+1,p+2}x^{p+2} + \ldots + a_{p+1,n-1}x^{n-1} + b_{p+1},$$

$$\xi^{p+2} = \frac{a_{p+2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^{p+2}(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) + a_{1,p+2}x^1 +$$
$$+ \ldots + a_{p,p+2}x^p - a_{p+1,p+2}x^{p+1} + a_{p+2,p+3}x^{p+3} + \ldots + a_{p+2,n-1}x^{n-1} + b_{p+2},$$

. . . . . .

$$\xi^{n-1} = \frac{a_{n-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^{n-1}(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n) + a_{1,n-1}x^1 +$$
$$+ \ldots + a_{p,n-1}x^p - a_{p+1,n-1}x^{p+1} - \ldots - a_{n-2,n-1}x^{n-2} + b_{n-1},$$
$$\xi^n = x^n(a_1x^1 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n).$$

Rezultă că operatorii grupului de mişcări al spaţiului (10) sînt

$$X_1 f = [2(x^1)^2 - (x)^2]\frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \ldots + 2x^1x^n\frac{\partial f}{\partial x^n}, \quad \left[(x)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2\right],$$

. . . . . .

$$X_p f = 2x^1x^p\frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^{p-1}x^p\frac{\partial f}{\partial x^{p-1}} + [2(x^p)^2 - (x)^2]\frac{\partial f}{\partial x^p} +$$

$$+ 2x^px^{p+1}\frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} + \ldots + 2x^px^n\frac{\partial f}{\partial x^n},$$

$$X_{p+1} f = 2x^1x^{p+1}\frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^px^{p+1}\frac{\partial f}{\partial x^p} + [2(x^{p+1})^2 + (x)^2]\frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} +$$

$$+ 2x^{p+1}x^{p+2}\frac{\partial f}{\partial x^{p+2}} + \ldots + 2x^{p+1}x^n\frac{\partial f}{\partial x^n},$$

. . . . . .

$$X_{n-1} f = 2x^1x^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^{n-2}x^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x^{n-2}} + [2(x^{n-1})^2 + (x)^2]\frac{\partial f}{\partial x^{n-1}} +$$

$$+ 2x^{n-1}x^n\frac{\partial f}{\partial x^n}, \tag{14}$$

$$X_n f = x_1\frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + x^n\frac{\partial f}{\partial x^n},$$

$$X_{ab} f = x^b\frac{\partial f}{\partial x^a} - x^a\frac{\partial f}{\partial x^b}, \qquad (a < b = 1, \ldots, p),$$

$$X_{\alpha\beta} f = x^\beta\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - x^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\beta}, \qquad (\alpha < \beta = p+1, \ldots, n-1),$$

$$X_{a\alpha} f = x^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^a} + x^a\frac{\partial f}{\partial x^\alpha},$$

$$Y_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Structura grupului este

$$(X_i X_n) = -X_i, \ (X_i Y_i) = -2X_n, \ (X_a X_{ab}) = -X_b, \ (X_a X_{a\alpha}) = -X_\alpha,$$
$$(X_a Y_b) = 2X_{ab}, \ (X_a Y_\alpha) = -2X_{a\alpha}, \ (X_\alpha Y_{a\alpha}) = -X_a, \ (X_\alpha X_{\alpha\beta}) = -X_\beta,$$
$$(X_\alpha Y_a) = -2X_{a\alpha}, \ (X_\alpha Y_\beta) = 2X_{\alpha\beta}, \ (X_n Y_i) = -Y_i, \ (X_{ab} X_{ac}) = X_{bc},$$
$$(X_{ab} X_{a\alpha}) = X_{b\alpha}, \ (X_{ab} Y_a) = Y_b, \ (X_{a\alpha} X_{\alpha\beta}) = -X_{a\beta}, \ (X_{a\alpha} Y_a) = -Y_\alpha,$$
$$(X_{a\alpha} X_{a\beta}) = X_{\alpha\beta}, \tag{15}$$
$$(X_{a\alpha} Y_\alpha) = -Y_a, \ (X_{\alpha\beta} X_{\alpha\gamma}) = -X_{\beta\gamma}, \ (X_{\alpha\beta} Y_\alpha) = Y_\beta, \ (X_{a\alpha} X_{b\alpha}) = -X_{ab},$$
$$(X_i X_j) = (X_a X_{bc}) = (X_a X_{b\alpha}) = (X_a X_{\alpha\beta}) = (X_\alpha X_{ab}) = (X_\alpha X_{a\beta}) = (X_\alpha X_{\beta\gamma}) =$$
$$= (X_n X_{ij}) = (X_{ab} X_{cd}) = (X_{ab} X_{c\alpha}) = (X_{ab} X_{\alpha\beta}) = (X_{a\alpha} X_{\beta\gamma}) = (X_{\alpha\beta} X_{\gamma\delta}) =$$
$$= (X_{ij} Y_k) = (Y_i Y_j) = 0, \quad (a \neq b \neq c \neq d = 1, \ldots, p; \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq$$
$$\neq \delta = p+1, \ldots, n-1; \ i \neq j \neq k = 1, \ldots, n-1).$$

Avem deci

TEOREMA 2. *Spațiul V_n cu metrica nedefinită și curbura constantă pozitivă (10), are ca grup de mișcări grupul definit de operatorii (14) și cu structura (15).*

Înlocuind acum coeficienții metricii (11) în ecuațiile lui Killing obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = \frac{\xi^1}{x^1}, && (i = 1, \ldots, n)\\
&\frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x^a} = 0, && (a, b = 1, \ldots, p)\\
&\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} = 0, && (\alpha, \beta = p+1, \ldots, n)\\
&\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^a} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Din prima ecuație (16) rezultă

$$\xi^1 = x^1 f_1(x^2, \ldots, x^n),$$

care înlocuită în ecuațiile

$$\frac{\partial \xi^a}{\partial x^1} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^a} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^1}{\partial x^\alpha} = 0$$

ne dă

$$\xi^a = -\frac{(x^1)^2}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x^a} + f_a(x^2, \ldots, x^n), \qquad (a = 2, \ldots, p).$$

$$\xi^\alpha = \frac{(x^1)^2}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x^\alpha} + f_\alpha(x^2, \ldots, x^n).$$

Cu aceste valori, celelalte ecuații (16) devin

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{(x^1)^2}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial (x^a)^2} + \frac{\partial f_a}{\partial x^a} = f_1,\\
&\frac{(x^1)^2}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial (x^\alpha)^2} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\alpha} = f_1,\\
&-(x^1)^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^a \partial x^b} + \frac{\partial f_a}{\partial x^b} + \frac{\partial f_b}{\partial x^a} = 0,\\
&-(x^1)^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^a \partial x^\alpha} + \frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^a} = 0,\\
&(x^1)^2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

De aici deducem

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial (x^h)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^h \partial x^k} = 0, \qquad (h \neq k = 2, \ldots, n).$$

de unde

$$f_1(x^2, \ldots, x^n) = a_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Ecuațiile (17) se scriu

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_h}{\partial x^h} = a_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \\ &\frac{\partial f_a}{\partial x^b} + \frac{\partial f_b}{\partial x^a} = 0, \\ &\frac{\partial f_a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^a} = 0, \\ &\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (17')$$

Din prima ecuație (17′) rezultă

$$f_h(x^2, \ldots, x^n) = x^h (a_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) - \frac{a_h}{2} (x^h)^2 +$$

$$+ \varphi_h(x^2, \ldots, x^{h-1}, x^{h+1}, \ldots, x^n), \qquad (h = 2, \ldots, n),$$

care înlocuită în celelalte ecuații (17′) ne dă

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^b} + \frac{\partial \varphi_b}{\partial x^a} + a_b x^a + a_a x^b = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^a} + a_\alpha x^b - a_a x^\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} + a_\alpha x^\beta + a_\beta x^\alpha = 0.$$

Din acest sistem deducem

$$\varphi_2 = -\frac{a_2}{2} \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_2}{2} (x^2)^2 + a_{23} x^3 + \ldots + a_{2n} x^n + b_2,$$

$$\varphi_3 = -\frac{a_3}{2} \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_3}{2} (x^3)^2 - a_{23} x^2 + a_{34} x^4 + \ldots + a_{3n} x^n + b_3,$$

. . . . . .

$$\varphi_p = -\frac{a_p}{2}\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_p}{2}(x^p)^2 - a_{2p}x^2 - a_{3p}x^3 - \ldots - a_{p-1,p}x^{p-1} +$$
$$+ a_{p,p+1}x^{p+1} + \ldots + a_{pn}x^n + b_p,$$

$$\varphi_{p+1} = \frac{a_{p+1}}{2}\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_{p+1}}{2}(x^{p+1})^2 + a_{2,p+1}x^2 + \ldots + a_{p,p+1}x^p +$$
$$+ a_{p+1,p+2}x^{p+2} + \ldots + a_{p+1,n}x^n + b_{p+1},$$

. . . . . .

$$\varphi_n = \frac{a_n}{2}\sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + \frac{a_n}{2}(x^n)^2 + a_{2n}x^2 + \ldots + a_{pn}x^p - a_{p+1,n}x^{p+1} -$$
$$- \ldots - a_{n-1,n}x^{n-1} + b_n.$$

Cu aceste valori, coeficienții transformărilor infinitezimale ale grupului sînt

$$\xi^1 = x^1(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n),$$

$$\xi^2 = -\frac{a_2}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^2(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + a_{23}x^3 + \ldots + a_{2n}x^n + b_2,$$

$$\xi^3 = -\frac{a_3}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^3(a_1 + a_2x^2 + \ldots a_nx^n) - a_{23}x^2 + a_{34}x^4 + \ldots +$$
$$+ a_{3n}x^n + b_3,$$

. . . . . .

$$\xi^p = -\frac{a_p}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^p(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) - a_{2p}x^2 - \ldots -$$
$$- a_{p-1,p}x^{p-1} + a_{p,p+1}x^{p+1} + \ldots + a_{pn}x^n + b_p,$$

$$\xi^{p+1} = \frac{a_{p+1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^{p+1}(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + a_{2,p+1}x^2 + \ldots +$$
$$+ a_{p,p+1}x^p + a_{p+1,p+2}x^{p+2} + \ldots + a_{p+1,n}x^n + b_{p+1}, \qquad (18)$$

$$\xi^{p+2} = \frac{a_{p+2}}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^{p+2}(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^3) + a_{2,p+2}x^2 + \ldots +$$
$$+ a_{p,p+2}x^p - a_{p+1,p+2}x^{p+1} + a_{p+2,p+3}x^{p+3} + \ldots + a_{p+2,n}x^n + b_{p+2},$$

. . . . . .

$$\xi^n = \frac{a_n}{2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i (x^i)^2 + x^n(a_1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + a_{2n}x^2 + \ldots + a_{pn}x^p -$$
$$- a_{p+1,n}x^{p+1} - \ldots - a_{n-1,n}x^{n-1} + b_n.$$

Rezultă că operatorii grupului de mişcare al spaţiului (11) sînt

$$X_1 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + x^n \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

$$X_2 f = 2x^1x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + [2(x^2)^2 - (x)^2] \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3} + \ldots + 2x^2x^n \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

. . . . . .

$$X_p f = 2x^1x^p \frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^{p-1}x^p \frac{\partial f}{\partial x^{p-1}} + [2(x^p)^2 - (x)^2] \frac{\partial f}{\partial x^p} +$$

$$+ 2x^p x^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} + \ldots + 2x^p x^n \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

$$X_{p+1} f = 2x^1x^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^p x^{p+1} \frac{\partial f}{\partial x^p} + [2(x^{p+1})^2 - (x)^2] \frac{\partial f}{\partial x^{p+1}} +$$

$$+ 2x^{p+1}x^{p+2} \frac{\partial f}{\partial x^{p+2}} + \ldots + 2^{p+1}x^n \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

. . . . . .

$$X_n f = 2x^1x^n \frac{\partial f}{\partial x^1} + \ldots + 2x^{n-1}x^n \frac{\partial f}{\partial x^{n-1}} + [2(x^n)^2 + (x)^2] \frac{\partial f}{\partial x^n},$$

$$X_{ab} f = x^b \frac{\partial f}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial f}{\partial x^b}, \qquad (a < b = 2, \ldots, p)$$

$$X_{\alpha\beta} f = x^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\beta}, \qquad (\alpha < \beta = p+1, \ldots n),$$

$$X_{a\alpha} f = x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^a} + x^a \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

$$Y_h f = \frac{\partial f}{\partial x^h}, \qquad (h = 2, \ldots, n).$$

Structura grupului este

$$(X_1X_i) = X_i,\ (X_iY_i) = -2X_1,\ (X_aX_{ab}) = -X_b,\ (X_aX_{a\alpha}) = -X_\alpha,\ (X_aY_b) = 2X_{ab},$$
$$(X_aY_\alpha) = -2X_{a\alpha},\ (X_\alpha X_{a\alpha}) - X_a,\ (X_\alpha X_{\alpha\beta}) = -X_\beta,\ (X_\alpha Y_a = -2X_{a\alpha},$$
$$(X_\alpha Y_\beta) = 2X_{\alpha\beta},$$
$$(X_1Y_i) = -Y_i,\ (X_{ab}X_{ac}) = X_{bc},\ (X_{ab}X_{a\alpha}) = X_{b\alpha},\ (X_{ab}Y_a) = Y_b,\ (X_{a\alpha}X_{\alpha\beta}) =$$
$$= -X_{a\beta},$$
$$(X_{a\alpha}Y_a) = -Y_a,\ (X_{a\alpha}Y_\alpha) = -Y_a,\ (X_{\alpha\beta}X_{\alpha\gamma}) = -X_{\beta\gamma}(X_{\alpha\beta}Y_\alpha) = Y_\beta,$$
$$(X_{a\alpha}X_{\alpha\beta}) = X_{a\beta},\ (X_{a\alpha}X_{b\alpha}) = -X_{ab}, \qquad (19)$$
$$(X_iX_j) = (X_aX_{bc}) = (X_aX_{ba}) = (X_aX_{\alpha\beta}) = (X_\alpha X_{ab}) = (X_\alpha X_{a\beta}) = (X_\alpha X_{\beta\gamma}) =$$
$$(Y_iY_j) = (X_1X_{ij}) = (X_{ab}X_{cd}) = (X_{ab}X_{c\alpha}) = (X_{ab}X_{\alpha\beta}) = (X_{a\alpha}X_{\beta\gamma}) =$$
$$= (X_{\alpha\beta}X_{\gamma\delta}) = (X_{ij}Y_k) = 0,$$
$$(a \neq b \neq c \neq d = 2, \ldots, p;\quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta = p+1, \ldots, n;\quad i \neq j \neq$$
$$\neq k = 2, \ldots, n).$$

Avem deci

TEOREMA 3. *Spațiul V_n cu metrica nedefinită și curbura constantă negativă (11) are ca grup de mișcări grupul definit de operatorii (18) și cu structura (19).*

Să considerăm acum spațiul V_n cu metrica nedefinită și curbura nulă. Metrica acestui spațiu este metrica (9) cu $K = 0$, adică

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^p)^2 - (dx^{p+1})^2 - \ldots - (dx^n)^2. \tag{9'}$$

Înlocuind coeficienții acestei metrici în ecuațiile lui Killing obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} = 0, && (i = 1, \ldots, n),\\ &\frac{\partial \xi^a}{\partial x^b} + \frac{\partial \xi^b}{\partial x^a} = 0, && (a, b, = 1, \ldots, p),\\ &\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} = 0, && (\alpha, \beta = p+1, \ldots, n),\\ &\frac{\partial \xi^a}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^a} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Rezolvînd acest sistem obținem

$$\begin{aligned}
&\xi^1 = a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n + a^1,\\
&\xi^2 = a_2^1 x^1 + a_3^2 x^3 + \ldots + a_n^2 x^n + a^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi^p = -a_p^1 x^1 - a_p^2 x^2 - \ldots - a_p^{p-1} x^{p-1} + a_{p+1}^p x^{p+1} + \ldots + a_n^p x^n + a^p,\\
&\xi^{p+1} = a_{p+1}^1 x^1 + \ldots + a_{p+1}^p x^p + a_{p+2}^{p+1} x^{p+2} + \ldots + a_n^{p+1} x^n + a^{p+1},\\
&\xi^{p+2} = a_{p+2}^1 x^1 + \ldots + a_{p+2}^p x^2 - a_{p+2}^{p+1} x^{p+1} + a_{p+3}^{p+2} x^{p+3} + \ldots + a_n^{p+2} x^n + a^{p+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi^n = a_n^1 x^1 + \ldots + a_n^p x^p - a_n^{p+1} x^{p+1} - \ldots - a_n^{n-1} x^{n-1} + a^n.
\end{aligned}$$

Operatorii grupului de mișcări al spațiului (9') sînt deci

$$\left.\begin{aligned} X_{ab} f &= x^b \frac{\partial f}{\partial x^a} - x^a \frac{\partial f}{\partial x^b}, && (a < b = 1, \ldots, p),\\ X_{\alpha\beta} f &= x^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\beta}, && (\alpha < \beta = p+1, \ldots, n)\\ X_{a\alpha} f &= x^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^a} + x^a \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}, \\ Y_i f &= \frac{\partial f}{\partial x^i}, && (i = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

avînd structura

$$(X_{ab}Y_a) = Y_b,\ (X_{ab}X_{ac}) = X_{bc},\ (X_{ab}X_{a\alpha}) = X_{b\alpha},(X_{a\alpha}Y_a) = -Y_\alpha,$$
$$(X_{a\alpha}Y_\alpha) = -Y_a,\ (X_{a\alpha}X_{\alpha\beta}) = X_{\alpha\beta},\ (X_{a\alpha}X_{b\alpha}) = -X_{ab},\ (X_{a\alpha}X_{\alpha\beta}) = -X_{\alpha\beta}, \tag{22}$$
$$(X_{\alpha\beta}X_{\alpha\gamma}) - X_{\beta\gamma},\ (X_{\alpha\beta}Y_\alpha) = Y_\beta,$$
$$(a \neq b \neq c = 1,\ldots, p;\ \alpha \neq \beta \neq \gamma = p+1,\ldots, n),$$

parantezele nescrise fiind nule.

Avem deci

TEOREMA 4. *Grupul de mişcări al spaţiului V_n cu metrica nedefinită şi curbura nulă (9') este definit de operatorii (21), avînd structura (22).*

III

Vom determina acum ecuaţiile finite ale grupurilor de mişcări ale spaţiilor V_3 cu metrica nedefinită şi curbura constantă nenulă.

Să considerăm deci spaţiul V_3 cu metrica nedefinită şi curbura constantă pozitivă a cărui metrică este

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{K(x^3)^2}, \qquad (K>0). \tag{23}$$

Grupul lui de mişcări este definit de operatorii

$$X_1 f = [(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^1x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^1x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_2 f = 2x^1x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]\frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^2x^3\frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_3 f = x^i\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad X_4 f = x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_5 f = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad X_6 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Integrînd sistemul diferenţial ataşat, obţinem ecuaţiile finite ale grupului

$$x'^1 = \frac{a_3(\cos a_4 x^1 - \sin a_4 x^2) - a_1 a_3^2[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]}{(a_1^2+a_2^2)[(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2] - 2a_3(a_1\cos a_4 + a_2\sin a_4)x^1 + 2a_3(a_1\sin a_4 - a_2\cos a_4)x^2 + 1} + a_5,$$

$$x'^2 = \frac{a_3(\sin a_4 \cdot x^1 + \cos a_4 \cdot x^2) - a_2 a_3^2[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]}{(a_1^2+a_2^2)[(x^1)^2+(x^2)^2-(x^3)^2] - 2a_3(a_1\cos a_4 + a_2\sin a_4)x^1 + 2a_3(\sin a_4 - a_2\cos a_4)x^2 + 1} + a_6,$$

$$x'^3 = \frac{a_3 x^3}{(a_1^2+a_2^2)[(x^1)^2+(x^2)-(x^3)] - 2a_3(a_1\cos a_4 + a_2\sin a_4)x^1 + 2a_3(a_1\sin a_4 - a_2\cos a_4)x^2 + 1}. \tag{24}$$

În cazul spațiului V_3 cu metrica nedefinită și curbura constantă negativă, a cărui metrică este

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{-K(x^1)^2}, \qquad (K<0), \tag{23'}$$

operatorii grupului de mișcări sînt

$$X_1 f = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_2 f = 2x^1x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + [-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2x^2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_3 f = 2x^1x^3 \frac{\partial f}{\partial x^1} + 2x^2x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} + [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

$$X_4 f = x^3 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \quad X_5 f = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad X_6 f = \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

Integrînd sistemul diferențial atașat, obținem ecuațiile finite ale grupului

$$x'^1 = \frac{a_1 x^1}{a_1^2(a_2^2 - a_3^2)[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2] - 2a_1(a_2 \operatorname{ch} a_4 + a_3 \operatorname{sh} a_4)x^2 - 2a_1(a_2 \operatorname{sh} a_4 + a_3 \operatorname{ch} a_4)x^3 + 1},$$

$$x'^2 = \frac{a_1(\operatorname{ch} a_4 \cdot x^2 + \operatorname{sh} a_4 \cdot x^3) - a_1^2 a_2 [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]}{a_1^2(a_2^2 - a_3^2)[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2][-2a_1(a_2 \operatorname{ch} a_4 + a_3 \operatorname{sh} a_4)x^2 - 2a_1(a_2 \operatorname{sh} a_4 + a_3 \operatorname{ch} a_4)x^3 + 1} + a_5,$$

$$x'^3 = \frac{a_1(\operatorname{ch} a_4 \cdot x^2 + \operatorname{sh} a_4 \cdot x^3) + a_1^2 a_3 [(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2]}{a_1^2(a_2^2 - a_3^2)[(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2] - 2a_1(a_2 \operatorname{ch} a_4 + a_3 \operatorname{sh} a_4)x^2 - 2a_1(a_2 \operatorname{sh} a_4 + a_3 \operatorname{ch} a_4)x^3 + 1} + a_6, \tag{24'}$$

Avem deci

TEOREMA 5. *Spațiile V_3 cu metrica nedefinită și curbura constantă (23) și (23') au ca grupuri de mișcări grupurile (24) respectiv (24').*

Primită la redacție la 20 mai 1963

О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ МЕТРИКИ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ

РЕЗЮМЕ

Исходя из требования, чтобы риманово пространство с неопределенной метрикой имело постоянную кривизну, написанную по отношению к псевдоортогональной системе конгруенций [5], автор получает

формулу (9). Он получает также для пространств положительной и, соответственно, отрицательной кривизны формулы, аналогичные формуле Бельтрами для метрики пространства с V_n неопределенной метрикой с отрицательной кривизной.

Во второй части работы автор определяет группы движений римановых пространств с неопределенной метрикой с постоянной кривизной.

В третьей части определены конечные уравнения групп движений пространств V_3 с неопределенной метрикой и постоянной кривизной.

SUR LES ESPACES RIEMANNIENS À MÉTRIQUE INDÉFINIE À COURBURE CONSTANTE

RÉSUMÉ

En partant de la condition que la courbure d'un espace riemannien à métrique indéfinie doit être constante, exprimée par rapport au système de congruences pseudo-orthogonales [5], l'auteur obtient la formule (9). En outre, il obtient, pour les espaces à courbure positive, respectivement négative, des formules analogues à la formule de Beltrami pour la métrique d'un espace V_n à métrique définie, à courbure négative.

Dans la seconde partie du travail, l'auteur détermine les groupes de mouvements des espaces riemanniens à métrique indéfinie, à courbure constante.

Dans la troisième partie, il établit les équations finies des groupes de mouvements des espaces V_3 à métrique indéfinie et à courbure constante.

BIBLIOGRAFIE

1. EISENHART L. P., *Riemannian Geometry*. Princeton Univ. Press, 1960.
2. KAGAN V. F., *Über eine Erweiterung des Begriffes von projektiven Räumen und dem zugehörigen Absolut*. Trudî seminar po vektorn i tenzorn analizu, I (1933).
3. SCHUR F., *Über Räume Konstanter Krümmungsmasse*, Math. Annalen, **26** (1886).
4. VRĂNCEANU G., *Leçons de Géométrie Différentielle*. vol. I, Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957.
5. VRĂNCEANU G., *Congruenze pseudoortogonale in uno spazio di Riemann*, Conferenze Bari, 1962.

O EXTINDERE A METODEI LUI GAUSS DE CALCUL AL INTEGRALELOR IMPROPRII

DE

ION ZAMFIRESCU

INTRODUCERE

Metoda lui Gauss generalizată se foloseşte pentru calculul aproximativ al integralelor definite de tipul

$$\mathcal{J} = \int_a^b \rho(x) f(x)\, dx, \tag{1}$$

unde $\rho(x)$ este o funcţie integrabilă pozitivă definită pe intervalul $[a\ b]$ iar $f(x)$ o funcţie continuă ce se poate aproxima suficient de bine printr-un polinom. Funcţia $\rho(x)$ poate să aibă singularităţi în intervalul $[a, b]$ fără să fie alterată convergenţa integralei (1). Metoda constă în a adopta ca valoare aproximativă pentru integrala $\mathcal{J}$ o expresie de forma

$$I = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \ldots + H_n f(x_n); \tag{2}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$; $H_0, H_1, \ldots, H_n$ sînt aleşi astfel încît $I = \mathcal{J}$ dacă $f(x)$ este un polinom arbitrar de grad cît mai mare posibil.

Pentru a obţine acest lucru [1] trebuie să luăm

$$H_i = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \rho(x) \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i}\, dx, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

unde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $P_{n+1}(x)$ de grad $n + 1$ aparţinînd şirului de polinoame

$$P_0, P_1(x), \ldots, P_n(x) \ldots \tag{4}$$

de grade respectiv 0, 1, 2, ..., n, ... ortogonale în raport cu ponderea $\rho(x)$ şi cu intervalul $[a, b]$.

Alegînd în acest mod valorile $x_0, x_1, \ldots, x_n$; $H_0, H_1, \ldots, H_n$, relația (2) furnizează valoarea exactă a integralei (1) pentru orice polinom de grad mai mic sau egal cu $2n + 1$.

Se demonstrează [2] că toate rădăcinile fiecărui polinom $P_n(x)$ ce aparține șirului (4) sînt reale distincte și cuprinse în intervalul $[a, b]$.

În cele ce urmează vom extinde rezultatele (teorema 1) pentru o pondere (cu valori în planul complex) de forma $\rho(x, z)$, unde $x \in [a, b]$, $z \in D$ (D domeniu în planul complex).

În relația (18) este evaluată eroarea făcută folosind metoda extinsă.

Pentru determinarea efectivă a coeficienților lui Gauss se folosesc relațiile de recurență (14) care permit calculul mărimilor $x_0, \ldots, x_n$; $H_0, \ldots, H_n$ cînd se cunosc numai momentele funcției $\rho(x)$.

În ultima parte este descris modul de calcul al integralelor ce intervin în determinarea coeficienților Fourier (aplicația 1), a integralei din formula Euler Mac-Laurent (aplicația 2) și a integralei ce intervine în reprezentarea integrală a funcției $\zeta(z)$ a lui Riemann.

În anexă sînt date polinoamele ortogonale și coeficienții lui Gauss relativ la ponderile $\rho(x) = 1 - \sin mx$, $\rho(x) = 1 - \cos mx$, $m = 1, 1024$, $\rho(x) = -\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\right]$.

Calculul polinoamelor ortogonale și al coeficienților Gauss au fost efectuate la calculatorul C.I.F.A.-4.

CALCULUL COEFICIENȚILOR H_i

Fie $C(a, b)$ spațiul liniar al funcțiilor continue definite pe intervalul $[a, b]$ cu valori pe dreapta reală.

Notăm cu $< f, g >$ produsul scalar definit pe $C(a, b)$ de relația

$$< f, g > = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \, dx, \tag{5}$$

unde $\rho(x)$ este o funcție (pondere) pozitivă definită pe $[a, b]$ integrabilă de masă totală 1 $\{\int_a^b \rho(x) \, dx = 1\}$.

Fie

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n \ldots \tag{6}$$

șirul de polinoame ortogonale în raport cu ponderea $\rho(x)$ și cu intervavalul $[a, b]$.

Avem

$$< x P_n, P_k > = < P_n, x P_k > = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n - 2,$$

deoarece grad $xP_k = k + 1 < n - 1$ iar P_n este ortogonal pe orice combinație liniară a polinoamelor $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ deci pe orice polinom de

grad $\leqslant n-1$; P_{n+1} aparține subspațiului generat de polinoamele xP_n, P_n, P_{n-1}

$$P_{n+1} = xP_n - \alpha P_n - \beta P_{n-1}. \tag{7}$$

Din relațiile de ortogonalitate $< P_{n+1}, P_n > = 0$, $< P_{n+1}, P_{n-1} > = 0$ rezultă

$$\alpha = \frac{< xP_n, P_n >}{< P_n, P_n >}, \quad \beta = \frac{< xP_n, P_{n-1} >}{< P_{n-1}, P_{n-1} >}. \tag{8}$$

Din (7) rezultă egalitatea coeficienților termenilor de grad cel mai înalt ai polinoamelor $P_0, P_1, \ldots, P_n \ldots$ Luînd $P_0 = \int_a^b \rho(x)\,dx = 1$ șirul (6) va fi normat în sensul că coeficienții termenilor de grad maxim sînt toți egali cu 1.

Cum

$$P_n = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + Q_{n-2},$$

$$P_{n-1} = x^{n-1} + R_{n-2},$$

(Q_{n-2}, R_{n-2} polinoame de grad $n-2$) rezultă

$$< P_n, P_n > = < x^n + Q_{n-1}, P_n > = < x^n, P_n >,$$

$$< xP_n, P_{n-1} > = < P_n, xP_{n-1} > = < P_n, x^n + xR_{n-2} > = < x^n, P_n >, \tag{9}$$

$$< xP_n, P_n > = < P_n, x^{n+1} + a_{n-1} x^n + x Q_{n-2} > = < x^{n+1}, P_n > +$$

$$+ a_{n-1} < x^n, P_n >.$$

Deoarece sînt adevărate relațiile

$$< Q_{n-1}, P_n > = 0, \text{ grad } Q_{n-1} = \text{grad } (a_{n-1} x^{n-1} + Q_{n-2}) = n-1,$$

$$< P_n, xR_{n-2} > = 0, < P_n, xQ_{n-2} > = 0, \text{ grad } xR_{n-2} = \text{grad } xQ_{n-2} = n-1.$$

Ținînd seama de relațiile (9) formulele (8) devin

$$\alpha = \frac{\varpi_n}{\omega_n} + a_{n-1}, \quad \beta = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}, \tag{10}$$

unde $\omega_n = < x^n, P_n >$, $\varpi_n = < x^{n+1}, P_n >$ iar a_{n-1} este coeficientul termenului de grad $n-1$ din P_n.

Pentru calculul coeficienților H_i

$$H_i = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i)} \int_a^b \rho(x) \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i}\,dx = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i)} \left\langle \frac{1}{x - x_i}, P_{n+1} \right\rangle, \tag{11}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

folosim egalitatea

$$\left\langle P_{n+1}, \frac{P_n - P_n(x_i)}{x - x_i} \right\rangle = \left\langle \frac{P_{n+1}}{x - x_i}, P_n \right\rangle - P_n(x_i) \left\langle \frac{1}{x - x_i}, P_{n+1} \right\rangle.$$

Cum

$$\left\langle P_{n+1}, \frac{P_n - P_n(x_i)}{x - x_i} \right\rangle = < P_{n+1}, Q_{n-1} > = 0,$$

deoarece grad $\left\{ Q_{n-1} = \frac{P_n(x) - P_n(x_i)}{x - x_i} \right\} = n - 1$, folosind relația (11) rezultă

$$H_i = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i)\, P_n(x_i)} \left\langle \frac{P_{n+1}}{x - x_i}, P_n \right\rangle . \tag{12}$$

Dar $\frac{P_{n+1}(x)}{x - x_i} = x^n + \bar{Q}_{n-1}(x)$, deci

$$\left\langle \frac{P_{n+1}}{x - x_i}, P_n \right\rangle = < x^n + \bar{Q}_{n-1}, P_n > = < x^n, P_n > = \omega_n .$$

Înlocuind în (12) obținem

$$H_i = \frac{\omega_n}{P'_{n+1}(x_i)\, P_n(x_i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Fie

$$M_k = \int_a^b x^k \rho(x)\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

momentele funcției $\rho(x)$.

Alegem drept polinoame inițiale pentru șirul (6) $P_{-1} = 0$ (polinomul identic nul), $P_0 = 1$, $\omega_{-1} = 1$ (alegerea lui ω_{-1} este arbitrară) și $\omega_0 = < x^0, P_0 > = < 1, 1 > = 1$.

Calculul polinoamelor ortogonale în raport cu ponderea $\rho(x)$ și cu intervalul $[a, b]$ se efectuează deci cu ajutorul următoarelor relații de recurență :

$$\varpi_n = < x^{n+1}, P_n > = \sum_{j=0}^{n} a_j M_{n+j+1} ,$$

$$\omega_n = \sum_{j=0}^{n} a_j M_{n+j} ,$$

$$\alpha = \frac{\varpi_n}{\omega_n} + a_{n-1} ,$$

$$\beta = \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} , \tag{14}$$

$$P_{n+1} = (x - \alpha) P_n - \beta P_{n-1} ,$$

$$H_i = \frac{\omega_n}{P'_{n+1}(x_i)\, P_n(x_i)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

unde $P_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ este polinomul de grad n din şirul (6) iar x_i rădăcinile polinomului $P_{n+1}(x)$.

CAZUL CÎND $\rho(x)$ IA VALORI ÎN PLANUL COMPLEX

Fie $\rho(z, x)$ o funcţie definită pentru orice $x \in [a, b]$, $z \in D$ (D domeniu în planul complex) cu valori în planul complex K.

Să impunem funcţiei $\rho(z, x)$ următoarele proprietăţi:

1. $\rho(z, x)$ analitică în z pentru orice $x \in [a, b]$;

2. $\rho(z, x)$ integrabilă în x cu $\int_a^b \rho(z, x)\,dx = 1$ pentru $z \in D$ (punct de olomorfie) şi de pătrat sumabil $\int_a^b |\rho(z, x)|^2\,dx < \infty$;[1]

3. $\rho(z, x) > 0$ pentru $x \in [a, b]$, $z \in \Delta \subset D$ (Δ o submulţime a lui D ce are cel puţin un punct de acumulare în D);

4. $\rho'_z(x, z)$ există şi este continuă în raport cu ansamblul variabilelor în D în vecinătatea oricărui punct de olomorfie.

Din proprietăţile de mai sus rezultă $M_k(z) = \int_a^b x^n \rho(z, x)\,dx$, $\omega_n(z)$, $\varpi_n(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$, definite de relaţiile (14), funcţii analitice de z.

Se arată imediat analiticitatea coeficienţilor şirului de polinoame (15) ca funcţii de z, şir obţinut folosind relaţiile de recurenţă (14)

$$P_0, P_1(z, x), \quad P_2(z, x), \ldots, P_n(z, x). \tag{15}$$

Aceste polioame le vom numi polinoame ortogonale în raport cu ponderea $\rho(x, z)$ şi cu intervalul $[a, b]$.

Deoarece coeficienţii lui $P_{n+1}(z, x)$ sînt funcţii analitice de z, rezultă $x_i(z)$, $H_i(z)$ $(i = 0, \ldots, n)$ funcţii analitice de variabila complexă z.

Vom numi $H_i(z)$ $(i = 0, \ldots, n)$ coeficienţii lui Gauss ataşaţi ponderii $\rho(x, z)$.

TEOREMĂ. *Dacă $R(x)$ este un polinom arbitrar de variabila reală $x \in [a, b]$ cu coeficienţii reali sau complecşi avem*

$$\int_a^b \rho(z, x) R(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} H_i(z) . R[x_i(z)] \tag{16}$$

pentru orice polinom $R(x)$ de grad $\leqslant 2n + 1$.

Demonstraţie. Dacă $z \in \Delta$ avem $\rho(x, z) > 0$.

Rezultă deci valabilitatea relaţiei (16) pentru orice $z \in \Delta$.

Deoarece ambii membri ai egalităţii (16) sînt funcţii analitice de z şi coincid pe Δ în virtutea principiului identităţii vor coincide pe întreg domeniul D.

---

1) Ultima condiţie intervine numai la evaluarea erorii.

De aici rezultă că putem lua ca valoare aproximativă pentru integrala $\int_a^b f(x)\ \rho(x, z)\ dx$ a unei funcții $f(x)$ analitică, definită pe planul complex K,

$$\int_a^b f(x)\ \rho(x, z)\ dx \approx \sum_{i=0}^{n} H_i(z) f(x_i(z)). \tag{17}$$

Formula (17) rămîne aplicabilă și în cazul funcțiilor al căror domeniu de definiție Ω conține rădăcinile $x_i(z)$ $(i = 0, \ldots, n)$ iar $f(z)$ este suficient de bine aproximabilă prin polinoame pe Ω.

EVALUAREA ERORII FOLOSIND RELAȚIA (17)

Să notăm cu $T_{2n+1}(x)$ polinomul de grad $2n+1$ ce aproximează cel mai bine {în sensul $\sup_{x\in\Omega} |T_{2n+1}(x) - f(x)| = \varepsilon_n$ minim} funcția $f(x)$ pe domeniul de definiție.

Avem $|T_{2n+1}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_n$ pentru orice $x \in \Omega$.

Din relația

$$\int_a^b \rho(x, z) f(x)\, dx - \sum_{i=0}^{n} H_i(z) f(x_i(z)) = \int_a^b \rho(x, z) f(x)\, dx -$$

$$- \int_a^b \rho(x, z)\ T_{2n+1}(x)\, dx + \sum_0^n H_i(z)\ T_{2n+1}(x_i(z)) - \sum_0^n H_i f(x_i(z)).$$

Rezultă

$$\left| \int_a^b \rho(x, z) f(x) - \sum_0^n H_i f(x_i(z)) \right| \leqslant \left| \int_a^b \rho(x, z)\,(f(x) - T_{2n+1}(x))\, dx \right| +$$

$$+ \left| \sum_0^n H_i\,[T_{2n+1}(x_i(z)) - f(x_i(z))] \right| \leqslant \left\{ \int_a^b \left| \rho(x, z) \right|^2 dx \int_a^b \left| f(x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - T_{2n+1}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2} + \sum |H_i|\ |T_{2n+1}(x_i(z)) - f(x_i(z))|.$$

Avem deci

$$\left| \int_a^b \rho(x, z) f(x) - \sum_0^n H_i f(x_i(z)) \right| \leqslant \varepsilon_n \sqrt{(b-a) I} + H\ \varepsilon_n, \tag{18}$$

unde

$$I = \int_a^b |\ \rho(x, z)\ |^2\, dx, \quad H = \sum_0^n |\ H_i\ |\ (|\ H_i\ | \text{ modulul lui } H_i)$$

și ε_n este eroarea minimă cu care poate fi aproximată funcția $f(x)$ de un polinom de grad $2n+1$ pe Ω.

CAZURI PARTICULARE

I. Să presupunem că funcția $\rho(x)$ definită pe $[a, b]$ cu valori pe dreapta reală este integrabilă și are proprietatea $\inf_{x\in[a,b]} \rho(x) > -\infty$.

Să notăm cu $m = \inf_{x\in[a,b]} \rho(x)$, $\bar{\rho}(x) = \rho(x) - m$. Evident $\bar{\rho}(x) \geqslant 0$.

Dacă $\bar{H}_i$, $\bar{x}_i$ $(i=0, 1,\ldots,n)$ sînt coeficienții lui Gauss respectiv rădăcinile polinomului P_{n+1} relativ la ponderea $\bar{\rho}(x)$ și la intervalul $[a,b]$ iar H_i^L, x_i^L sînt coeficienții lui Gauss și rădăcinile polinomului Legendre relativ la ponderea $\rho(x) = 1$ și la intervalul $[a, b]$ obținem

$$\int_a^b \rho(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \bar{\rho}(x) f(x)\,\mathrm{d}x + m\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n} \bar{H}_i f(\bar{x}_i) + m H_i^L f(x_i^L). \tag{19}$$

Relația (19) permite calculul aproximativ al integralelor de forma $\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, unde ponderea $\rho(x)$ are proprietatea $\inf_{x\in[a,b]} \rho(x) > -\infty$ iar $f(x)$ este suficient de bine aproximabilă prin polinoame.

II. Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[a, b]$ de clasă C^1 iar $\rho(x)$ o funcție integrabilă pe $[a, b]$.

Să notăm cu $\bar{\rho}(x) = \int_a^x \rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi - m$, unde

$$m = \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x \rho(\xi)\,\mathrm{d}\xi > -\infty \text{ (deoarece } \int_a^x \rho(\xi)\mathrm{d}\xi \text{ este continuă).}$$

Din egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,\rho(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\bar{\rho}(x) = [f(x)\bar{\rho}(x)]_a^b -$$

$$-\int_a^b f'(x)\bar{\rho}(x)\mathrm{d}x = f(b)\bar{\rho}(b) - f(a)\bar{\rho}(a) - \int_a^b f'(x)\,\bar{\rho}(x)\,\mathrm{d}x$$

obținem

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \approx f(b)\bar{\rho}(b) - f(a)\,\bar{\rho}(a) - \sum_0^n \bar{H}_i f'(\bar{x}_i), \tag{20}$$

unde $\bar{H}_i, \bar{x}_i$ $(i = 0,\ldots,n)$ sînt coeficienții lui Gauss respectiv rădăcinile lui $P_{n+1}(x)$ relativ la ponderea $\bar{\rho}(x)$.

Aplicații

1. CALCULUL COEFICIENȚILOR FOURIER

Calculul integralelor

$$a_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,\mathrm{d}x,\quad b_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin m\,x\,\mathrm{d}x$$

devine imposibil de efectuat prin metodele cunoscute [6] în cazul unor valori foarte mari ale lui m.

Pentru funcțiile $f(x)$, aproximabile suficient de bine prin polinoame, acest lucru se poate realiza în modul următor:

Deoarece $\sup\limits_{x\in(0,2\pi)} \cos m\,x = \sup\limits_{x\in(0,2\pi)} \sin m\,x = +1$ rezultă $1-\cos m\,x \geqslant 0$, $1-\sin m\,x \geqslant 0$, pentru $x\in(0,2\pi)$, deci

$$a_m = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,(1-\cos mx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$b_m = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,(1-\sin m\,x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

de unde, aplicînd formula (2),

$$\begin{aligned} a_m &\approx \sum_{i=0}^{n} - H_i^c f(x_i^c) + \frac{1}{2\pi} H_i^L f(x_i^L), \\ b_m &\approx \sum_{i=0}^{n} - H_i^s f(x_i^s) + \frac{1}{2\pi} H_i^L f(x_i^L), \end{aligned} \tag{21}$$

H_i^c, x_i^c fiind rădăcinile și coeficienții relativi la ponderea

$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}(1-\cos mx)$, H_i^s, x_i^s atașați la ponderea

$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}(1-\sin mx)$ iar H_i^L, x_i^L pentru $\rho(x) = 1$.

În cazul cînd funcția $f(x)$ este de clasă C^1 aplicînd formulele (20) se obține

$$\begin{aligned} a_m &\approx \frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi m} + \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} H_i^s f'(x_i^s), \\ b_m &\approx -\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} H_i^c f'(x_i^c). \end{aligned} \tag{22}$$

În anexă sînt date polinoamele ortogonale și coeficienții lui Gauss pentru ponderile $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}(1 - \sin mx)$, $\rho(x) = \frac{1}{2\pi}(1 - \cos mx)$ pentru $m = 1$, $m = 1024$.

Exemplu. Pentru calculul integralei

$$b_{1024} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{x}{2}} \sin 1024x \, dx$$

aplicînd formula (22) se obține

$$b_{1024} \approx -\frac{1}{1024}\sum_{i=0}^{n} H_i^c f'(x_i^c).$$

Rezultatele obținute sînt:

n	I_{calculat}	I_{exact}	$I_{\text{exact}} - I_{\text{calculat}}$
0	0,000101552	0,000148708	0,000047156
1	0,000146186	„	0,000002522
2	0,000148644	„	0,000000064
3	0,000148706	„	0,000000002

2. CALCULUL SUMELOR $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Folosim formula lui Euler-Mac Laurent [5]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} f(m) - F(n) = f(1) - F(1) + \mathcal{J},$$

unde

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi, \quad \mathcal{J} = \int_1^{\infty} f'(\xi)\,[\xi - [\xi]]\,d\xi.$$

([ξ] partea întreagă a lui ξ).

Rezultă necesitatea de a calcula integrale de forma

$$\mathcal{J} = \int_1^{\infty} f(x)\,\{x - [x]\}\,dx.$$

Punînd $y = 1/x$ se obține

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y^2}\left\{\frac{1}{y} - \left[\frac{1}{y}\right]\right\}dy.$$

Dacă H_i^*, y_i^* sînt coeficienții lui Gauss atașați ponderei

$$\rho(y) = \frac{1}{y} - \left[\frac{1}{y}\right], \quad a = 0, \; b = 1, \text{ obținem}$$

$$\mathcal{J} \approx \sum_{i=0}^{n} H_i^* f\left(\frac{1}{y_i^*}\right) \cdot \frac{1}{y_i^{*2}} = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{H}_i f(x_i),$$

unde

$$\mathcal{H}_i = \frac{H_i^*}{y_i^{*2}}, \qquad x_i = 1/y_i^* \; (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Valorile lui H_i^*, y_i^*, $\mathcal{H}_i$, x_i sînt date în tabela 5 din anexă.

Exemplu. Aplicînd considerațiile precedente la calculul sumei $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ se obține :

n	I_{calculat}	I_{exact}	$I_{\text{exact}} - I_{\text{calculat}}$
0	0,473882	0,581976	0,108094
1	0,604648	„	−0,022672
2	0,583219	„	−0,001243
3	0,578427	„	+0,003549

3. CALCULUL FUNCȚIEI $\zeta(Z)$

Folosind egalitatea [5]

$$(1-2^{1-z})\ \Gamma(z)\,\zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x + 1}\,dx$$

obținem

$$(1 - 2^{1-z})\ \Gamma(z)\,\zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-x} + 1}\, x^{z-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Alegînd drept pondere $\rho(z, x) = x^{z-1}\, e^{-x}$, $a = 0$, $b = +\infty$ și folosind considerațiile de mai sus $\{\rho(x, z) > 0$ pentru z real $> 1\}$ rezultă

$$(1 - 2^{1-z})\ \Gamma(z)\ \zeta(z) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{H_i}{e^{-x_i} + 1}, \tag{23}$$

unde x_i $(i = 0, \ldots, n)$ sînt rădăcinile polinomului Laguerre generalizat de grad $n + 1$ iar H_i coeficienții lui Gauss dați de relația [1]

$$H_i = \frac{n!\ \Gamma(n + z)}{(n + 1)\ (n + z)} \frac{x_i}{[\mathcal{L}_n(x_i)]^2} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Pentru $n = 1$

$$H_i = \frac{\Gamma(z)}{2} \frac{x_i}{[\mathcal{L}_1(x_i)]^2} \frac{z}{1+z} \quad (i = 0, 1).$$

Înlocuind în (23) obținem

$$\zeta(z) \approx \frac{1/2}{1-2^{1-z}} \frac{z}{1+z} \left\{ \frac{x_0}{(e^{-x_0}+1)(\mathcal{L}_1(x_0))^2} + \frac{x_1}{(e^{-x_1}+1)(\mathcal{L}_1(x_1))^2} \right\},$$

unde x_0, x_1 sînt rădăcinile polinomului $\mathcal{L}_2(x) = x^2 - 2(1+z)x + z(z+1)$.

Dacă de exemplu $z = 1/2$ se obține

$$\zeta(1/2) \approx \frac{0{,}602}{1-\sqrt{2}} \text{ față de } \zeta(1/2) = \frac{0{,}604\ldots}{1-\sqrt{2}}.$$

CONCLUZII

Metoda Gauss constituie un mijloc eficace pentru calculul integralelor de tipul (1) în cazul cînd funcția $f(x)$ este aproximabilă suficient de bine prin polinoame.

Din cele expuse în prezentul articol rezultă importanța unor tabele de coeficienți x_i, H_i care să permită calculul diferitelor integrale ce apar în mod curent în aplicații.

Este necesară alcătuirea de tabele de coeficienți care să folosească la calculul coeficienților Fourier pînă la un rang suficient de mare la calculul coeficienților dezvoltării unei funcții în serie de funcțiile Bessel, la calculul transformatei Laplace inversă a unei funcții etc.

Folosirea relațiilor de recurență (14) ce permit determinarea coeficienților x_i, H_i, problema preciziei cu care se obțin acești coeficienți și modul lor de calcul folosind un calculator electronic vor face subiectul unei lucrări viitoare.

ANEXĂ

Polinoamele ortogonale și coeficienții lui Gauss în raport cu ponderea $\rho(x) = 1 - \sin x$.

$P_0 = 1,$

$P_1 = x - 4{,}14159,$

$P_2 = x^2 - 6{,}53636\,x + 7{,}62828,$

$P_3 = x^3 - 9{,}81646\,x^2 + 25{,}35101\,x - 9{,}62654,$

$P_4 = x^4 - 13{,}45590\,x^3 + 59{,}36000\,x^2 - 90{,}66483\,x + 21{,}93429.$

Tabela 1

x_i	H_i
$n = 0$	
4,14149	1
$n = 1$	
1,52098	0,250054
5,01538	0,749946
$n = 2$	
0,45676	0,103149
3,77151	0,504929
5,58819	0,391921
$n = 3$	
0,29527	0,083355
2,83598	0,189518
4,48702	0,492508
5,83762	0,234618

$\varrho(x) = 1 - \sin 1024\ x,$
$P_0 = 1,$
$P_1 = x - 3{,}14257,$
$P_2 = x^2 - 6{,}28514\ x + 6{,}58587,$
$P_3 = x^3 - 9{,}42765\ x^2 + 23{,}70509\ x - 12{,}42523,$
$P_4 = x^4 - 12{,}56980\ x^3 + 50{,}78996\ x^2 - 70{,}95730\ x + 22{,}32581.$

Tabela 2

x_i	H_i
$n = 0$	
3,142569	1
$n = 1$	
1,328770	0,500 000
4,965368	0,500 000

Tabela 2 (continuare)

$n = 2$	
0,709086	0,277773
3,142529	0,444446
5,576027	0,277781
$n = 3$	
0,437127	0,173895
2,074271	0,326075
4,210519	0,326091
5,847879	0,173939

$\varrho(x) = 1 - \cos x$,
$P_0 = 1$,
$P_1 = x - 3{,}14159$,
$P_2 = x^2 - 6{,}28318\, x + 8{,}57973$,
$P_3 = x^3 - 9{,}42477\, x^2 + 25{,}50508\, x - 21{,}25563$,
$P_4 = x^4 - 12{,}56631\, x^3 + 54{,}05579\, x^2 - 91{,}59443\, x + 49{,}12232$.

Tabela 3

x_i	H_i
$n = 0$	
3,141593	1
$n = 1$	
2,005869	0,500 000
4,277316	0,500000
$n = 2$	
1,379853	0,207793
3,141592	0,584413
4,903333	0,207793
$n = 3$	
1,001012	0,088767
2,380521	0,411225
3,902623	0,411233
5,282150	0,088773

$\rho(x) = 1 - \cos 1024\, x,$

$P_0 = 1,$

$P_1 = x - 3{,}14159,$

$P_2 = x^2 - 6{,}28321\, x + 6{,}57982,$

$P_3 = x^3 - 9{,}42499\, x^2 + 23{,}68851\, x - 12{,}40441,$

$P_4 = x^4 - 12{,}56738\, x^3 + 50{,}76829\, x^2 - 70{,}90103\, x + 22{,}28496.$

Tabela 4

x_i	H_i
$n = 0$	
3,141593	1
$n = 1$	
1,327808	0,500003
4,955401	0,499997
$n = 2$	
0,708207	0,277799
3,141697	0,444433
5,575085	0,277768
$n = 3$	
0,436523	0,174002
2,073953	0,326056
4,209922	0,326035
5,846984	0,173906

$$\frac{1}{M_0}\,\rho(y) = \frac{1}{y} - \left[\frac{1}{y}\right],$$

$P_0 = 1,$ $M_0 = 0{,}422784335,$

$P_1 = x - 0{,}419914,$

$P_2 = x^2 - 0{,}849923\, x + 0{,}121989,$

$P_3 = x^3 - 1{,}347002\, x^2 + 0{,}488145\, x - 0{,}036988,$

$P_4 = x^4 - 1{,}829669\, x^3 + 1{,}072887\, x^2 - 0{,}217004\, x + 0{,}009873.$

Tabela 5

y_i^*	H_i^*	$x_i = 1/y_i^*$	$\mathcal{H}_i$
	$n = 0$		
0,419914	1	2,381440	6,70232
	$n = 1$		
0,182880	0,510426	5,46807	15,26163
0,667043	0,489574	1,49915	1,10029
	$n = 2$		
0,102614	0,299326	9,74526	28,42702
0,458880	0,493486	2,17922	2,34356
0,785509	0,207188	1,27306	0,33578
	$n = 3$		
0,063180	0,187099	15,82779	46,87180
0,299248	0,346827	3,34171	3,87302
0,607179	0,381784	1,64696	1,03558
0,860062	0,084289	1,16271	0,11395

Primită la redacţie la 15 aprilie 1963

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ГАУССА ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕРГАЛОВ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе дается обобщение метода вычисления несобственных интегралов на случай, когда функция веса $\rho(x)$ принимает значения в комплексной плоскости K.

Доказывается следующая *теорема*: Если функция $\rho(x, z)$ $x \in (a,b)$ $z \in D \subset K$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\rho(x, z)$ — аналитическая относительно z для любых $x \in (a, b)$;

2) $\rho(x,z)$ интегрируема по x, причем $\int_a^b \rho(x, z) = 1$ и

$\int_a^b |\rho(x, z)| dx < \infty$;

3) $\rho(x, z) > 0$ для любых $x \in (a, b)$ и $z \in \Delta \subset D$ (Δ подмножество D, имеющее по крайней мере одну точку сгущения в D).

$\rho'_z(x, z)$ равномерно непрерывна относительно совокупности переменных в окрестности любой точки голоморфности.

Тогда

$$\int_a^b \rho(x, z)\, R(x)\, dx = \sum_0^n H_i(z)\; R(x_i(z))$$

для любого полинома действительной переменной $R(x)$ с действительными или комплексными коэффициентами, порядка $\leqslant 2n + 1$.

В (18) дается оценка ошибки с использованием формулы квадратуры (17).

Определение коэффициентов Гаусса в приведенных примерах (вычисление коэффициентов Фурье, сумм $\sum_{u=1}^{\infty} f(n)$ и функции Римана $\zeta(z)$), делалась с помощью рекуррентных соотношений (6), позволяющих вычислить коэффициенты H_i и x_i, если известны одни моменты функции $\rho(x,z)$. Расчеты производились на вычислительной машине CIFA—4.

UNE EXTENSION DE LA MÉTHODE DE GAUSS POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES IMPROPRES

RÉSUMÉ

L'auteur donne une généralisation de la méthode pour le calcul des intégrales impropres au cas où la fonction poids $\rho(x)$ prend des valeurs dans le plan complexe K.

Il démontre le théorème suivant :

Si la fonction $\rho(x, z) x \in (a, b)$ $z \in D \subset K$ satisfait aux conditions suivantes :

1. $\rho(x, z)$ analytique en z pour tout $x \in (a, b)$,

2. $\rho(x, z)$ intégrable en x avec $\int_a^b \rho(x, z) = 1$ et $\int_a^b |\rho(x,z)|\, dx < \infty$,

3. $\rho(x, z) > 0$ pour tout $x \in (a,b)$ et $z \in \Delta \subset D$ (Δ un sous-ensemble de D qui possède au moins un point d'accumulation en D),

$\rho'(x, z)$ uniformément continue par rapport à l'ensemble des variables au voisinage de tout point d'holomorphie,

alors

$$\int_a^b \rho(x, z)\, R(x)\, dx = \sum_0^n H_i(z)\, R(x_i(z))$$

pour tout polynôme à variable réelle $R(x)$ à coefficients réels ou complexes du degré $\leqslant 2n + 1$.

Dans (18) est donnée une évaluation de l'erreur par l'utilisation de la formule de quadrature (17).

La détermination des coefficients de Gauss, dans les exemples donnés (le calcul des coefficients de Fourier, des sommes $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, et de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann) a été faite en se servant des relations de récurrence (6), qui permettent de calculer les coefficients H_i et x_i lorsque l'on ne connaît que les moments de la fonction $\rho(x, z)$. Les calculs ont été effectués au moyen du calculateur électronique CIFA—4.

BIBLIOGRAFIE

1. H. MINEUR, *Technique de calcul numérique*. Paris, 1960.
2. Е. И. КРЫЛОВ, *Приближение вычисления интегралов*. Москва, 1959.
3. G. H. HARDY, W. W. ROGOSINSKI, *Fourier series*. Cambridge, 1956.
4. G. H. HARDY, *Divergents Series*. Oxford, 1949.
5. E. C. TITCHMARCH, *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford, 1951.
6. Я. С. БЕЗИКОВИЧ, *Приближение вычисления*. Гостехиздат, Москва, 1949.

ASUPRA GRUPURILOR DE MIȘCĂRI ALE ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA ÎN n VARIABILE

DE

ANDREI DOBRESCU

1. Acad. Gh. Vrănceanu, ocupîndu-se de problema geometrizării ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea în două variabile

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

a arătat [1], utilizînd proprietăți ale sistemului Pfaff asociat ecuației (1)

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

că grupul de mișcări (de transformări de contact în ea însăși) al unei ecuații (1) cu caracteristice distincte și de al doilea ordin are cel mult 9 parametri, și că ecuațiile care admit grupuri cu 9 parametri pot fi aduse la două forme canonice, una din aceste forme fiind

$$\frac{r}{t^3} - \frac{s^2}{t^4} - \frac{1}{12} = 0. \tag{3}$$

Într-o lucrare anterioară [2], am considerat problema determinării — pe o cale directă — a grupului de mișcări al ecuației (1) și am arătat că transformările infinitezimale ale acestui grup depind de o soluție specială a unei anumite ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea [1]). Am considerat de asemenea problema determinării grupului unui sistem de două — și unui sistem de trei — ecuații de forma (1) și am obținut rezultate analoge cu cel obținut în cazul unei singure ecuații (1).

[1]) În ceea ce privește grupul ecuației (3), i-am determinat operatorii transformărilor infinitezimale și ecuațiile de structură.

În cele ce urmează, considerăm problema determinării grupului de mişcări (de transformări — de contact — în ea însăşi) al unei ecuaţii de ordinul al doilea în n variabile

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}) = 0, \tag{4}$$

unde z este funcţia necunoscută, de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (i, j = 1, \ldots, n),$$

precum şi problema determinării grupului unui sistem de ecuaţii de forma (4).

2. Ecuaţia (4) fiind dată, putem presupune că am obţinut derivatele p_{ij} ca funcţii de x_i, z, p_i şi alte variabile u_h, $(h = 1, \ldots, m)$

$$p_{ij} = p_{ij}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, u_1, \ldots, u_m), \tag{5}$$

numărul m al variabilelor u_h fiind egal cu numărul derivatelor p_{ij} micşorat cu o unitate

$$m = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Invers, sistemul (5) fiind dat, dacă rangul matricei

$$M = \left\| \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h} \right\|, \quad (i, j = 1, \ldots, n; \; h = 1, \ldots, m)$$

(i, j indici de coloană, h indice de linie) este m, prin eliminarea variabilelor u_h între ecuaţiile (5) obţinem o singură ecuaţie (4).

Determinarea grupului ecuaţiei (4) revine astfel la determinarea grupului sistemului de ecuaţii Pfaff[2])

$$dz = p_i \, dx_i, \tag{6}$$

$$dp_i = p_{ij} \, dx_j, \tag{7}$$

unde p_{ij} sînt date de sistemul (5), echivalent cu (4). Variabilele sistemului sînt deci x_i, z, p_i, u_h.

Fie

$$x_i' = x_i + \xi_i, \; z' = z + \zeta, \; p_i' = p_i + \pi_i, \; u_h' = u_h + \theta_h \tag{8}$$

transformările infinitezimale ale grupului sistemului (6), (7), funcţiile ξ_i, ζ, π_i, θ_h (de variabilele x_i, z, p_i, u_h) fiind considerate [3]) drept cantităţi de primul ordin în raport cu diferenţialele dx_i, dz, dp_i, du_h.

---

[2]) Se adoptă convenţia de sumare a lui Einstein.

[3]) Datorită prezenţei parametrilor grupului.

Ținînd seama de (6), (7), (8) și neglijînd termenii de ordin superior lui 2, obținem

$$\mathrm{d}\zeta = p_i\,\mathrm{d}\xi_i + \pi_i\,\mathrm{d}x_i, \tag{9}$$

$$\mathrm{d}\pi_i = p_{ij}\,\mathrm{d}\xi_j + \left(\xi_l\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l} + \zeta\frac{\partial p_{ij}}{\partial z} + \pi_l\frac{\partial p_{ij}}{\partial p_l} + \theta_h\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h}\right)\mathrm{d}x_j. \tag{10}$$

Relațiile (9) și (10) se scriu încă

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\zeta}{\partial z}p_j\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\zeta}{\partial p_l}p_{lj}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\zeta}{\partial u_h}\,\mathrm{d}u_h =$$
$$= p_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_i}{\partial z}p_j\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_i}{\partial p_l}p_{li}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_i}{\partial u_h}\,\mathrm{d}u_h\right) + \pi_i\,\mathrm{d}x_i, \tag{9'}$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\pi_i}{\partial z}p_j\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\pi_i}{\partial p_l}p_{lj}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\pi_i}{\partial u_h}\,\mathrm{d}u_h =$$
$$= p_{il}\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_l}{\partial z}p_j\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_l}{\partial p_k}p_{kj}\,\mathrm{d}x_j + \frac{\partial\xi_l}{\partial u_h}\,\mathrm{d}u_h\right) + \tag{10'}$$
$$+ \xi_l\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_j + \zeta\frac{\partial p_{ij}}{\partial z}\,\mathrm{d}x_j + \pi_l\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l}\,\mathrm{d}x_j + \theta_h\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h}\,\mathrm{d}x_j.$$

Cum (9') și (10') sînt identități în $\mathrm{d}x_i$ și $\mathrm{d}u_h$, introducînd operatorii

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial z} + p_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_j}, \tag{11}$$

obținem relațiile

$$D_i\zeta - p_j D_i\xi_j - \pi_i = 0, \tag{12}$$

$$D_i\pi_j - p_{jl}D_i\xi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l}\xi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial p_l}\pi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h}\theta_h = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u_h} - p_i\frac{\partial\xi_i}{\partial u_h} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial u_h} - p_{il}\frac{\partial\xi_l}{\partial u_h} = 0. \tag{15}$$

Să introducem funcția auxiliară φ prin relația

$$\varphi = \zeta - p_i\xi_i. \tag{16}$$

Deducem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_h} = \frac{\partial\zeta}{\partial u_h} - p_i\frac{\partial\xi_i}{\partial u_h},$$

și ținînd seamă de (14)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_h} = 0.$$

Prin urmare *funcția* φ *nu depinde de variabilele* u_h.

Aplicînd relației (16) operatorul D_i definit de (11) și ținînd seamă de faptul că

$$D_i p_j = p_{ij},$$

precum și de (12), obținem

$$\pi_i = D_i \varphi + p_{ij} \xi_j. \tag{17}$$

De aici, derivînd în raport cu u_h și ținînd seama de (15), precum și de relațiile

$$\frac{\partial}{\partial u_h} (D_i \varphi) = \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j},$$

care rezultă imediat din (11), unde în loc de f punem φ, obținem

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h} \left(\xi_j + \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \right) = 0. \tag{18}$$

În sfîrșit, aplicînd operatorul D_i relațiilor (17) și ținînd seama de (13), obținem

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h} \theta_h = D_i D_j \varphi + \xi_l D_i p_{jl} - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l} \xi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \zeta - \frac{\partial p_{ij}}{\partial p_l} \pi_l, \tag{19}$$

unde

$$D_i D_j \varphi = D_i (D_j \varphi).$$

Ecuațiile (16), (17), (18), (19) constituie un sistem liniar în funcțiile necunoscute ξ_i, ζ, π_i, θ_h. Determinarea acestor funcții este legată de determinarea funcției auxiliare φ care intră în sistem împreună cu derivatele ei parțiale de primul și al doilea ordin în raport cu x_i, z, p_i.

3. Ecuațiile (18) impun considerarea matricei

$$N = \left\| \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_h} \right\|$$

(i, h indici de linie, j indice de coloană), al cărei rang este cel mult n.

Rangul matricei M fiind prin ipoteză m, să arătăm că *rangul matricei* N *nu poate fi mai mic decît* n. În adevăr, în ipoteza că rang $N < n$, putem demonstra că rangul matricei M este în mod necesar mai mic decît m. În acest scop, este destul să arătăm că determinanții de ordinul m ai

matricei M sînt nuli. Acești determinanți se obțin din M suprimînd o coloană. Suprimînd de exemplu coloana formată cu derivatele $\frac{\partial p_{11}}{\partial u_h}$, obținem determinantul

$$D = \left| \frac{\partial p_{12}}{\partial u_h} \dots \frac{\partial p_{1n}}{\partial u_h} \frac{\partial p_{22}}{\partial u_h} \dots \frac{\partial p_{2n}}{\partial u_h} \dots \frac{\partial p_{nn}}{\partial u_h} \right|.$$

Însă, dacă rangul matricei N este mai mic decît n, coloanele acestei matrice sînt liniar dependente, deci avem relații de forma

$$\lambda_1 \frac{\partial p_{i1}}{\partial u_h} + \lambda_2 \frac{\partial p_{i2}}{\partial u_h} + \dots + \lambda_n \frac{\partial p_{in}}{\partial u_h} = 0,$$
$$(i = 1, \dots, n;\ h = 1, \dots, m)$$

coeficienții λ_i nefiind toți nuli. În virtutea relațiilor deduse din relațiile precedente făcînd $i = 2$, rezultă $D = 0$. În mod asemănător se vede că și ceilalți determinanți de ordinul m ai matricei M sînt nuli, dacă rang $N < n$.

Rangul matricei N fiind așadar n, din (18) deducem

$$\xi_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \tag{20}$$

încît din (16) rezultă

$$\zeta = \varphi - p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \tag{21}$$

iar din (17) obținem

$$\pi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{22}$$

În ce privește ecuațiile (19), numărul lor este $\frac{n(n+1)}{2} = m + 1$. Acest număr fiind cu 1 mai mare decît numărul necunoscutelor θ_h, condiția de compatibilitate a sistemului (19) este

$$\left| \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_m} D_{ij} \right| = 0, \tag{23}$$

unde D_{ij} sînt membrii din dreapta ai ecuațiilor (19)[4]).

---

[4]) Funcțiile p_{ij} fiind — în virtutea semnificației lor — simetrice în indicii i, j, membrii din dreapta ai ecuațiilor (19) sînt de asemenea (în mod necesar) simetrici în i, j, ceea ce are drept consecință relațiile

$$\left(\xi_l + \frac{\partial \varphi}{\partial p_l} \right) (D_i p_{jl} - D_j p_{il}) = 0.$$

Se vede că, în cazul cînd rang $N = n$, deci cînd ξ_i sînt date de (20), relațiile precedente sînt satisfăcute.

Relația (23) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea în funcția φ.

Variabilele u_h intrînd în (23) prin intermediul funcțiilor p_{ij}, iar φ nedepinzînd de u_h, în cazul cînd p_{ij} sînt funcții analitice în u_h, în particular polinoame sau fracții raționale, se poate afirma că ecuația (23) se descompune într-un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea în φ, coeficienții ecuațiilor acestui sistem nedepinzînd de u_h.

Presupunînd obținută soluția cea mai generală φ — independentă de u_h — a ecuației (23), deci soluția sistemului cu care această ecuație este echivalentă, relațiile (20), (21), (22) și (19) determină funcțiile ξ_i, ζ, π_i și θ_h.

Putem deci enunța teorema:

Dacă rangul matricei M este m, iar al matricei N este n, grupul de mișcări al sistemului Pfaff (6), (7), *unde p_{ij} sînt dați de* (5), *deci al ecuației cu derivate parțiale* (4), *echivalentă cu* (5), *depinde de soluția cea mai generală φ — independentă de u_h — a ecuației* (23).

Sistemul (5) fiind dat, dacă

$$\operatorname{rang} M = m' < m, \quad m' > 0,$$

numai m' variabile u_h sînt esențiale și sistemul (5) este echivalent cu un sistem de $m + 1 - m'$ ecuații de forma (4)

$$F_\alpha(x_i, z, p_i, p_{ij}) = 0 (\alpha = 1, \ldots, m + 1 - m'). \tag{24}$$

Invers, considerînd un sistem de $m + 1 - m'$ ecuații cu derivate parțiale (24), de ordinul al doilea, astfel că rangul matricei funcționale $\left\| \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_{ij}} \right\|$ este $m + 1 - m'$, $m' > 0$, putem obține din (24) derivatele p_i ca funcții de x_i, z, p_i și alte m' variabile $u_{h'}$:

$$p_{ij} = p_{ij}(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n, u_1, \ldots, u_{m'}). \tag{25}$$

Variabilele $u_{h'}$ $(h' = 1, \ldots, m')$ fiind esențiale, rangul matricei

$$M' = \left\| \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{h'}} \right\|$$

(i, j indici de coloană, h' indice de linie) este m'.

Relațiile (12), (13), (14), (15) — cu h' în loc de h — subzistă.

Funcția auxiliară φ, introdusă prin relația (16), nu depinde de $u_{h'}$. Ecuațiile (17), (18), (19) — cu h' în loc de h — subzistă de asemenea.

În ceea ce privește matricea

$$N' = \left\| \frac{\partial p_{ij}}{\partial u_{h'}} \right\|,$$

(i, h' indici de linie, j indice de coloană) rangul acesteia poate fi n sau mai mic decît n.

Vom considera cazul cînd rang $N' = n$. În acest caz, (20), (21), (22) subzistă. Fie apoi

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial u_{m'}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_{\alpha_{m'} \beta_{m'}}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{\alpha_{m'} \beta_{m'}}}{\partial u_{m'}} \end{vmatrix},$$

unde $\alpha_{h'}$, $\beta_{h'}$ $(h'=1,\dots,m')$ sînt m' (anumite) combinări din cele $\frac{n(n+1)}{2}$ combinări cu repetiție ale indicilor $1,\dots,n$, cîte 2 — unul din determinanții de ordinul m', nenuli, formați cu elementele matricei M'.

Punînd (ca mai sus)

$$D_{ij} = D_i D_i \varphi + \left(D_i p_{jl} - \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_l} \right) \xi_l - \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \zeta - \frac{\partial p_{ij}}{\partial p_l} \pi_l,$$

ξ_i, ζ, π_i fiind date de (20), (21), (22), condițiile de compatibilitate ale sistemului (19) se scriu

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial p_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{\alpha_1 \beta_1}}{\partial u_{m'}} & D_{\alpha_1 \beta_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_{\alpha_{m'} \beta_{m'}}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{\alpha_{m'} \beta_{m'}}}{\partial u_{m'}} & D_{\alpha_{m'} \beta_{m'}} \\ \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial p_{\alpha\beta}}{\partial u_{m'}} & D_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = 0, \qquad (26)$$

unde perechea $\alpha\beta$ parcurge toate combinările cu repetiție ale indicilor $1,\dots,n$, cîte 2, în afara combinărilor $\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_{m'} \beta_{m'}$, astfel că $\alpha \leqslant \beta$.

Ecuațiile (26) constituie un sistem de $m + 1 - m'$ ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea în raport cu funcția auxiliară φ. Coeficienții acestui sistem depind (în general) de $u_{h'}$, astfel încît, φ nedepinzînd de $u_{h'}$, sistemul este echivalent cu un sistem constituit dintr-un număr mai mare de ecuații în φ, coeficienții noului sistem nedepinzînd de $u_{h'}$.

Avem deci teorema:

Grupul de mișcări al sistemului Pfaff (6), (7), *unde* p_{ij} *sînt date de sistemul* (25), *echivalent cu sistemul* (24), *depinde de soluția cea mai generală* φ — *independentă de* $u_{h'}$ — *a sistemului* (26).

Se poate lua în considerare și cazul cînd, rangul matricei M fiind $m' < m$, rangul matricei N este $n' < n$ ($m' > 0$, $n' > 0$), precum și cazul cînd rangul matricei M este zero, în ultimul caz sistemul de ecuații (24) fiind echivalent cu un sistem de ecuații cu diferențiale totale.

Primită la redacție la 25 mai 1963

О ГРУППЕ ДВИЖЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С n-ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача определения группы движений уравнения (4), идентичной с группой присоединенной системы Пфаффа (6), (7), где p_{ij} даются системой (5), эквивалентной (4).

Если бесконечно малые преобразования группы имеют вид (8), то, вводя операторы (11), а также вспомогательную функцию φ соотношением (16), находим, что функция φ, не зависящая от переменных u_h, определена уравнением в частных производных второго порядка (23), а функции ξ_i, ζ, π_i и θ_h, определяющие группу, — уравнениями (20), (21), (22), (19).

Аналогичный результат получается, если система (6), (7) эквивалентна системе вида (24).

SUR LES GROUPES DE MOUVEMENTS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE À n VARIABLES

RÉSUMÉ

On considère le problème de la détermination du groupe de mouvements de l'équation (4), identique au groupe du système de Pfaff associé (6), (7), où p_{ij} sont données par le système (5), équivalent à (4).

Les transformations infinitésimales du groupe étant de la forme (8), en introduisant les opérateurs (11), de même que la fonction auxiliaire φ par la relation (16), on trouve que φ — indépendante des variables u_h — est donnée par l'équation aux dérivées partielles du second ordre (23), et les fonctions ξ_i, ζ, π_i, θ_h, qui définissent le groupe, par les équations (20), (21), (22), (19).

On obtient un résultat analogue si le système (6), (7) est équivalent à un système de la forme (24).

BIBLIOGRAFIE

1. G. VRĂNCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1957, **II**.
2. A. DOBRESCU, *Asupra grupurilor de mișcări ale ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul al doilea, în două variabile*. St. cerc. mat., **XI**, *2* (1960).

ASUPRA UNOR „EXTINDERI" ALE INTEGRALELOR RIEMANN ŞI LEBESGUE

DE

VALENTIN POPESCU

Într-o lucrare recentă [1], [2], I. Cristea prezintă două „extinderi" ale integralelor Riemann şi Lebesgue, interesante atît prin modul original de abordare cît şi prin faptul că se pot include, în aceeaşi definiţie, ambele concepte. Nu s-a arătat însă dacă aceste generalizări sînt efective sau nu, afirmîndu-se doar că la prima vedere echivalenţa între integrala (L) şi integrala din [1] şi [2] pare imposibilă ([2], p. 472). La sfîrşitul lucrării se subliniază însă necesitatea de a se da un exemplu de funcţie nemăsurabilă (L) dar integrabilă în sensul definiţiei 1 din [1] şi [2] precum şi un exemplu de funcţie nemăsurabilă (L), integrabilă în sensul definiţiei 2 dar neintegrabilă în sensul definiţiei 1 din [1] şi [2].

În cele ce urmează vom da soluţii exhaustive tuturor acestor probleme, vom completa unele teoreme din lucrarea citată, şi vom arăta falsitatea criteriilor de integrabilitate din [2] bazate pe noţiunile de oscilaţie generalizată şi continuitate (respectiv discontinuitate) generalizată. Vom adopta terminologia şi notaţiile din [1] şi [2].

§ 1. RELAŢIILE DINTRE INTEGRALELE DIN [1] ŞI [2] ŞI INTEGRALA (L)

LEMA 1. *Fiind date două funcţii mărginite* $f : E \to (a, A)$ *şi* $g : E \to (b, B)$, *dacă* g *este continuă în punctul* $x_0 \in E$, *atunci oscilaţia lui* f *în* x_0 (*în sens clasic*) *nu depăşeşte oscilaţia lui* f *în raport cu* g *în punctul* x_0 (*în sensul din* [1] *şi* [2]).

Demonstraţie. Fie pentru aceasta $\{I_\iota\}$familia tuturor intervalelor deschise care conţin punctul x_0. Din continuitatea funcţiei g în x_0 rezultă că $g^{-1}(I_\iota)$ sînt vecinătăţi ale lui x_0. Astfel, notînd cu $\mathcal{V}^*_{x_0}$ filtrul vecinătăţilor, relative la E, ale lui x_0, vom avea

$$\{g^{-1}(I_\iota)\} \subset \mathcal{V}^*_{x_0}$$

de unde

$$\inf_{\iota} \{\omega_f(g^{-1}(I_\iota))\} \geqslant \inf_{V^* \in \mathcal{O}^*_{x_0}} \{\omega_f(V^*)\}$$

adică $\omega_f(x_0, g) \geqslant \omega_f(x_0)$. Din lema 1 rezultă

LEMA 2. *Dacă g este continuă în x_0, iar f este continuă în raport cu g în x_0, în sensul din* [1] *și* [2], *atunci f este continuă în x_0 (în sens clasic).*

TEOREMA 1. *Orice funcție g-integrabilă este integrabilă (L).*

Demonstrație. Fie E o mulțime măsurabilă, $g : E \to (b, B)$ o funcție măsurabilă și $f : E \to (a, A)$ o funcție *g-integrabilă*. Vom arăta că f este continuă (L) pe E. Fie dat un $\varepsilon > 0$ arbitrar. g fiind continuă (L) pe E va exista o mulțime măsurabilă $M \subset E$ cu $mM < \varepsilon$ încît g să devină continuă prin neglijarea mulțimii M. Pe de altă parte, f fiind g-integrabilă rezultă, aplicînd teorema 8 din [1] (în care condiția de compactitate a lui $g(E)$ s-a strecurat din greșeală, întrucît demonstrațiile anterioare nu reclamă această condiție decît pentru suficiență în vreme ce teorema 8 dă o condiție necesară), că mulțimea N a discontinuităților lui f în raport cu g este de măsură (L) nulă. f este deci g-continuă pe $E - N$ și cu atît mai mult pe $E - (M \cup N)$. Considerînd această din urmă mulțime ca mulțime de definiție a lui f și g, g va fi continuă iar f va fi g-continuă, deci continuă (clasic) în virtutea lemei 2. Dar $m(M \cup N) < \varepsilon$, deci f este continuă (L) pe E și teorema este demonstrată.

COROLAR. *Condiția „f fiind dată există o funcție măsurabilă și mărginită g, astfel încît f să fie g-integrabilă" este echivalentă cu integrabilitatea (L) a funcției f.*

Reciproca teoremei nu este adevărată; astfel, orice funcție care nu are aceeași valoare, aproape peste tot, nu este g-integrabilă dacă g este constantă. Există deci chiar funcții continue care nu sînt g-integrabile.

În acest exemplu g a avut însă o formă particulară. Se pune întrebarea dacă nu există totuși o anumită funcție măsurabilă g astfel încît g-integrabilitatea să fie echivalentă cu integrabilitatea (L). Răspunsul (negativ) la această întrebare va fi dat de

TEOREMA 2. *Oricare ar fi funcția mărginită și măsurabilă g, există o funcție integrabilă (L), f, care să nu fie g-integrabilă.*

Într-adevăr, g fiind dată, să considerăm două submulțimi cel mult numărabile ale lui $g(E)$, $\{\widetilde{x}_i\}$ și $\{\widetilde{y}_i\}$, dense în $g(E)$ și neavînd puncte comune decît cel mult pe acelea pentru care g^{-1} nu este unic (în E). Să atașăm fiecărui $\widetilde{x}_i$ cîte o valoare $x_i \in E$ (aplicînd axioma alegerii) astfel ca $g(x_i) = \widetilde{x}_i$. Fie $M = \{x_i\}$. Vom atașa fiecărui $\widetilde{y}_i$ cîte o valoare $y_i \in E - M$ astfel ca $g(y_i) = \widetilde{y}_i$, ceea ce este întotdeauna posibil. Vom defini acum o funcție măsurabilă $f(x)$ în modul următor :

$$f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ pentru } x \in E - (M \cup N), \\ 0, \text{ pentru } x \in M, \\ 1, \text{ pentru } x \in N. \end{cases}$$

Fie $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_p$ o diviziune a lui (b, B). Notînd $\tilde{e}_i = g^{-1}(I_i)$ avem evident $\omega_f(\tilde{e}_i) \geqslant 1$, dacă $\tilde{e}_i \neq \emptyset$. Păstrînd notaţiile din [1] vom avea:

$$S_\Delta(f, g) - s_\Delta(f, g) = \sum_{i=1}^{p} \omega_f(\tilde{e}_i)\, m\tilde{e}_i \geqslant \sum_{i=1}^{p} m\tilde{e}_i = mE.$$

Dar, cum diviziunea a fost arbitrară, iar mE este constant, rezultă că f nu este g-integrabilă.

COROLAR. *Integrabilitatea (L) este efectiv mai generală decît g-integrabilitatea (oricare ar fi g fixă).*

LEMA 3. *Dacă $f(x)$ este integrabilă pe E în sensul din* [1] *şi* [2] *atunci, oricare ar fi perechea de numere pozitive ε şi σ există o funcţie măsurabilă $g : E \to (b, B)$ şi o diviziune a intervalului $(b, B) : I_1, I_2, \ldots, I_p$ astfel încît, notînd $\tilde{e}_k = g^{-1}(I_k)$, să avem*

$$\sum_{\omega_f(\tilde{e}_k) \geqslant \varepsilon} m\,\tilde{e}_k < \sigma.$$

Demonstraţie. Funcţia g este cea dată de teorema 13′ completată cu observaţia de la sfîrşitul teoremei 14 din [2] iar diviziunea rezultă din suprapunerea diviziunilor Δ_1 şi Δ_2 date de teorema 13′. Demonstraţia este analogă celei date teoremei 4a din [1] (al cărei enunţ este greşit, forma corectă fiind cea asemănătoare lemei precedente).

LEMA 4. *În condiţiile lemei precedente există o funcţie măsurabilă g şi o familie finită $\{I_k\}$ de subintervale ale lui (b, B) care să acopere toate punctele $g(x)$ pentru care $\omega_f(x, g) \geqslant \varepsilon$ şi astfel încît reuniunea mulţimilor $g^{-1}(I_k)$ să fie de măsură inferioară lui σ.*

TEOREMA 3. *Orice funcţie integrabilă în sensul celei de-a doua definiţii din* [1] *şi* [2] *este integrabilă (L).*

Demonstraţie. Fie $f : E \to (a, A)$ integrabilă în sensul din [1] şi [2]. Vom arăta că ea este continuă (L) pe E. Să considerăm, pentru aceasta, un număr arbitrar $\varepsilon > 0$ şi un şir descrescător de numere pozitive tinzînd către zero $\{\varepsilon_i\}$.

Fixîndu-l pe i şi aplicînd lema 4, numerelor ε_i şi $\sigma_i = \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ le vor corespunde o funcţie măsurabilă $g_i : E \to (b_i, B_i)$ şi o familie finită de subintervale ale lui $(b_i, B_i) : I_1^i, I_2^i, \ldots, I_{p_i}^i$ care să acopere toate punctele $g_i(x)$ pentru care $\omega_f(x, g_i) \geqslant \varepsilon_i$ şi astfel ca

$$m \bigcup_{k=1}^{p_i} g^{-1}(I_k^i) < \sigma_i = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Fie $M_i = \{x \in E \mid \omega_f(x, g_i) \geqslant \varepsilon_i\}$. Evident $m\,M_i < \sigma_i = \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$; $g_i(x)$ fiind măsurabilă va fi continuă (L) deci, pentru numărul pozitiv $\dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, va exista o mulţime măsurabilă N_i cu $m\,N_i < \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ şi astfel ca f, pre-

supusă definită numai pe $E - N_i$, să fie continuă. Considerînd funcțiile f și g_i ca definite pe $E - (M_i \cup N_i)$, g_i este continuă iar f are, în toate punctele, oscilația în raport cu g_i inferioară lui ε_i. Deci, aplicînd lema 1, oscilația (în sens clasic) lui f va fi inferioară numărului ε_i.

Fie acum $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i \cup N_i)$. Avem

$$mM = m \bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i \cup N_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(M_i \cup N_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mM_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} mN_i < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

Dar este evident că f, considerată ca funcție definită pe $E - M$, este continuă (neavînd puncte de oscilație strict pozitivă). Cum $mM < \varepsilon$ iar ε a fost ales arbitrar, rezultă că f este continuă (L) pe E.

COROLAR. *Integrabilitatea în sensul celei de-a doua definiții din* [1] *și* [2] *și integrabilitatea* (*L*) *sînt echivalente.*

§ 2. RELAȚIILE DINTRE g-INTEGRALE ȘI INTEGRALA RIEMANN

Intregrala în sensul celei de-a doua definiții din [1] și [2] și integrala (L) fiind echivalente, problema relațiilor dintre prima din acestea și integrala (R) este pe deplin rezolvată. Să vedem însă ce relații există între g-integrale și integrala (R), cu alte cuvinte în ce condiții g-integrabilitatea este mai puțin generală, mai generală, sau echivalentă cu integrabilitatea (R).

TEOREMA 4. *Funcția măsurabilă și mărginită g fiind dată, condiția necesară și suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai puțin generală decît integrabilitatea* (*R*), *este ca g să fie integrabilă* (*R*).

Demonstrație. *Condiția este suficientă.* Aproape peste tot (pe intervalul de definiție) f este continuă în raport cu g iar g este continuă. Din lema 2 rezultă că f este aproape peste tot continuă, deci integrabilă (R).

Condiția este necesară. Dacă g n-ar fi integrabilă (R), ea ar fi totuși g-integrabilă și g-integrabilitatea n-ar mai fi mai puțin generală decît integrabilitatea (R).

Din această teoremă rezultă că, pornind de la clasa funcțiilor integrabile (R) și aplicînd procedeul introdus de I. Cristea, nu vom putea depăși această clasă.

LEMA 5. *Dacă* $f : [\alpha, \beta] \to (a, A)$ *este integrabilă* (*R*) *pe* $[\alpha, \beta]$ *atunci pentru orice număr* $\varepsilon > 0$ *va exista un* $\lambda > 0$ *astfel încît pentru orice sistem finit de submulțimi măsurabile și disjuncte ale lui* $[\alpha, \beta]$, *de diametru nedepășind* λ, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$, *să avem* :

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_f(\tilde{e}_k) \cdot m\tilde{e}_k < \varepsilon.$$

Demonstrație. Într-adevăr, f fiind integrabilă (R), numerelor $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sigma(\beta - \alpha)}$ și $\sigma = \frac{\varepsilon}{3(A - a)}$ le vor corespunde un sistem finit de intervale deschise $I_1, I_2, \ldots, I_p$ de lungime totală inferioară lui σ care să acopere toate punctele în care oscilația lui f nu scade sub ε^*. Pe mulțimea compactă rămasă oscilația lui f este inferioară lui ε^*. Va exista deci un număr δ astfel încît pe orice interval de lungime inferioară lui δ și exterior intervalelor I_i, oscilația lui f să nu depășească $2\varepsilon^*$.

Numărul căutat λ va fi cel mai mic dintre lungimile intervalelor I_i, δ și $\frac{\varepsilon}{6p(A-a)}$. Fie, pentru aceasta, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$ o familie de submulțimi ale lui $[\alpha, \beta]$ cu proprietățile din enunț. Vom împărți suma $\sum_{i=1}^{n} \omega_f(\tilde{e}_i)\, m\tilde{e}_i$ în trei părți

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f(\tilde{e}_i)\, m\tilde{e}_i = \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''',$$

unde prima sumă se referă la mulțimile $\tilde{e}_k$ incluse într-un I_i, a doua la cele disjuncte cu intervalele I_i iar a treia la mulțimile rămase. Vom avea

$$\Sigma = \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' < \sigma(A - a) + 2\varepsilon^*(\beta - \alpha) + 2\lambda p\,(A - a) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Lema 6. *Dacă funcția $g : E \to (b, B)$ are proprietatea că $f(x) = x$ este g-integrabilă pe E atunci perechii de numere pozitive arbitrare ε și σ îi corespunde o diviziune a intervalului (b, B) : $I_1, I_2, \ldots, I_n$ astfel încît, notînd cu $\tilde{e}_k = g^{-1}(I_k)$ și prin $d(\tilde{e}_k)$ diametrul mulțimii $\tilde{e}_k$, să avem* $\sum_{d(\tilde{e}_k) \geqslant \varepsilon} m\tilde{e}_k < \sigma$.

Demonstrația rezultă imediat din teorema 4a din [1], cu condiția de a se ține seama că enunțul teoremei citate este greșit formulat, forma corectă fiind cea asemănătoare lemei noastre.

Teorema 5. *Funcția măsurabilă $g : [\alpha, \beta] \to (b, B)$ fiind dată, condiția necesară și suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai generală decît integrabilitatea (R) este ca funcția $f(x) = x$ să fie g-integrabilă.*

Demonstrație. Necesitatea fiind evidentă să demonstrăm suficiența. Din lema 5, considerînd dat numărul $\frac{\varepsilon}{2}$, rezultă existența unui $\lambda > 0$ astfel încît pentru orice sistem finit de submulțimi măsurabile și disjuncte ale lui $[\alpha, \beta]$ de diametru nedepășind λ, $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$ să avem $\sum_{k=1}^{n} \omega_f(\tilde{e}_k)\, m\tilde{e}_k < \frac{\varepsilon}{2}$. λ și $\sigma = \frac{\varepsilon}{2(A - a)}$ fiind date, din lema 6 rezultă

existența unei diviziuni $I_1, I_2, \ldots, I_p$ a intervalului (b, B) astfel încît notînd $\tilde{e}_k = g^{-1}(I_k)$ să avem $\sum_{d(\tilde{e}_k) \geq \lambda} m\tilde{e}_k < \sigma$. Dar

$$\sum_{k=1}^{p} \omega_f(\tilde{e}_k) \cdot m\tilde{e}_k = \sum_{d(\tilde{e}_i) < \lambda} \omega_f(\tilde{e}_i) \cdot m\tilde{e}_i + \sum_{d(\tilde{e}_j) \geq \lambda} \omega_f(\tilde{e}_j)\, m\tilde{e}_j <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sigma \frac{A - a}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci f este g-integrabilă și teorema este demonstrată.

Noțiunile de oscilație și continuitate se pot extinde și la funcțiile polivalente. O astfel de funcție f este continuă într-un punct x_0 în care este totuși univalentă, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît pentru orice $x' \in V$ și pentru orice valoare y a lui $f(x')$ să avem $|f(x_0) - y| < \varepsilon$. În punctele în care nu este univalentă, funcția este discontinuă.

LEMA 7. *Condiția necesară și suficientă ca funcția $f(x) = x$ să fie continuă în raport cu o funcție g într-un punct x_0, este ca $g^{-1}(x)$ (considerată ca funcție polivalentă de punct) să fie continuă (deci și univalentă) în punctul $g(x_0)$.*

Demonstrație. Pentru a demonstra necesitatea să presupunem că $f(x) = x$ este continuă în raport cu g în x_0. Pentru orice interval deschis $I \ni g(x_0)$ va exista un interval deschis $J \ni x_0$ astfel ca $f(g^{-1}(J)) \subset I$. Dar f fiind funcția identică vom avea și $g^{-1}(J) \subset I$ de unde continuitatea lui g^{-1} în $g(x_0)$.

Să stabilim suficiența condiției. Dacă g^{-1} este continuă în $g(x_0)$ rezultă că pentru orice interval deschis $I \ni x_0$ va exista un interval $J \ni g(x_0)$ cu $g^{-1}(J) \subset I$, de unde $f(g^{-1}(J)) = g^{-1}(J) \subset I$ deci f este continuă în raport cu g în x_0. Din această lemă rezultă imediat.

TEOREMA 6. *g fiind dată, o condiție necesară și suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai generală decît integrabilitatea (R), este ca mulțimea valorilor funcției g^{-1} luate în punctele de discontinuitate să fie de măsură (L) nulă în raport cu g.*

LEMA 8. *Fie g o funcție mărginită, definită pe o mulțime închisă F. Să-i atașăm o funcție polivalentă $\tilde{g}$ care face să corespundă oricărui $x \in F$ atît valoarea sa cît și limitele tuturor șirurilor convergente $g(x_n)$ cu $x_n \to x$. Atunci, o condiție necesară și suficientă ca g^{-1} să fie continuă într-un punct $y_0 \in g(F)$, este ca $\tilde{g}^{-1}$ să fie univalentă în y_0.*

Demonstrație. Pentru a demonstra necesitatea, să presupunem prin absurd că g^{-1} este continuă (deci și univalentă) în punctul $y_0 = g(x_0)$ dar că $\tilde{g}^{-1}$ nu este univalentă în acest punct. Sînt posibile două cazuri:

1. Există un punct $x_0' \neq x_0$ cu $g(x_0') = y_0$, ceea ce contrazice însă ipoteza că g^{-1} este univalentă în y_0.

2. Există un șir de puncte $\{x_n\}$ convergent către un punct $x_0'' \neq x_0$ astfel ca $\{g(x_n)\}$ să tindă către y_0. Fie, în acest caz, V_1 și V_2 două vecinătăți disjuncte ale punctelor x_0 și x_0''. Oricare ar fi vecinătatea V a lui

y_0 vom avea $g^{-1}(V) \cap V_2 \neq \emptyset$ deci $g^{-1}(V) \not\subset V_1$ ceea ce contrazice presupunerea că g^{-1} este continuă în y_0.

Să verificăm suficienţa condiţiei. Dacă $\tilde{g}^{-1}$ este univalentă în y_0, g^{-1} va fi cu atît mai mult. Să presupunem că totuşi g^{-1} nu este continuă în $y_0 = g(x_0)$. Va exista un şir $\{x_n\}$ convergent către un punct $x_0' \neq x_0$ astfel ca $\{g(x_n)\}$ să tindă către y_0. Dar aceasta înseamnă că $\tilde{g}(x_0') = y_0 = g(x_0) = \tilde{g}(x_0)$ ceea ce contrazice ipoteza că $\tilde{g}^{-1}$ este univalentă în y_0.

Observînd că funcţia $\tilde{g}$ nu este altceva decît funcţia al cărei grafic este închiderea graficului funcţiei g, rezultă

LEMA 9. *Funcţia g fiind definită pe o mulţime închisă F, o condiţie necesară şi suficientă ca g^{-1} să fie continuă într-un punct $y_0 \in g(F)$ este ca dreapta de ecuaţie $y = y_0$ să nu conţină decît un singur punct aderent graficului funcţiei g.*

Din aceste două leme şi din teorema 6 rezultă

TEOREMA 7. *Fie g o funcţie măsurabilă mărginită şi $\tilde{g}$ funcţia ataşată ca în enunţul lemei 8. Atunci, o condiţie necesară şi suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai generală decît integrabilitatea (R) este ca mulţimea valorilor funcţiei g^{-1} luate în punctele în care $\tilde{g}^{-1}$ nu este univalentă să fie de măsură (L) nulă în raport cu g.*

TEOREMA 8. *O condiţie necesară şi suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai generală decît integrabilitatea (R) este ca mulţimea valorilor funcţiei g^{-1} luate în punctele y_0, pentru care dreapta $y = y_0$ are cel puţin două puncte aderente graficului funcţiei g, să fie de măsură (L) nulă în raport cu g.*

LEMA 10. *Reuniunea unei familii finite de mulţimi de măsură (J) nulă în raport cu o anumită funcţie g este o mulţime cu aceeaşi proprietate.*

LEMA 11. *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi de măsură (L) nulă în raport cu g este o mulţime de măsură (L) nulă în raport cu g.*

LEMA 12. *Dacă $g : E \to (b, B)$ este o funcţie măsurabilă, pentru îndeplinirea oricăreia din proprietăţile :*

1. *orice punct $x \in E$ este de măsură (J) nulă în raport cu g ;*
2. *orice submulţime finită a lui E este de măsură (J) nulă în raport cu g ;*
3. *orice nivel al lui g este de măsură (J) nulă în raport cu g ;*
4. *orice submulţime cel mult numărabilă a lui E este de măsură (L) nulă în raport cu g,*

este necesar şi suficient ca toate nivelele lui g să fie de măsură (L) nulă (în sens clasic).

Demonstraţie. Să dovedim prima proprietate, celelalte decurgînd din aceasta şi din lemele 10—11. Condiţia este necesară căci dacă un nivel $y_0 \in (b, B)$ n-ar fi de măsură (L) nulă ar rezulta că orice punct $x_0 \in E$ cu $g(x_0) = y_0$ nu ar fi de măsură (J) nulă în raport cu g.

Fie, pentru a demonstra şi suficienţa condiţiei, $x_0 \in E$ şi $y_0 = g(x_0)$. Să considerăm un şir crescător de numere pozitive $\{\alpha_i\}$ tinzînd către y_0 şi un altul descrescător $\{\beta_i\}$ tinzînd tot către y_0. Fie $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ iar $\tilde{e}_i = g^{-1}(I_i)$. Vom avea $\lim_{i \to \infty} \tilde{e}_i = g^{-1}(y_0)$, de unde (şirul fiind descrescător) $\lim_{i \to \infty} m\tilde{e}_i = mg^{-1}(y_0) = 0$. Deci, $\varepsilon > 0$ fiind dat va exista un i astfel încît

$mg^{-1}(I) < \varepsilon$ și x_0 (împreună cu $g^{-1}(y_0)$) este de măsură (J) nulă în raport cu g.

TEOREMA 9. *Dacă* $g : E \to (b, B)$ *are proprietatea că g-integrabilitatea este mai generală decît integrabilitatea* (R) *atunci toate nivelele funcției g sînt de măsură* (J) *nulă în raport cu g (deci și de măsură* (L) *nulă în sens clasic).*

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că există o valoare y_0 încît mulțimea $M = g^{-1}(y_0)$ are o măsură $m > 0$. Fie $f(x) = x$, $\alpha = \inf M$ și $\beta = \sup M$. Oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului (b, B), ea va avea un interval $I \ni y_0$. Deci, păstrînd notațiile din [1],

$$S_\Delta(f, g) - s_\Delta(f, g) \geqslant \omega_f(I)\, mg^{-1}(I) = (\beta - \alpha)\, m > 0$$

ceea ce contrazice proprietatea lui f de a fi g-integrabilă. Astfel toate nivelele lui g sînt de măsură (L) nulă și nu mai rămîne decît să aplicăm lema 12.

TEOREMA 10. *Fiind dată o funcție mărginită și măsurabilă* $g : E \to (b, B)$, *o condiție necesară și suficientă ca g-integrabilitatea să fie mai generală decît integrabilitatea* (R) *este ca pentru orice mulțime deschisă G să existe o mulțime deschisă* $G^* \subset (b, B)$ *astfel încît* $g^{-1}(G^*) \subset G$ *iar mulțimea* $G - g^{-1}(G^*)$ *să fie de măsură* (L) *nulă în raport cu g.*

De fapt condiția „pentru orice mulțime deschisă G" poate fi înlocuită cu „pentru orice mulțime deschisă G a unei baze a spațiului (în particular o bază numărabilă de intervale deschise)".

Demonstrație. *Necesitatea.* Să presupunem că g-integrabilitatea este mai generală decît integrabilitatea (R). Fie M mulțimea valorilor funcției g^{-1} luate în punctele de discontinuitate ale sale. Știm că această mulțime este de măsură (L) nulă în raport cu g. Fie acum o mulțime deschisă G. Pentru orice punct $x \in G - M$ vom găsi, grație continuității lui g^{-1} în $g(x)$, o mulțime deschisă G_x^* cu $g^{-1}(G_x^*) \subset G$. Mulțimea $G^* = \bigcup_{x \in G - M} G_x^*$ va fi mulțimea căutată căci evident $g^{-1}(G^*) \subset G$ iar $G - g^{-1}(G^*) \subset M$ deci este de măsură (L) nulă în raport cu g.

Suficiența. Să presupunem condiția îndeplinită și fie $\{G_i\}$ o bază numărabilă a spațiului . Pentru orice G_i va exista o mulțime deschisă G_i^* cu proprietățile din enunț. Fie $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Din lema 11 rezultă că M este de măsură (L) nulă în raport cu g. Fie acum $x \in E - M$ și o mulțime deschisă $G_i \ni x$. Va exista o mulțime deschisă G^* cu $g^{-1}(G^*) \subset G_i$ deci g^{-1} este continuă în $g(x)$. Vom ține apoi seama de teorema 7.

Se pune acum întrebarea dacă există funcții g, astfel ca g-integrabilitatea să fie efectiv mai generală decît integrabilitatea (R). Răspunsul este afirmativ și, în cele ce urmează, vom defini o astfel de funcție.

Exemplul 1. Fie M și N două mulțimi măsurabile, disjuncte și peste tot dense în $[0, 1]$ (de exemplu mulțimea punctelor raționale și a celor irraționale). Vom defini funcția g în felul următor :

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ pentru } x \in M, \\ x + 2, \text{ pentru } x \in N. \end{cases}$$

g este evident măsurabilă şi discontinuă în toate punctele (deci nu poate fi integrabilă (R)). Pe de altă parte se verifică uşor că g^{-1} este continuă pe $g([0, 1])$. Din teoremele 4 şi 6 rezultă că g-integrabilitatea este efectiv mai generală decît integrabilitatea (R).

Observaţie. Dacă în enunţul teoremelor 5, 6, 7, 8 şi 10 adăugăm condiţia ca g să fie integrabilă (R) obţinem cinci condiţii necesare şi suficiente de echivalenţă a g-integrabilităţii cu integrabilitatea (R).

Vom considera acum cîteva cazuri particulare de funcţii g pentru care g-integrabilitatea este mai generală decît integrabilitatea (R).

TEOREMA 11. *Dacă g este continuă pe un interval, condiţia necesară şi suficientă ca g-integrabilitatea să fie echivalentă cu integrabilitatea (R) este ca g să fie strict crescătoare sau strict descrescătoare.*

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi că g este biunivocă. Să presupunem prin absurd că ar exista două puncte x_1 şi x_2 cu $g(x_1) = g(x_2)$. Mulţimea punctelor x pentru care $g(x) = g(x_1)$ fiind închisă şi de măsură nulă (teorema 9) va fi rară deci vor exista două puncte consecutive x_3 şi x_4 ale nivelului $g(x_1)$. Să presupunem că pe intervalul (x_3, x_4) g este superioară valorii $g(x_1) = g(x_3) = g(x_4)$ şi fie ξ un punct în care g atinge maximul pe intervalul $[x_3, x_4]$. Orice punct al intervalului $[x_3, \xi]$ are proprietatea că pe intervalul $(\xi, x_4]$ se găseşte un alt punct în care g ia aceeaşi valoare. Dar mulţimea acestor puncte (care în cazul nostru este $[x_3, x_4] - \{\xi\}$) nu poate fi decît de măsură nulă (teorema 6). Contradicţia la care am ajuns arată că g este biunivocă şi, cum este şi continuă pe un interval, rezultă că este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare.

TEOREMA 12. *Dacă funcţia măsurabilă g nu are puncte de discontinuitate de specia a II-a şi dacă nivelele lui g sînt constituite din cel mult un punct cu eventuala excepţie a unei mulţimi cel mult numărabilă de nivele, care să fie totuşi de măsură (L) nulă, atunci g-integrabilitatea şi integrabilitatea (R) sînt echivalente.*

Demonstraţie. Fie G graficul funcţiei. $\overline{G}$ va diferi de G printr-o mulţime cel mult numărabilă de puncte (conţinînd cîte cel mult două puncte pentru fiecare punct de discontinuitate, date de cele două limite laterale). Deci mulţimea valorilor în care $\tilde{g}^{-1}$ (definită ca în lema 8) nu este univalentă este dată de mulţimea cel mult numărabilă din enunţ (în punctele căreia g^{-1} nu este univalentă) reunită cu o mulţime cel mult numărabilă de nivele conţinînd puncte din frontiera exterioară a lui G. În total ea este cel mult numărabilă şi, cum orice nivel este de măsură (J) nulă în raport cu g (lema 12), rezultă că mulţimea valorilor lui g^{-1} în care $\tilde{g}^{-1}$ nu este univalentă este de măsură (L) nulă în raport cu g (lema 11) şi teorema este demonstrată, graţie teoremei 8.

Să observăm că în locul condiţiei „g nu are puncte de discontinuitate de specia a II-a" se putea lua condiţia mai generală „g are o mulţime cel mult numărabilă de puncte de discontinuitate iar în fiecare din acestea mulţimea limitelor diferite obţinute prin şiruri convergente către punctul respectiv este cel mult numărabilă".

COROLAR. *Dacă g este strict crescătoare sau strict descrescătoare, g-integrabilitatea este echivalentă cu integrabilitatea (R).*

§ 3. ALTE CONSIDERAȚII ASUPRA LUCRĂRILOR [1] ȘI [2]

În [2] (p. 467) se introduce noțiunea de oscilație în sens generalizat a lui f în x_0, ca fiind cantitatea:

$$\omega_f(x_0) = \inf_{\widetilde{E} \subset E} \{\omega_f(\widetilde{E})\},$$

unde $\widetilde{E}$ este măsurabilă și-l conține pe x_0.

Evident, dacă $x_0 \in \widetilde{E}^* \subset \widetilde{E} \subset E$ și $\widetilde{E}^*$ este măsurabilă, atunci $\omega_1(\widetilde{E}^*)$. este mai apropiată de $\omega_f(x_0)$ decît $\omega_f(\widetilde{E})$. De aceea, putem lua ca mulțimi $\widetilde{E}$ numai mulțimile formate din două puncte, x_0 și un alt punct $x \in E$. Deci

$$\omega_f(x_0) = \inf_{X \in E} \{|f(x) - f(x_0)|\}.$$

Să observăm că $\omega_f(x_0)$ este distanța dintre $f(x_0)$ și $f(E - \{x_0\})^*$ Dacă am fi „interpretat" definiția în sensul că și mulțimea $\{x_0\}$ poate fi luată ca o mulțime $\widetilde{E}$, atunci orice funcție, în orice punct, ar avea oscilația în sens generalizat egală cu zero. Deși această interpretare este mai „naturală" decît precedenta, nu o vom folosi în cele ce urmează, pentru a ne situa în cazul cel mai „nefavorabil".

În mod asemănător I. Cristea a definit și continuitatea în sens generalizat a lui f în x_0; pentru aceasta, trebuie ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o mulțime măsurabilă $\widetilde{E} \subset E$ cu $x_0 \in \widetilde{E}$, astfel ca $\omega_f(\widetilde{E}) < \varepsilon$ (ceea ce echivalează cu $\omega_f(x_0) = 0$). Înlocuind ca mai sus mulțimile $\widetilde{E}$ prin mulțimi formate din două puncte obținem următoarea condiție de continuitate generalizată a lui f în x_0

$$f(x_0) \in \overline{f(E - \{x_0\})}.$$

În interpretarea a doua de mai sus ar rezulta că orice funcție este continuă în sens generalizat în toate punctele mulțimii sale de definiție. Dar nu vom folosi nici această interpretare.

Se vede că punctele de discontinuitate generalizată sînt puncte izolate ale lui $f(E)$ (nu și reciproc!), oricare ar fi funcția f, măsurabilă sau nu, cu E măsurabilă sau nu), deci mulțimea lor este cel mult numărabilă fiind discretă. De altfel dacă f este mărginită (cu valori cuprinse între a și A), mulțimea punctelor în care oscilația în sens generalizat nu scade sub un număr $\varepsilon > 0$ este finită, avînd puterea inferioară numărului $\frac{A - a}{\varepsilon} + 1$.

Principalul defect al acestor definiții este acela că nu sînt ereditare în raport cu mulțimea de definiție a funcției: dacă se restrînge această mulțime cu păstrarea lui x_0, oscilația generalizată a funcției în acest punct nu scade (putînd crește efectiv), iar o funcție continuă în sens generalizat poate deveni discontinuă în același sens. Or, în cazul unor „osci-

laţii" şi „continuităţi" „corecte" (inclusiv cele în raport cu g definite de I. Cristea) lucrurile stau exact invers.

Teorema 15a din [2] este complet banală, căci pentru orice funcţie mărginită mulţimea punctelor $x \in E$ pentru care $\omega_f(x) \geqslant \varepsilon$ (sens generalizat) este finită. Oricum, în enunţul acestei teoreme s-ar fi putut lua o singură mulţime, reuniunea celor p mulţimi $\widetilde{E}_i$.

Teorema 15b din [2] este falsă, căci ar rezulta că orice funcţie mărginită este integrabilă în sensul celei de-a doua definiţii din [1] şi [2], deci şi integrabilă (L) (teorema 3 din prezenta lucrare) ceea ce nu este adevărat. Greşeala demonstraţiei constă în aceea că la p. 468 (rîndul 5 de jos) s-a majorat $\omega_f(E^*)$ cu ε.

În ceea ce priveşte teorema 16 din [2], în primul rînd enunţul suferă prin aceea că se putea lua o singură mulţime E_i. Apoi, necesitatea este banală iar suficienţa falsă, ca şi la teoremele 15a şi 15b.

Observaţia ce succede acestei teoreme devine lipsită de sens.

Lema 6 din [2] este evidentă, încît demonstraţia dată de autor, este inutilă. Pentru a dovedi necesitatea se putea lua „familia" formată din unica mulţime M iar pentru suficienţă, din faptul că măsura exterioară a lui M este inferioară oricărui $\sigma > 0$ rezultă că M este de măsură nulă.

Raţionamentul de la sfîrşitul paragrafului 5 ([2], p. 473) este incorect căci se bazează pe teoreme false, deşi concluzia este justă iar la p. 476 (rîndurile 16 şi 14 de jos) se fac referiri la teoreme dovedite false.

Primită la redacţie la 23 martie 1963

О НЕКОТОРЫХ „ОБОБЩЕНИЯХ" ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА И ЛЕБЕГА

РЕЗЮМЕ

В недавно вышедшей работе [1] и [2] И. Кристя дает два „обобщения" интегралов Римана и Лебега. Однако не показано, являются ли эти обобщения эффективными, высказывается лишь гипотеза, что интеграл Лебега и интеграл из [1] и [2] неэквивалентны.

В настоящей работе решается эта проблема. Вместе с тем делаются некоторые добавления к работам [1] и [2] и показывается неправильность некоторых критериев интегрирования из работы [2].

SUR QUELQUES « EXTENSIONS » DES INTÉGRALES DE RIEMANN ET DE LEBESGUE

RÉSUMÉ

Dans deux travaux récents ([1] et [2]), I. Cristea a présenté deux « extensions » des intégrales de Riemann et de Lebesgue. Il n'a cependant

pas montré si ces généralisations sont effectives, mais s'est contenté d'émettre l'hypothèse que l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de [1] et [2] ne sont pas équivalentes.

Dans le présent travail, l'auteur résout ce problème. En outre, il donne quelques complétements aux travaux [1] et [2], tout en montrant que certains critères d'intégrabilité dans [2] sont faux.

BIBLIOGRAFIE

1. ION I. CRISTEA, *Două extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue. I.* St. cerc. mat., **XIII**, *1*, 75—96 (1962).
2. — *Două extinderi ale integralelor Riemann şi Lebesgue. II.* St. cerc. mat., **XIII**, *3*, 459—478 (1962).

ESTIMAȚIA UNEI DENSITĂȚI DE REPARTIȚIE K-DIMENSIONALĂ [1)]

DE

I. VĂDUVA

1. *Introducere.* E. Parzen [1] introduce și studiază estimația densității de repartiție a unei variabile aleatoare. În lucrarea de față se definește și se studiază estimația densității de repartiție a unui vector aleator.

Să considerăm un vector aleator K-dimensional $X \in R_K$. Fie $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(k)})$ și $x = (x_1, \ldots, x_k)$.

Vom nota $X < x$, dacă $X^{(i)} < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, K)$ și deci funcția de repartiție a vectorului X este

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_k) = P(X < x).$$

Fiind dată selecția întîmplătoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ asupra vectorului aleator X, atunci estimația $F_n(x)$ a funcției de repartiție $F(x)$ este dată de expresia

$$F_n(x) = \frac{\text{nr. vectorilor } \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} < x}{n} \tag{1.1}$$

și ea este o estimație absolut corectă, adică

$$\mathcal{M}[F_n(x)] = F(x),$$

$$\mathcal{D}^2[F_n(x)] = \frac{[1 - F(x)]F(x)}{n}.$$

Să presupunem că funcția de repartiție $F(x)$ admite o densitate de repartiție $f(x)$ a cărei expresie este

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k F(x)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_k}. \tag{1.2}$$

[1)] Prezentată la Conferința de matematică bulgaro-română, Sofia, 14 – 15 mai 1963.

Bazîndu-ne pe (1.2) și urmînd o cale analogă cu cea a lui Parzen [1], vom considera ca estimație a lui $f(x)$, funcția $f_n(x)$ definită de relația

$$f_n(x) = \frac{\Delta_h^k F_n(x)}{2^k h_1 \dots h_k}, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_k), \tag{1.3}$$

unde $\Delta_h^k F_n(x)$ este diferența de ordinul k asociată lui $F_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ în modul cunoscut iar h este un vector de componente pozitive. De exemplu pentru $k = 2$ avem

$$F_n(x) = F_n(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - F_n(x_1 + h_1, x_2 - h_2) - F_n(x_1 - h_1, x_2 + h_2) + F_n(x_1 - h_1, x_2 - h_2).$$

Desigur estimația (1.3) depinde de alegerea lui h care la rîndul său depinde de volumul n al selecției.

În consecință, vom presupune $h = (h_1(n), h_2(n), \dots, h_k(n))$, unde funcțiile $h_i(n)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ au valori pozitive.

2. *O clasă de estimații corecte pentru* $f(x)$. Estimația (1.3) se poate scrie

$$f_n(x) = \frac{1}{n h_1(n) h_2(n) \dots h_k(n)} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x_1 - X_{j,1}}{h_1(n)}, \frac{x_2 - X_{j,2}}{h_2(n)}, \dots, \frac{x_k - X_{j,k}}{h_k(n)}\right) = \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{h_1(n) h_2(n) \dots h_k(n)} \int K\left(\frac{x_1 - y_1}{h_1(n)}, \frac{x_2 - y_2}{h_2(n)}, \dots, \frac{x_k - y_k}{h_k(n)}\right) \mathrm{d}F_n(y_1, \dots, y_k),$$

unde $X_{j,1}, \dots, X_{j,k}$ sînt componentele vectorului X_j $(j = 1, 2, \dots, n)$ iar funcția $K(y)$ este definită de relația

$$K(y) = K(y_1, \dots, y_k) = \begin{cases} \frac{1}{2k}, & \|y\| \leqslant 1, \\ 0, & \|y\| > 1, \end{cases} \tag{2.2}$$

cu $\|y\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \|y_i\|$.

În continuare vom determina pentru $K(y)$ proprietăți convenabile astfel ca $f_n(x)$ să fie o estimație corectă pentru $f(x)$.

Pentru aceasta prezentăm cu unele mici modificări o teoremă a lui Bochner [5].

TEOREMA 1. *Fie $K(y)$, $y \in R_k$, o funcție reală măsurabilă cu proprietățile* [2])

$$\sup_{y \in R_k} |K(y)| < \infty \tag{2.3}$$

$$\int |K(y)| \, dy < \infty, \tag{2.3'}$$

$$\sup_{\|y\|>a} \|y\| \cdot |K(y)| = M < \infty, \; a > 0, \tag{2.3''}$$

unde

$$\|y\| = \max_i |y_i|. \tag{2.4}$$

Fie $h(n) = (h_1(n), h_2(n), \ldots, h_k(n))$, un vector din R_k care depinde de n, ale cărui componente sînt toate pozitive și care are proprietatea

$$\lim_{n \to \infty} \|h(n)\| = 0. \tag{2.5}$$

Fie $g(y)$ o funcție definită pe R_k care satisface proprietatea

$$\int g(y) \, dy < \infty. \tag{2.6}$$

Definim

$$g_n(x) = \frac{1}{h_1 \ldots h_k} \int K\left(\frac{y_1}{h_1}, \frac{y_2}{h_2}, \ldots, \frac{y_k}{h_k}\right) g(x-y) \, dy. \tag{2.7}$$

Atunci în toate punctele x de continuitate ale lui g este satisfăcută proprietatea

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x) \int K(y) \, dy. \tag{2.8}$$

Demonstrație. Facem în integrala din (2.8) transformarea $y = Az$ unde

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & h_k \end{pmatrix}.$$

[2]) Convenim să notăm de aici înainte $\int f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_k) \, dx_1 \ldots dx_k$.

Putem atunci scrie

$$g_n(x) - g(x)\,K(y)\,dy = \frac{1}{h_1 \dots h_k}\int [g(x-y)-g(x)]K\left(\frac{y_1}{h_1}\dots\frac{y_k}{h_k}\right)dy$$

şi descompunem spaţiul R_k în două părţi astfel

$$R_k = \{y \mid \| y \| \leqslant \delta\} \cup \{y \mid \| y \| > \delta\},$$

unde $\delta > 0$, fix.

Deci

$$|g_n(x) - g(x)\int K(y)\,dy| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant\delta} |g(x-y)-g(x)| \cdot \left|\frac{1}{h_1\dots h_k}\int_{\|y\|\leqslant\delta} K(y)\,dy\right| +$$

$$+\int_{\|y\|>\delta} \frac{|g(x-y)|}{\|y\|}\cdot\left|\frac{\|y\|}{h_1(n)\,h_2(n)\dots h_k(n)}\,K\left(\frac{y_1}{h_1},\frac{y_2}{h_2},\dots,\frac{y_k}{h_k}\right)\right|dy +$$

$$+|g(x)|\cdot\left|\frac{1}{h_1 h_2\dots h_k}\int_{\|y\|>\delta} K(y)\,dy\right| \leqslant \sup_{\|y\|\leqslant\delta}|g(x-y)-g(x)|\cdot\int_{\|z\|\leqslant\frac{\delta}{\|h(n)\|}}|K(z)|\,dz +$$

$$+|g(x)|\int_{\|z\|>\frac{\delta}{\|h(n)\|}}|K(z)|\,dz + \frac{1}{\delta}\|A\|\cdot\sup_{\|z\|>\frac{\delta}{\|h(n)\|}}\|z\|\cdot|K(z)|\int|g(z)|\,dz.$$

Presupunînd că δ este ales astfel încît pentru $\varepsilon > 0$ să avem $|g(x - y) - g(x)| < \varepsilon$ (din cauza continuităţii lui g în punctul x), rezultă că primul termen din membrul doi al ultimei inegalităţi de mai sus tinde spre zero cînd $n \to \infty$. Deoarece $\|A\| = \|h(n)\|$ [2] din cauza condiţiilor (2.3″), (2.5) şi (2.6), rezultă că şi ultimul termen tinde către zero cînd $n \to \infty$. În sfîrşit, cînd $n \to \infty$, al doilea termen tinde către zero din cauza condiţiei (2.3′).

Cu aceasta teorema este demonstrată.

COROLARUL 1. *Dacă în afară de condiţiile impuse de teorema 1, funcţia pondere satisface condiţia*

$$\int K(y)\,dy = 1 \tag{2.9}$$

atunci estimaţia definită de (2.2) *este o estimaţie corectă pentru densitatea teoretică de repartiţie.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din (2.2) rezultă

$$\mathcal{M}[f_n(x)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{M}\left[\frac{1}{h_1\dots k_k}K\left(\frac{x_1 - X_{j,1}}{h_1},\dots,\frac{x_k - X_{j,k}}{h_k}\right)\right] =$$

$$= \mathcal{M}\left[\frac{1}{h_1\dots h_k}K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1},\dots,\frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right]$$

adică

$$\mathcal{M}[f_n(x)] = \int \frac{1}{h_1 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - y_1}{h_1}, \dots, \frac{x_k - y_k}{h_k}\right) f(y)\, dy, \quad (2.10)$$

unde $f(y)$ este densitatea teoretică de repartiție a vectorului X. Conform teoremei 1, din (2.10) rezultă afirmația corolarului.

Dacă funcția $K(y)$, $y \in R_k$, satisface condițiile teoremei 1, precum și condiția (2.9) și dacă în plus este pară, atunci ea se numește funcție pondere.

Estimația densității de repartiție $f_n(x)$ se determină prin formula (2.2) cu ajutorul unei funcții pondere $K(y)$. Dăm cîteva exemple de funcții pondere

$$K_1(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} v_j^2},$$

$$K_2(y) = \frac{1}{2^k} e^{-\sum_{j=1}^{k} |v_j|}.$$

Întrucît există o mulțime de funcții pondere, rezultă că există o clasă destul de mare de estimații corecte de forma (2.2) pentru densitatea de repartiție $f(x)$.

3. *Studiul dispersiei estimației* (2.2). *Consistența și normalitatea asimptotică a estimației.*

TEOREMA 2. *Dispersia estimației* (2.2) *tinde la zero dacă în afară de condițiile precizate mai sus este satisfăcută relația*

$$\lim_{n \to \infty} n h_1(n) \dots h_k(n) = \infty. \quad (3.1)$$

Demonstrație. Dispersia estimației $f_n(x)$ este

$$\mathcal{D}^2[f_n(x)] = \frac{1}{n} \mathcal{D}^2\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right].$$

Dar

$$\mathcal{D}^2\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} \mathcal{M}\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K^2\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right] -$$

$$- \left[\mathcal{M}\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right]\right]^2.$$

Deoarece funcția $K^2(y)$ satisface condițiile teoremei 1 rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} h_1 h_2 \dots h_k \mathcal{D}^2\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right] =$$

$$= f(x)\int K^2(y)\,dy - \lim_{n\to\infty} h_1 h_2 \dots h_k \left[\mathcal{M}\left[\frac{1}{h_1 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right]\right]^2.$$

Ultimul termen din membrul al doilea al ultimei egalități tinde spre zero cînd $n \to \infty$, deci

$$\lim_{n\to\infty} h_1 h_2 \dots h_k \mathcal{D}^2\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right] =$$

$$= f(x)\int K^2(y)\,dy.$$

În consecință

$$\lim_{n\to\infty} n\, h_1 h_2 \dots h_k \mathcal{D}^2[f_n(x)] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} h_1 h_2 \dots h_k \mathcal{D}^2\left[\frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right)\right] =$$

$$= f(x)\int K^2(y)\,dy$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}^2[f_n(x)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\, h_1 h_2 \dots h_k} f(x)\int K^2(y)\,dy = 0.$$

Cu aceasta teorema este demonstrată.

COROLARUL 2. *Dacă condiția* (3.1) *este satisfăcută, atunci estimația* (2.2) *este consistentă în sensul că*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}[f_n(x) - f(x)]^2 = 0. \tag{3.2}$$

Demonstrație. Se observă că

$$\mathcal{M}[f_n(x) - f(x)]^2 = \mathcal{M}[f_n(x) - \mathcal{M}[f_n(x)] + \mathcal{M}[f_n(x)] - f(x)]^2 =$$

$$= \mathcal{D}^2[f_n(x)] + 2\,\mathcal{M}[f_n(x) - \mathcal{M}[f_n(x)]]\cdot[\mathcal{M}[f_n(x)] - f(x)] +$$

$$+ [\mathcal{M}[f_n(x)] - f(x)]^2.$$

Conform teoremelor 1 și 2, rezultă afirmația corolarului.

TEOREMA 3. *Estimațiile de forma* (2.2) *sînt asimptotic normale adică*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{f_n(x) - \mathcal{M}[f_n(x)]}{\mathcal{D}^2[f_n(x)]}\right| \leqslant C\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-c}^{+c} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy. \tag{3.3}$$

Demonstrație. Constatăm că

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} V_{n,j}(x) = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} \sum_j K\left(\frac{x_1 - X_{j,1}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X_{j,k}}{h_k}\right),$$

unde variabilele aleatoare $V_{n,j}$ au repartiții identice cu variabila

$$V_n(x) = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - X^{(1)}}{h_1}, \dots, \frac{x_k - X^{(k)}}{h_k}\right).$$

În [3] se arată că (3.3) are loc dacă este satisfăcută următoarea condiție a lui Liapunov:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{M} \mid V_n - \mathcal{M}[V_n] \mid^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}} \mathcal{D}^{2+\delta}[V_n]} = 0, \tag{3.3'}$$

unde $\delta > 0$.

Va fi deci suficient să verificăm condiția (3.3').

Într-adevăr, rezultă că

$$\mathcal{M} \mid V_n \mid^{2+\delta} = \int \left| \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_k} K\left(\frac{x_1 - y_1}{h_1}, \dots, \frac{x_k - y_k}{h_k}\right) \right|^{2+\delta} f(y)\, dy \sim$$

$$\sim \frac{1}{(h_1 \dots h_k)^{1+\delta}} f(x) \int \mid K(y) \mid^{2+\delta} dy \leqslant \frac{1}{(h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\delta}} f(x) \times$$

$$\times \max_y \mid K(y) \mid^{1+\delta} \int K(y)\, dy < \infty.$$

De asemenea, dintr-o proprietate cunoscută rezultă că

$$(h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\delta} \mathcal{M} \mid V_n - \mathcal{M}[V_n] \mid^{2+\delta} \leqslant (h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\delta} \mathcal{M} \mid V_n \mid^{2+\delta} < \infty.$$

Din cele constatate cu ocazia demonstrației teoremei 2, rezultă că

$$h_1 h_2 \dots h_k \mathcal{D}^2[V_n] \sim f(x) \int K^2(y)\, dy < \infty^3).$$

Expresia din (3.3') se poate deci scrie

$$\frac{(h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\delta} \mathcal{M} \mid V_n - \mathcal{M}[V_n] \mid^{2+\delta}}{(n h_1 h_2 \dots h_k)^{\frac{\delta}{2}} (h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\frac{\delta}{2}} \mathcal{D}^{2+\delta}[V_n]} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(h_1 h_2 \dots h_k)^{1+\delta} \mathcal{M} \mid V_n \mid^{2+\delta}}{(n h_1 h_2 \dots h_k)^{\frac{\delta}{2}} (h_1 \dots h_k)^{1+\frac{\delta}{2}} \mathcal{D}^{2+\delta}[V_n]} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right)$$

---

[3]) Semnul $\sim$ înseamnă că egalitățile scrise au loc asimptotic.

şi deoarece

$$\lim_{n\to\infty} O\left(\frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}}\right) = 0$$

rezultă că relaţia (3.3′) este satisfăcută şi deci teorema este demonstrată.

Primită la redacţie la 30 mai 1963

ОЦЕНКА ОДНОЙ K-РАЗМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Обобщая результаты Парзена [1], дается определение оценки плотности распределения некоторого случайного вектора.

Оценка определяется формулой (1.2) с помощью весовой функции $K(y)$, которая удовлетворяет (1,3) — (1,4) и (1.9). Показывается, что оценка таким образом сделанная — правильна, состоятельна по среднему квадратичному и нормальна асимптотически.

Три свойства являются результатом трех доказанных теорем.

ESTIMATION D'UNE DENSITÉ DE RÉPARTITION À K-DIMENSIONS

RÉSUMÉ

En généralisant les résultats fournis par Parzen [1], l'auteur donne ici la définition de l'estimation de la densité de répartition d'un vecteur aléatoire.

L'estimation est définie par la formule (1.2) à l'aide de la fonction poids $K(y)$, qui satisfait à (1.3), (1.4) et (1.9). L'auteur montre que l'estimation ainsi définie est correcte, consistante en moyenne quadratique et asymptotiquement normale.

Les trois propriétés résultent des trois théorèmes démontrés par l'auteur.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Parzen, *On estimation of a Probability Density Function and Mode.* Ann. Math. Stat., **33**, *3*, 1065–1076 (1962).
2. Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева, *Вычислительные методы линейной алгебры.* Физматгиз, Москва, 1960.
3. M. Loève, *Теория вероятностей*, Изд. иностр. лит., Москва, 1962, VI, §§ 19,20.
4. O. Onicescu, Gh. Mihoc, *Lecţii de statistică matematică.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
5. С. Бохнер, *Лекции об интегралах Фурье.* Гос. изд. физ. мат. лит., Москва, 1962, IX.

DESPRE ŞIRURILE EXACTE ASOCIATE APLICAŢIILOR

DE

DAN BURGHELEA

INTRODUCERE

În această lucrare se demonstrează:

1. Exactitatea şirului asociat aplicaţiei $f: X \to Y$

$$\cdots \to H_q(X) \to H_q(Y) \to H_q(C_f) \to H_{q-1}(X) \to \cdots$$

(unde C_f este un spaţiu pe care-l vom defini), ca consecinţă a axiomelor lui Eilenberg-Steenrod [1], şir parţial considerat (primii 3 termeni de *Hu* în [2].

Acest şir sugerează definirea grupurilor de omologie (coomologie), ale unei aplicaţii $f: X \to Y$ ca grupuri ale spaţiului C_f, definiţie care pentru omologia singulară şi simplicială coincide cu definiţia dată în [1] şi la fel pentru coomologia omotopică [3].

Acest procedeu permite o generalizare şi anume posibilitatea definirii grupurilor de omologie (coomologie) ale aplicaţiilor de perechi ca grupuri de omologie (coomologie) a perechilor de spaţii (şirul 3), lucru ce se dovedeşte de un real folos în raţionamentele ce uzează de operaţii omologice [4].

2. Exactitatea şirului asociat aplicaţiilor $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

$$\cdots \to H_q(f) \to H_q(f \cdot g) \to H_q(g) \to H_{q-1}(f) \to \cdots$$

unde prin $H_q(f)$ înţelegem $H_q(C_f)$.

3. Exactitatea şirului asociat aplicaţiei $f: (A, B) \to (E, F)$

$$\cdots \to H_q(f_B^F) \to H_q(f_A^E) \to H_q(f_{A,B}^{E,F}) \to H_{q-1}(f_B^F) \to \cdots$$

unde f_B^F este restricţia lui f la B, considerată ca aplicaţie a lui B în F, iar f_A^E este restricţia lui f la A, considerată ca aplicaţie a lui A în E (această notă constituie un preliminariu pentru [4]).

1. Fie $f: X \to Y$ și C_f spațiul $X \times I \cup Y/R$, unde R este următoarea relație de echivalență:

$$\begin{cases} aRa, & \text{dacă } a \in Y, \\ aRb, & a \in X \times 1,\ b \in Y, \text{ dacă } f(a) = b, \\ aRc, & \text{dacă } a, c \in X \times 0. \end{cases}$$

LEMA 1.1. *Fie* $Z_\alpha = X \times [\alpha, 0]$ *unde se identifică la un singur punct* $X \times 0$ *și* $0 < \alpha < 1$; *perechile* (C_f, Y), $(C_f, C_f \setminus Z_\alpha)$ *sînt omotop echivalente.*

Fie diagrama

$$\begin{array}{ccc} (C_f, C_f \setminus Z_\alpha) & \xrightarrow{r} & (C_f, Y) \\ \uparrow e & & \uparrow \bar{f} \\ (Z_\beta, Z_\beta \setminus Z_\alpha) & \xrightarrow{h} & (CX, X) \end{array}$$

unde r este aplicația de echivalență omotopică a lui $(C_f, C_f \setminus Z_\alpha) \to (C_f, Y)$, e este aplicația de excizie (a se vedea [1]), h este un omeomorfism al conului $[1, 0] \times X$ cu $0 \times X$ identificat la un punct, pe conul $[\beta, 0] \times X$ cu $0 \times X$ identificat la punct, omeomorfism determinat de omeomorfismul liniar al lui $[1, 0] \to [\beta, 0]$ și de aplicația identică pe X, iar $\bar{f}$ este definit prin

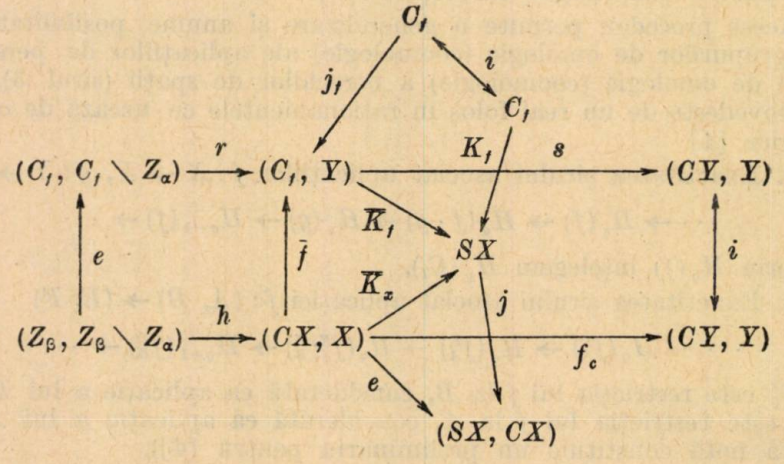
$$\bar{f} = \begin{cases} \bar{f}(a \times x) = a \times x, & a \in [0,1), \quad x \in X, \\ \bar{f}(1 \times x) = f(x), \end{cases}$$

ar $0 < \alpha < \beta < 1$.

LEMA 1.2. *Diagrama de mai sus este omotop comutativă adică* $r \cdot e$ *și* $\bar{f} \cdot h$ *sînt omotope.*

În consecință, trecînd la grupurile de omologie, aceste aplicații vor induce o diagramă de omomorfisme care va fi comutativă.

Fie diagrama

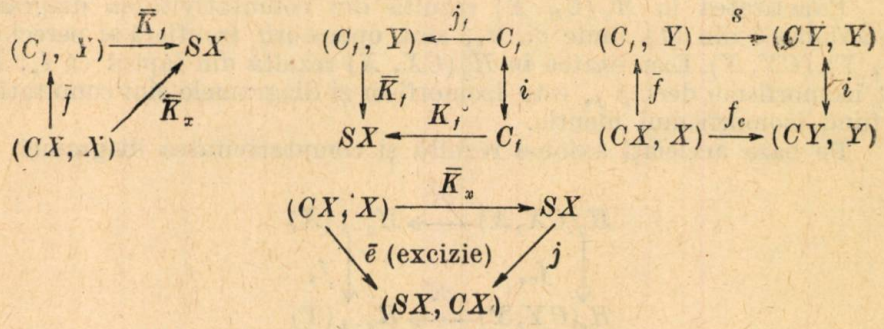


unde j_f este aplicația de incluziune de la $C_f \to (C_f, Y)$, K_f este aplicația de factorizare $C_f \to C_f/Y = SX$, $\overline{K}_f$ aceeași aplicație considerată ca aplicație a perechii $(C_f, Y) \to SX$, $\overline{K}_x$ aplicația de factorizare $CX \to CX/X = SX$ considerată ca aplicație a perechii $(CX, X) \to SX$, j aplicația de incluziune a lui SX în perechea (SX, CX), f_c aplicația indusă de f la perechile $(CX, X) \to (CY, Y)$, iar s este aplicația definită în felul următor

$$\begin{cases} s(t \times x) = (t, f(x)), & \text{dacă } (t \times x) \in C \setminus Y \\ s(Y) = Y, & \text{dacă } z \in Y \subset C_f, \end{cases}$$

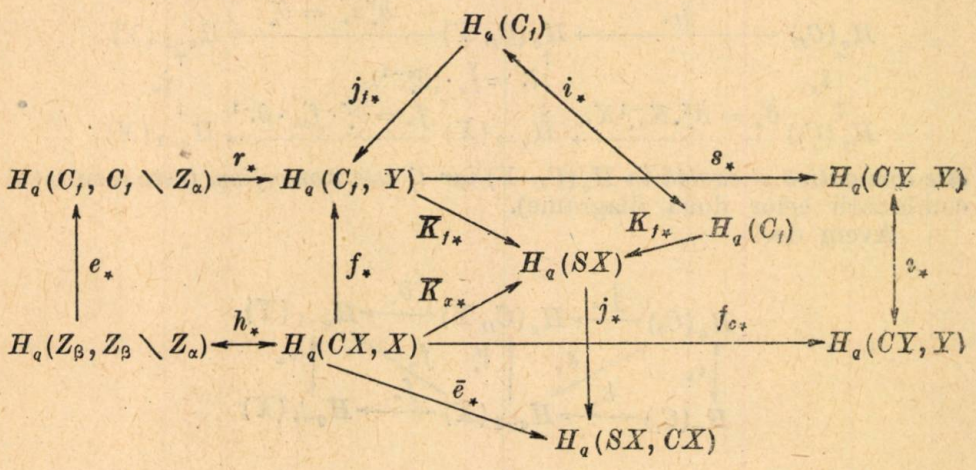
considerată ca aplicație a perechii $(C_f, Y) \to (CY, Y)$.

Este evident că diagramele



sînt comutative. Trecînd la grupurile de omologie, aceste diagrame induc diagrame de omomorfisme comutative și de asemenea o diagramă comutativă de omomorfisme pentru diagrama considerată de lema 1.2 care este omotop comutativă.

Avem deci următoarea diagramă comutativă



Din axioma de excizie (a se vedea [1], cap. 1) e_* este izomorfism și tot izomorfisme sînt h_*, r_*, i_* (toate cele 3) deci $\bar{f}_*$, $\bar{e}_*$ j_* deci și $\overline{K}_{x*}$ (concluziile sînt datorate comutativității diagramei).

LEMA 1.3. *Diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(C_f) & \xrightarrow{j_{f*}} & H_q(C_f, Y) & \xrightarrow{S_*} & H_q(CY, Y) & \overset{\partial_*}{\Longleftrightarrow} & H_{q-1}(Y) \\ \downarrow i_* & & \uparrow \bar{f}_* & & \downarrow i_* & & \downarrow i_* \\ H_q(C_f) & \xrightarrow{K_{X*}^{-1}K_{f*}} & H_q(CX, X) & \xrightarrow{f_{c*}} & H_q(CY, Y) & \overset{\partial_*}{\Longleftrightarrow} & H_{q-1}(Y) \end{array}$$

este comutativă și exactă în $H_q(C_f, Y)$ (*pe orizontal*).

Într-adevăr, comutativitatea primelor două dreptunghiuri reiese din diagrama studiată anterior.

Ultimul dreptunghi este evident comutativ.

Exactitatea în $H_q(C_f, Y)$ rezultă din comutativitatea diagramei din axioma 3 din [1], unde ∂'_*, ∂_*, sînt operatorii frontieră ai perechilor $(C_f, Y), (CY, Y)$. Exactitatea în $H_q(CX, X)$ rezultă din faptul că i_*, K_{f*} sînt izomorfisme deci și $_{f*}$ este izomorfism și diagramele sînt comutative, i_* fiind izomorfismul identic.

Pe baza aceleiași axiome rezultă și comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccc} H_q(CX, X) & \xrightarrow{\partial_*^X} & H_{q-1}(X) \\ \downarrow f_{c*} & & \downarrow f_* \\ H_q(CY, Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y} & H_{q-1}(Y) \end{array}$$

unde ∂_*^X și ∂_*^Y sînt operatorii frontieră ai perechilor (CX, X), (CY, Y) care sînt izomorfisme.

Ca concluzie imediată rezultă

LEMA 1.4. *Diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} H_q(C_f) & \xrightarrow{j_{f*}} & H_q(C_f, Y) & \xrightarrow{\partial_*^Y s_* = \partial'_*} & H_{q-1}(Y) \\ \uparrow i_* & & \uparrow l'_* = \bar{f}_* \cdot (\partial_*^{X-1}) & & \uparrow i_* \\ H_q(C_f) & \xrightarrow{\partial_* = \partial_*^X K_{X*}^{-1} K_{f*}} & H_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_* = \partial_*^Y \cdot f_{c*} \cdot \partial_*^{-1}} & H_{q-1}(Y) \end{array}$$

este comutativă și exactă în $H_q(C_f, Y)$ *iar* l'_f *este izomorfism* (este rezultatul combinării celor două diagrame).

Avem deci

$$\begin{array}{ccccc} H_q(C_f) & \xrightarrow{j_{f*}} & H_q(C_f, Y) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{q-1}(Y) \\ \uparrow i_* & \searrow^{\delta_*} & \uparrow l'_* & \nearrow_{f_*} & \uparrow i_* \\ H_q(C_f) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_{q-1}(Y) \end{array}$$

comutativă și exactă în $H_q(C_f, Y)$, iar l'_* este izomorfism.

În definitiv avem demonstrația pe baza exactității șirului asociat perechii (C_f, Y) (axioma șirului exact).

TEOREMA 1.5. *Șirul*

$$\cdots \to H_q(X) \xrightarrow{f_*} H_q(Y) \xrightarrow{i_{f*}} H_q(Cf) \xrightarrow{\delta_*} H_{q-1}(X) \to \cdots$$

este exact.

D e f i n i ț i e. *Grupurile de omologie ale aplicației f sînt grupurile de omologie ale spațiului* C_f.

Considerînd acum categoria α ale cărei obiecte sînt constituite din aplicații $f: X_1 \to Y_1$, $g: X_2 \to Y_2$, ... și morfisme, din perechi de aplicații α_X, α_Y, $\alpha_X: X_1 \to X_2$, $\alpha_Y: Y_1 \to Y_2$ pentru care diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Y} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

este comutativă, $H_1(f)$, ... $H_n(f)$ ... formează un sistem de functori cu valori în categoria grupurilor abeliene.

Pentru a demonstra acest lucru se arată mai întîi că corespondența care asociază obiectului $f: X_1 \to X_2$ din categoria α obiectul Cf din categoria spațiilor topologice, definește un functor C iar $H_i(f) = H_i(Cf)$ este compunerea acestui functor C cu functorul $H_i(X)$ care asociază spațiului X grupul de omologie $H_i(X)$.

Corespondența $H_n(f) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(X)$ definită prin δ_* este un morfism functorial.

2. TEOREMA 2.1. *Date fiind aplicațiile* $f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$ *și* $f \cdot g: X_1 \to X_3$ *avem următorul șir exact*

$$\cdots \to H_q(f) \xrightarrow{g^*} H_q(g \cdot f) \xrightarrow{f^*} H_q(g) \xrightarrow{\delta^*} H_{q-1}(f) \to \cdots,$$

unde g^* *este indus de morfismul* (i, g) *al lui* f *în* $f.g$, f^* *de morfismul* (f, i) *al lui* $f \cdot g$ *în* g, *iar* $\delta^* = \delta_* \cdot i_{f*}$.

D e m o n s t r a ț i e. Se consideră diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(X_2) & \xrightarrow{f_*} & H_q(X_3) & & & & \\ \downarrow{\scriptstyle i_{f*}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{fg*}} & & & & \\ H_q(f) & \xrightarrow{g^*} & H_q(g \cdot f) & \xrightarrow{f^*} & H_q(g) & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \delta_*} & & \downarrow{\scriptstyle \delta_*} & & \\ & & H_{q-1}(X_1) & \xrightarrow{f_*} & H_{q-1}(X_2) & \xrightarrow{g_*} & H_{q-1}(X_3) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle i_{f*}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{fg*}} \\ & & & & H_{q-1}(f) & \xrightarrow{g^*} & H_{q-1}(g \cdot f) \end{array}$$

Verificarea exactității urmează același procedeu ca cel descris în [1] pentru triplete $A \subset B \subset C$.

3. Definiție. $H_q(f^{E,F}_{A,B})$ *unde* $f:(A,B)\to(E,F)$ *este o aplicație de perechi, este* $H_q(Cf^E_A, Cf^F_B)$ *căci evident* $Cf^F_B \subset Cf^E_A$. Considerînd șirul exact al perechii (Cf^E_A, Cf^F_B) obținem

COROLARUL 3.1. *Șirul*

$$\cdots \to H_q(f^F_B) \xrightarrow{i_*} H_q(f^E_A) \xrightarrow{j_*} H_q(f^{E,F}_{A,B}) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(f^F_B) \to \cdots$$

este exact.

Remarca 1. În toate considerațiile făcute pînă aici nu am precizat grupul coeficienților și nici felul omologiei[1]).

Toate aceste raționamente sînt valabile pentru orice teorie Eilenberg-Steenrod de omologie și orice grup de coeficienți.

De asemenea, toate rezultatele rămîn perfect adevărate pentru coomologie, cu condiția ca la diagramele de omomorfisme și la șirul de omomorfisme să schimbăm sensul săgeților.

Primită la redacție la 26 mai 1963

О ТОЧНЫХ РЯДАХ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

РЕЗЮМЕ

В настоящей заметке доказывается:

1) Точность ряда, присоединенного приложению $f: X \to Y \cdots$ $\cdots \to H_q(X) \to H_q(Y) \to H_q(Cf) \to H_{q-1}(X) \to \cdots$ и следовательно, аксиома Эйленберга-Стинрода, ряда, частично расмотренного Хью в [2].

Этот ряд подсказывает идею об определении групп гомологии (согомологии) приложения $f: X \to Y$ как групп пространства Cf; определение эквивалентно известным определениям для сингулярной и симплициальной гомологий (согомологий), а также для гомотопической согомологии.

Эта точка зрения позволяет сделать обобщение, а именно определить группы гомологии пар пространств, что оказывает реальную помощь в рассуждениях, использующих гомологические операции [4].

2) Точность ряда, присоединенного приложениям $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

$$\cdots \to H_q(f) \to H_q(f \cdot g) \to H_q(g) \to H_{q-1}(f) \to \cdots$$

[1]) Singura condiție ce o cerem asupra categoriei de perechi de spații topologice și aplicații cotinue de perechi, pentru care se consideră o teorie axiomatică Eilenberg-Steenrod, este ca toate funcțiile pe care le folosim în demonstrație să fie admise, de categoria teoriei considerate.

3) Точность ряда, присоединенного приложению $f:(A, B)\to(E, F)$

$$\cdots\to H_q(f_B^F)\to H_q(f_A^E)\to H_q(f_{A;B}^{E;F})\to H_{q-1}(f_B^E)\to\cdots$$

(Настоящая заметка предшествует работе [4]).

SUR LES SUITES EXACTES ASSOCIÉES AUX APPLICATIONS

RÉSUMÉ

Dans cette communication on prouve

1) L'exactitude de la suite associée à l'application $f: X\to Y$

$$\cdots\to H_q(X)\to H_q(Y)\to H_q(Cf)\to H_{q-1}(X)\to\cdots$$

comme conséquence des axiomes d'Eilenberg-Steenrod, la suite en partie considérée par Hu dans [2].

Cette suite indique la définition des groupes d'homologie (co-homologie) d'une application $f: X\to Y$ comme groupes de l'espace Cf; la définition désigne des groupes connus pour l'homologie singulière et simpliciale, et aussi pour la co-homologie (homotopique). Ce procédé permet une généralisation; c'est-à-dire la possibilité de définir les groupes d'homologie des paires d'espaces, ce qui prouve son utilité dans les raisonnements relatifs aux opérations homologiques [4].

2) L'exactitude de la suite associée aux applications $f: X\to Y$ $g: Y\to Z$

$$\cdots\to H_q(f)\to H_q(f\cdot g)\to H_q(g)\to H_{q-1}(f)\to\cdots$$

3) L'exactitude de la suite associée à l'application $f:(A, B)\to(E, F)$

$$\cdots\to H_q(f_B^F)\to H_q(f_A^E)\to H_q(f_{A;B}^{E;F})\to H_{q-1}(f_B^F)\to\cdots$$

(Cette communication est antérieure à [4]).

BIBLIOGRAFIE

1. S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*. Princeton, 1952.
2. Hu Sze Tsen, *On axiomatic approach to homology theory without uesing the relative groups*. Portugaliae Mathematica, **19** (1960).
3. B. Eckman, P. Hilton, *Groupes d'homotopie et dualité*. C. R. Acad. Sci. Paris, *17*, 2444–2447 (1958).
4. D. Burghelea, *Sur les applications q-triviales* (va apărea).

ASUPRA SPAȚIILOR V_3 CU CONEXIUNE AFINĂ CONSTANTĂ LOCAL EUCLIDIENE

DE

EFTIMIE I. GRECU

I

Urmînd o idee a acad. prof. Gh. Vrănceanu, ne propunem în lucrarea de față să determinăm spațiile V_3 cu conexiune constantă local euclidiene, întrebuințînd reducerea la forma canonică a conexiunii unui A_3, local euclidian care a fost dată de P. Mocanu în [3].

Se știe că un spațiu riemannian V_n este cu conexiune constantă dacă există un sistem de variabile $x^1, x^2, \cdots, x^n$ în care simbolurile lui Christoffel de a doua speță ai metricei lui V_n

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

presupusă ca fiind nedegenerată, sînt constanți.

A determina spațiile V_n cu conexiune constantă înseamnă să găsim soluțiile sistemului cu diferențiale totale

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{is}\,\Gamma^s_{jk} + a_{js}\,\Gamma^s_{ik} = 0 \tag{2}$$

ale cărui condiții de integrabilitate sînt

$$\begin{aligned} &a_{is}\,\Gamma^s_{jkl} + a_{js}\,\Gamma^s_{ikl} = 0, \\ &a_{is}\,\Gamma^s_{jkl,\,p} + a_{js}\,\Gamma^s_{ikl,\,p} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

unde Γ^i_{jkl} sînt componentele tensorului de curbură al spațiului V_n, iar $\Gamma^i_{jkl,\,p}, \ldots$ sînt componentele tensorilor derivați de curbură. În cazul cînd conexiunea este constantă, avem

$$\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{sk}\,\Gamma^s_{jl} - \Gamma^i_{sl}\,\Gamma^s_{jk}.$$

În cazul unui V_3 cu conexiune constantă, local euclidian, relațiile (3) sînt identic satisfăcute, deoarece $\Gamma^i_{jkl} = 0$ și genul unui astfel de spațiu este, așa cum a arătat Gh. Vrănceanu [2], $p = \dfrac{n(n+1)}{2} = 6$ și reprezintă numărul de cantități a_{ij} simetrice ($i, j = 1, 2, 3$).

Pentru determinarea spațiilor V_3 cu conexiune constantă, local euclidiene, vom deosebi cîteva cazuri principale, după cum matricea

$$\| \Gamma^i_{jk} \| = \begin{Vmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} & \Gamma^1_{33} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} & \Gamma^2_{33} \\ \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} & \Gamma^3_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

este de rangul întîi, doi sau trei.

Cazul I_1

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 1$ și cel puțin una din componentele vectorului de conexiune $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$ este diferită de zero. În acest caz, matricea (4) poate fi adusă la forma canonică în care toți coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} sînt nuli afară de $\Gamma^1_{11} = 1$.

În acest caz, formulele (2) ne dau :

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0.$$

Rezultă

$$a_{11} = c_{11} e^{-2x^1}, \quad a_{12} = c_{12} e^{-x^1}, \quad a_{22} = c_{22},$$
$$a_{13} = c_{13} e^{-x^1}, \quad a_{23} = c_{23}, \quad a_{33} = c_{33},$$

unde c_{ij} sînt constante simetrice ($i, j = 1, 2, 3$).

Metrica (1) a lui V_3 este în acest caz

$$ds^2 = c_{11}\, e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2\, c_{12}\, e^{-x^1}\, dx^1\, dx^2 + c_{22}\,(dx^2)^2 + \\ + 2\, c_{13}\, e^{-x^1}\, dx^1\, dx^3 + 2\, c_{23}\, dx^2\, dx^3 + c_{33}\,(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = -\, e^{-x^1}, \quad u^2 = x^2, \quad u^3 = x^3 \tag{5}$$

avem

$$ds^2 = c_{ij}\, du^i\, du^j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

și spațiul V_3 rezultă că este echivalent cu o parte a spațiului euclidian metric $E_3\,(u^1, u^2, u^3)$ și anume, prin formulele (5) cu semispațiul $u^1 < 0$.

Cazul I_2

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 1$ și $\Gamma_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$.

În acest caz matricea (4) poate fi adusă la forma canonică în care toți coeficienții de conexiune sînt nuli, afară de

$$\Gamma^1_{22} = 1, \tag{6}$$

sau

$$\Gamma^1_{23} = 1, \tag{7}$$

sau

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 1. \tag{8}$$

Vom considera cazul (6), celelalte cazuri tratîndu-se analog. Formulele (2) ne dau ținînd cont de (6)

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -\, a_{11},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = -\, 2\, a_{12},$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -\, a_{13},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0.$$

deci

$$a_{11} = c_{11},\ a_{12} = -c_{11}x^2 + c_{12},\ a_{13} = c_{13},$$
$$a_{22} = c_{11}(x^2)^2 - 2c_{12}x^2 + c_{22},\ a_{23} = -c_{13}x^2 + c_{23},\ a_{33} = c_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$\begin{aligned} ds^2 &= c_{11}(dx^1)^2 + 2[-c_{11}x^2 + c_{12}]dx^1 dx^2 + \\ &+ [c_{11}(x^1)^2 - 2c_{12}x^2 + c_{22}](dx^2)^2 + 2c_{13}dx^1 dx^3 + \\ &+ 2[-c_{13}x^2 + c_{23}]dx^2 dx^3 + c_{33}(dx^3)^2 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} ds^2 &= c_{11}[(dx^1)^2 - 2x^2 dx^1 dx^2 + (x^2)^2(dx^2)^2] + \\ &+ c_{22}(dx^2)^2 + 2c_{12}[dx^1 dx^2 - x^2(dx^2)^2] + \\ &+ 2c_{13}[dx^1 dx^3 - x^2 dx^2 dx^3] + 2c_{23}dx^2 dx^3 + c_{33}(dx^3)^2. \end{aligned}$$

Se vede că dacă luăm

$$du^1 = dx^1 - x^2 dx^2,\ du^2 = dx^2,\ du^3 = dx^3,$$

adică

$$u^1 = x^1 - \frac{1}{2}(x^2)^2,\quad u^2 = x^2,\quad u^3 = x^3, \tag{9}$$

atunci metrica devine

$$ds^2 = c_{ij}\,du^i\,du^j,\ c_{ij} = c_{ji} = \text{const.}\ (i, j = 1, 2, 3)$$

şi formulele (9) ne spun că în acest caz spaţiul V_3 este echivalent în mare cu spaţiul euclidian E_3 (u^1, u^2, u^3).

Cazul II_1

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 2$ şi cel puţin una din componentele vectorului contractat Γ_k este nenulă.

Atunci matricea (4) poate fi adusă la forma canonică în care toţi coeficienţii de conexiune Γ^i_{jk} sînt nuli afară de

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1, \tag{10}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 1, \tag{11}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{33} = 1, \tag{12}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1,\quad \Gamma^1_{22} = -1. \tag{13}$$

Ne vom ocupa de cazul (11), celelalte cazuri tratîndu-se analog.

Formulele (2) ne dau

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = -2a_{22},$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0.$$

Rezultă

$$a_{11} = c_{11}\,e^{-2x^1}, \quad a_{12} = c_{12}\,e^{-(x^1+x^2)}, \quad a_{22} = c_{22}\,e^{-2x^2},$$
$$a_{13} = c_{13}\,e^{-x^1}, \quad a_{23} = c_{23}\,e^{-x^2}, \quad a_{33} = c_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = c_{11}\,e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2c_{12}\,e^{-(x^1+x^2)}\,dx^1\,dx^2 + c_{22}\,e^{-2x^2}(dx^2)^2 + \\ + 2c_{13}\,e^{-x^1}\,dx^1\,dx^3 + 2c_{23}\,e^{-x^2}\,dx^2\,dx^3 + c_{33}(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = -e^{-x^1}, \quad u^2 = -e^{-x^2}, \quad u^3 = x^3 \tag{14}$$

avem

$$ds^2 = c_{ij}\,du^i\,du^j, \quad c_{ij} = c_{ji} = \text{const.} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

și formulele (14) ne arată că V_3 este echivalent cu o parte a spațiului euclidian $E_3(u^1, u^2, u^3)$ și anume cu semispațiul $u^1 < 0$, $u^2 < 0$.

Cazul II_2

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 2$ și $\Gamma_k = 0$. Atunci avem forma canonică a conexiunii în care toți coeficienții sînt nuli afară de $\Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{13} = 1$. În acest caz avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = -2a_{12},$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = -a_{22},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{11} - a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -a_{22}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{12},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = -2a_{23}, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -2a_{13},$$

deci

$$a_{11} = c_{22}(x^3)^2 - 2c_{12}x^3 + c_{11}, \qquad a_{22} = c_{22},$$

$$a_{12} = -c_{22}x^3 + c_{12}, \quad a_{23} = c_{22}\frac{(x^3)^2}{2} - c_{12}x^3 - c_{22}x^1 + c_{23},$$

$$a_{13} = -c_{22}\frac{(x^3)^3}{2} + 3\frac{c_{12}}{2}(x^3)^2 + c_{22}x^1x^3 - (c_{11}+c_{23})x^3 - c_{12}x^1 + c_{13},$$

$$a_{33} = c_{22}\frac{(x^3)^4}{4} - c_{12}(x^3)^3 - c_{22}x^1(x^3)^2 + (c_{11}+c_{23})(x^3)^2 +$$

$$+ 2c_{12}x^1x^3 + c_{22}(x^1)^2 - 2c_{13}x^3 - 2c_{23}x^1 + c_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = [c_{22}(x^3)^2 - 2c_{12}x^3 + c_{11}](dx^1)^2 + 2[-c_{22}x^3 + c_{12}]dx^1dx^2 +$$

$$+ c_{22}(dx^2)^2 + 2\left[-c_{22}\frac{(x^3)^2}{2} + \frac{3c_{12}}{2}(x^3)^2 + c_{22}x^1x^3 - \right.$$

$$\left. - (c_{11}+c_{23})x^3 - c_{12}x^1 + c_{13}\right]dx^1dx^3 +$$

$$+ 2\left[c_{22}\frac{(x^3)^2}{2} - c_{12}x^3 - c_{22}x^1 + c_{23}\right]dx^2dx^3 +$$

$$+ \left[c_{22}\frac{(x^3)^4}{4} - c_{12}(x^3)^3 - c_{22}x^1(x^3)^2 + (c_{11}+c_{23})(x^3)^2 + \right.$$

$$\left. + 2c_{12}x^1x^3 + c_{22}(x^1)^2 - 2c_{13}x^3 - 2c_{23}x^1 + c_{33}\right](dx^3)^2$$

sau

$$ds^2 = c_{11}\,[(dx^1)^2 - 2\,x^3\,dx^1\,dx^3 + (x^3)^2\,(dx^3)^2] +$$
$$+ 2c_{12}\Big[- x^3\,(dx^1)^2 + dx^1\,dx^2 + \frac{3}{2}\,(x^3)^2\,dx^1\,dx^3 -$$
$$- x^3\,dx^2\,dx^3 - \frac{(x^3)^2}{2}\,(dx^3)^2 + x^1\,x^3\,(dx^3)^2\Big] +$$
$$+ c_{22}\,[(x^3)^2\,(dx^1)^2 - 2x^3\,dx^1\,dx^2 + (dx^2)^2 - (x^3)^2\,dx^1\,dx^3 +$$
$$+ 2\,x^1\,x^3\,dx^1\,dx^3 + (x^3)^2\,dx^2\,dx^3 - 2\,x^1\,dx^2\,dx^3 +$$
$$+ \frac{(x^3)^4}{4}\,(dx^3)^2 - x^1\,(x^3)^2\,(dx^3)^2 + (x^1)^2\,(dx^3)^2] +$$
$$+ 2\,c_{13}\,[dx^1\,dx^3 - x^3\,(dx^3)^2] +$$
$$+ 2\,c_{23}\Big[- x^3\,dx^1\,dx^3 + dx^2\,dx^3 + \frac{(x^3)^2}{2}\,(dx^3)^2 - x^1\,(dx^3)^2\Big] +$$
$$+ c_{33}\,(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = x^1 - \frac{(x^3)^2}{2},\quad u^2 = x^2 - x^1\,x^3 + \frac{(x^3)^3}{6},\quad u^3 = x^3, \tag{15}$$

obținem $ds^2 = c_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (15) ne arată că V_3 este echivalent în mare cu $E_3\,(u^1, u^2, u^3)$.

Cazul III

Rang $\|\,\Gamma^i_{jk}\,\| = 3$. În acest caz, cel puțin una din componentele vectorului de conexiune Γ_k este nenulă, iar conexiunea poate fi adusă la forma canonică în care toți coeficienții Γ^i_{jk} sînt nuli, afară de

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1, \tag{16}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{33} = 1, \tag{17}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{33} = 1, \tag{18}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{22} = 1, \tag{19}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{33} = 1,\quad \Gamma^1_{22} = -1. \tag{20}$$

Ne vom ocupa de cazul (18). Avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = -2a_{22},$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -a_{23}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -2a_{33},$$

rezultînd apoi

$$a_{11} = c_{11}\,e^{-2x^1}, \quad a_{12} = c_{12}\,e^{-(x^1+x^2)}, \quad a_{22} = c_{22}\,e^{-2x^2},$$

$$a_{13} = c_{13}\,e^{-(x^1+x^3)}, \quad a_{23} = c_{23}\,e^{-(x^2+x^3)}, \quad a_{33} = c_{33}\,e^{-2x^3}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = c_{11}\,e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2c_{12}\,e^{-(x^1+x^2)}\,dx^1\,dx^2 + c_{22}\,e^{-2x^2}(dx^2)^2 +$$
$$+ 2c_{13}\,e^{-(x^1+x^3)}\,dx^1\,dx^3 + 2c_{23}\,e^{-(x^2+x^3)}\,dx^2\,dx^3 + c_{33}\,e^{-2x^3}(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = e^{-x^1}, \quad u^2 = e^{-x^2}, \quad u^3 = e^{-x^3} \tag{21}$$

obținem

$$ds^2 = c_{ij}\,du^i\,du^j, \qquad c_{ij} = c_{ji} = \text{const.} \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

și formulele (21) ne spun că V_3 este echivalent cu o parte a spațiului euclidian E_3 (u^1, u^2, u^3) și anume V_3 se așterne pe partea pozitivă a lui E_3.

Reunind rezultatele de mai sus, putem spune:

Un spațiu Riemann V_3 cu conexiune constantă local euclidian este echivalent în mare cu spațiul euclidian metric E_3 numai dacă vectorul de conexiune Γ_k este nul. Dacă cel puțin una din componentele vectorului de conexiune Γ_k este nenulă, atunci spațiul este echivalent cu o parte a spațiului euclidian E_3.

Am regăsit pe această cale un rezultat analog celui obținut de P. Mocanu relativ la spațiile A_3 cu conexiune constantă local euclidiene.

II

Pînă acum s-a determinat o parte din spațiile V_3 cu conexiune constantă local euclidiene utilizînd numai anumite forme canonice ale conexiunii unui A_3 cu conexiune constantă local euclidian. În continuare vom determina toate spațiile V_3 cu conexiune afină constantă local euclidiene folosind și celelalte forme ale conexiunii.

Pentru determinarea spațiilor V_3 cu conexiune constantă local euclidiene am deosebit cîteva cazuri mai principale, după cum matricea

$$\Gamma = \| \Gamma^i_{jk} \| \tag{22}$$

este de rangul 1, 2 sau 3.

Cazul I_1

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 1$ și $\Gamma_k \neq 0$. În acest caz, matricea (22) poate fi adusă la forma canonică în care toți coeficienții de conexiune Γ^i_{jk} sînt nuli afară de

$$\Gamma^1_{11} = 1. \tag{23}$$

Cazul I_2

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 1$ și $\Gamma_k = 0$. Atunci avem forma canonică a conexiunii, în care toți coeficienții sînt nuli afară de

$$\Gamma^1_{22} = 1, \tag{24}$$

sau

$$\Gamma^1_{23} = 1, \tag{25}$$

sau

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = 1. \tag{26}$$

Cazul II_1

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 2$ și $\Gamma_k \neq 0$. Atunci matricea (22) se poate reduce la forma canonică :

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1, \tag{27}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = 1, \tag{28}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{33} = 1, \tag{29}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = -1, \tag{30}$$

iar ceilalți coeficienți sînt nuli.

Cazul II_2

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 2$ și $\Gamma_k = 0$. În acest caz, avem forma canonică a conexiunii în care toți Γ^i_{jk} sînt nuli, afară de

$$\Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{13} = 1. \tag{31}$$

Cazul III

Rang $\| \Gamma^i_{jk} \| = 3$. În acest caz cel puțin una din componentele vectorului de conexiune Γ_k este diferită de zero, iar conexiunea se poate reduce la forma canonică în care toți coeficienții sînt nuli, afară de

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1, \tag{32}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{33} = 1, \tag{33}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{33} = 1, \tag{34}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{22} = 1, \tag{35}$$

sau

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = -1. \tag{36}$$

În partea I ne-am ocupat de cazurile (23), (24), (28) și (34). Acum ne vom ocupa de celelalte cazuri, utilizînd ca și mai înainte identitățile lui Ricci

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{is}\,\Gamma^s_{jk} + a_{js}\,\Gamma^s_{ik} = 0 \tag{37}$$

care constituie un sistem cu diferențiale totale complet integrabile în virtutea faptului că $\Gamma^i_{jkl} = 0$, relație care exprimă că spațiile riemanniene V_3 pe care le căutăm sînt local euclidiene.

În cazul cînd avem forma canonică (25) a conexiunii, identitățile (37) ne dau

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = -a_{11},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -a_{11},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = -2a_{13}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -a_{12}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{13}.$$

Integrînd acest sistem, obținem

$$a_{11} = C_{11},\ a_{12} = -C_{11}x^3 + C_{12},\ a_{22} = C_{11}(x^3)^2 - 2C_{12}x^3 + C_{22},$$
$$a_{13} = -C_{11}x^2 + C_{13},\ a_{23} = C_{11}x^2x^3 - C_{12}x^2 - C_{13}x^3 + C_{23},\ a_{33} = C_{11}(x^2)^2 - 2C_{13}x^2 + C_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie, ordonînd în raport cu C_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$,

$$ds^2 = C_{11}[(dx^1)^2 - 2x^3\,dx^1\,dx^2 + (x^3)^2(dx^2)^2 - 2x^2\,dx^1\,dx^3 + 2x^2x^3\,dx^2\,dx^3 + (x^2)^2(dx^3)^2] + 2C_{12}[dx^1\,dx^2 - x^3(dx^2)^2 - x^2\,dx^2\,dx^3] + C_{22}(dx^2)^2 + 2C_{13}[dx^1\,dx^3 - x^3\,dx^2\,dx^3 - x^2(dx^3)^2] + 2C_{23}\,dx^2\,dx^3 + C_{33}(dx^3)^2.$$

Se vede că dacă punem

$$u^1 = x^1 - x^2x^3,\quad u^2 = x^2,\quad u^3 = x^3 \tag{25'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$, unde $C_{ij} = C_{ji} = \text{const.}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ și formulele (25') ne spun că în acest caz spațiul V_3 este echivalent în mare cu spațiul euclidian metric $E_3(u^1, u^2, u^3)$.

Considerăm acum cazul (26) și formulele (37) ne dau

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{11},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = -2a_{12},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{11},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -2a_{13},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = 0,\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -a_{13},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{12}.$$

Rezultă

$$a_{11} = C_{11},\quad a_{12} = -C_{11}x^2 + C_{12},\quad a_{22} = C_{11}(x^2)^2 - 2C_{12}x^2 + C_{22},$$
$$a_{13} = -C_{11}x^3 + C_{13},\ a_{23} = C_{11}x^2x^3 - C_{13}x^2 - C_{12}x^3 + C_{23},\ a_{33} = C_{11}(x^3)^2 - 2C_{13}x^3 + C_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie atunci

$$ds^2 = C_{11}[(dx^1)^2 - 2x^2\,dx^1\,dx^2 + (x^2)^2(dx^2)^2 - 2x^3\,dx^1\,dx^3 + 2x^2x^3\,dx^2\,dx^3 + (x^3)^2(dx^3)^2] + 2C_{12}[dx^1\,dx^2 - x^2(dx^2)^2 - x^3\,dx^2\,dx^3] + C_{22}(dx^2)^2 + 2C_{13}[dx^1\,dx^3 - x^2\,dx^2\,dx^3 - x^3(dx^3)^2] + 2C_{23}\,dx^2\,dx^3 + C_{33}(dx^3)^2$$

iar dacă punem

$$u^1 = x^1 - \frac{(x^2)^2}{2} - \frac{(x^3)^2}{2},\quad u^2 = x^2,\quad u^3 = x^3 \tag{26'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\, du^i\, du^j$ și formulele (26′) ne spun că V_3 este echivalent în mare cu spațiul $E_3(u^1, u^2, u^3)$.

Dacă luăm în considerație forma canonică (27) a conexiunii Γ^i_{jk} relațiile (37) ne dau

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -2a_{12},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -2a_{12},$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{22},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -2a_{22},\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} =$$

$$= -a_{23},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -a_{23},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0.$$

Integrînd acest sistem, obținem

$$a_{11} = e^{-2x^1}[C_{22}(x^2)^2 - 2C_{12}x^2 + C_{11}],\quad a_{12} = e^{-2x^1}[-C_{22}x^2 + C_{12}],$$
$$a_{22} = C_{22}e^{-2x^1},\quad a_{13} = e^{-2x^1}[-C_{23}x^2 + C_{13}],$$
$$a_{23} = C_{23}e^{-x^1},\quad a_{33} = C_{33},$$

așa încît metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = C_{11}[e^{-2x^1}(dx^1)^2] + 2C_{12}[-x^2e^{-2x^1}(dx^1)^2 + e^{-2x^1}dx^1dx^2] +$$
$$+ C_{22}[(x^2)^2e^{-2x^1}(dx^1)^2 + e^{-2x^1}(dx^2)^2 - 2x^2e^{-2x^1}dx^1dx^2] +$$
$$+2C_{13}[e^{-x^1}dx^1dx^3] + 2C_{23}[-x^2e^{-x^1}dx^1dx^3 + e^{-x^1}dx^2dx^3] + C_{33}(dx^3)^2.$$

Făcînd schimbarea de variabile

$$u^1 = -e^{-x^1},\quad u^2 = x^2e^{-x^1},\quad u^3 = x^3 \tag{27′}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\, du^i\, du^j$ și spațiul V_3 rezultă echivalent cu o parte a spațiului E_3 și anume prin formulele (27′) cu semispațiul $u^1 < 0$.

În cazul (29) avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -a_{12},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{12},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -2a_{23},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{22}$$

de unde rezultă

$$a_{11} = C_{11}\,e^{-2x^1},\ a_{12} = C_{12}\,e^{-x^1},\ a_{22} = C_{22},\ a_{13} = e^{-x^1}[-C_{12}\,x^3 + C_{13}],$$
$$a_{23} = -C_{22}\,x^3 + C_{23},\quad a_{33} = C_{22}\,(x^3)^2 - 2\,C_{23}\,x^3 + C_{33}.$$

Metrica lui V_3 se scrie în acest caz

$$ds^2 = C_{11}\,e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2\,C_{12}\,[e^{-x^1}\,dx^1\,dx^2 - x^3\,e^{-x^1}\,dx^1\,dx^3] +$$
$$+ C_{22}\,[(dx^2)^2 - 2x^3\,dx^2\,dx^3 + (x^3)^2\,(dx^3)^2] + 2\,C_{13}\,e^{-x^1}\,dx^1\,dx^3 +$$
$$+ 2\,C_{23}\,[dx^2\,dx^3 - x^3\,(dx^3)^2] + C_{33}\,(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = -e^{-x^1},\quad u^2 = x^2 - \frac{(x^3)^2}{2},\quad u^3 = x^3 \tag{29'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (29') ne spun că V_3 este echivalent cu o parte a lui E_3 și anume cu semispațiul $u^1 < 0$.

Cînd conexiunea Γ^i_{jk} este adusă la forma canonică (30), identitățile lui Ricci (37) ne dau

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11},\ \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -2\,a_{12},\ \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -2\,a_{12},$$
$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = a_{11} - a_{22},\ \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -2\,a_{12},\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 2\,a_{12},\ \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13},$$
$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -a_{23},\ \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0,\ \frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -a_{23},\ \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = a_{13},\ \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0.$$

Rezultă prin integrare

$$a_{11} = e^{-2x^1}\left[\frac{A\sin 2x^2 - B\cos 2x^2}{2} + C\right],$$
$$a_{12} = e^{-2x^1}\left[-\frac{A\cos 2x^2 + B\sin 2x^2}{2}\right],$$
$$a_{22} = e^{-2x^1}\left[-\frac{A\sin 2x^2 - B\cos 2x^2}{2} + C\right],$$
$$a_{13} = e^{-x^1}\,[C_{13}\cos x^2 - C_{23}\sin x^2],$$
$$a_{23} = e^{-x^1}\,[C_{13}\sin x^2 + C_{23}\cos x^2],\qquad a_{33} = C_{33},$$

unde A, B, C sînt constante.

Metrica lui V_3 se scrie atunci

$$ds^2 = -A\,e^{-2x^1}\left[-\frac{\sin 2x^2}{2}(dx^1)^2 + \cos 2x^2\,dx^1\,dx^2 + \frac{\sin 2x^2}{2}(dx^2)^2\right] -$$

$$- B\,e^{-2x^1}\left[\frac{\cos 2x^2}{2}(dx^1)^2 + \sin 2x^2\,dx^1\,dx^2 - \frac{\cos 2x^2}{2}(dx^2)^2\right] +$$

$$+ 2C\,e^{-2x^1}\left[\frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}{2}\right] + 2C_{13}\,e^{-x^1}[\cos x^2\,dx^1 + \sin x^2\,dx^2]\,dx^3 +$$

$$+ 2C_{23}[-\sin x^2\,dx^1 + \cos x^2\,dx^2]\,dx^3 + c_{33}(dx^3)^2.$$

Se observă că dacă punem

$$\begin{aligned} u^1 &= -e^{-x^1}\cos x^2, \\ u^2 &= e^{-x^1}\sin x^2, \\ u^3 &= x^3 \end{aligned} \tag{30'}$$

și luăm $A = -2C_{12}$, $B = C_{22} - C_{11}$, $C = \dfrac{C_{11} + C_{22}}{2}$, obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (30') ne arată că spațiul V_3 se așterne de o infinitate de ori peste spațiul euclidian E_3.

Considerăm acum forma canonică (32) a conexiunii. Avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = -2a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{22}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = -a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -2a_{22}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -2a_{13}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -a_{23}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{33},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = -2a_{33}, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -2a_{23}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0.$$

de unde rezultă

$$a_{11} = e^{-2x^1}[C_{22}(x^2)^2 + C_{33}(x^3)^2 + 2C_{23}x^2x^3 - 2C_{12}x^2 - 2C_{13}x^3 + C_{11}],$$

$$a_{12} = e^{-2x^1}[-C_{22}x^2 - C_{23}x^3 + C_{12}], \quad a_{22} = C_{22}e^{-2x^1},$$

$$a_{13} = e^{-2x^1}[-C_{23}x^2 - C_{33}x^3 + C_{13}], \quad a_{23} = C_{23}e^{-2x^1}, \quad a_{33} = C_{33}e^{-2x^1}$$

și metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = C_{11}\,e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2\,C_{12}\,e^{-2x^1}[-x^2(dx^1)^2 + dx^1\,dx^2] + \\ + C_{22}\,e^{-2x^1}[(x^2)^2(dx^1)^2 - 2\,x^2\,dx^1\,dx^2 + (dx^2)^2] + 2\,C_{13}\,e^{-2x^1}[-x^3(dx^1)^2 + \\ + dx^1\,dx^3] + 2\,C_{23}\,e^{-2x^1}[x^2\,x^3(dx^1)^2 - x^3\,dx^1\,dx^2 - x^2\,dx^1\,dx^3 + \\ + dx^2\,dx^3] + C_{33}\,e^{-2x^1}[(x^3)^2(dx^1)^2 - 2x^3\,dx^1\,dx^3 + (dx^3)^2].$$

Dacă punem

$$u^1 = -\,e^{-x^1},\quad u^2 = x^2\,e^{-x^1},\quad u^3 = x^3\,e^{-x^1} \tag{32'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (32′) ne arată că V_3 se așterne peste semispațiul $u^1 < 0$.

În cazul (33) avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2\,a_{11},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -2\,a_{12},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -2\,a_{12},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{22},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -2\,a_{22},\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -a_{13},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -a_{23},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{13},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -2\,a_{33},$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -a_{23},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -a_{23}.$$

Soluția generală a acestui sistem este

$$a_{11} = e^{-2x^1}[C_{22}(x^2)^2 - 2C_{12}\,x^2 + C_{11}],\quad a_{12} = e^{-2x^1}[-C_{22}\,x^2 + C_{12}],$$

$$a_{22} = C_{22}\,e^{-2x^1},\quad a_{13} = e^{-(x^1+x^3)}[-C_{23}\,x^2 + C_{13}],\quad a_{23} = C_{23}\,e^{-(x^1+x^3)},$$

$$a_{33} = C_{33}\,e^{-2x^3}$$

iar metrica lui V_3 se scrie în acest caz

$$ds^2 = C_{11}\,e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2\,C_{12}\,e^{-2x^1}[-x^2(dx^1)^2 + dx^1\,dx^2] + \\ + C_{22}[-2\,x^2\,dx^1\,dx^2 + (x^2)^2(dx^1)^2 + (dx^2)^2] + 2\,C_{13}\,e^{-(x^1+x^3)}\,dx^1\,dx^3 + \\ + 2\,C_{23}\,e^{-(x^1+x^3)}[-x^2\,dx^1\,dx^3 + dx^2\,dx^3] + C_{33}\,e^{-2x^3}(dx^3)^2.$$

Dacă punem

$$u^1 = -\,e^{-x^1},\quad u^2 = x^2\,e^{-x^1},\quad u^3 = -\,e^{-x^3} \tag{33'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (33′) ne arată că V_3 se așterne peste semispațiul $u^1 < 0$, $u^3 < 0$.

În cazul (35) avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -2a_{11}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = -2a_{13},$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = -a_{13} - a_{22}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = -a_{23},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -2a_{22}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = -2a_{23}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -2a_{13}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -a_{23}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -a_{33},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = -2a_{33}, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -2a_{23}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = -a_{33}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = 0$$

de unde rezultă

$$a_{11} = e^{-2x^1}\left[C_{33}\frac{(x^2)^4}{4} - C_{23}(x^2)^3 - C_{33}(x^2)^2 x^3 + 2C_{23}x^2x^3 + \right.$$

$$\left. + C_{33}(x^3)^2 + (C_{13} + C_{22})(x^2)^2 - 2C_{12}x^2 - 2C_{13}x^3 + C_{11}\right],$$

$$a_{12} = e^{-2x^1}\left[-C_{33}\frac{(x^2)^3}{2} + \frac{3}{2}C_{23}(x^2)^2 + C_{33}x^2x^3 - C_{23}x^3 - (C_{13} + \right.$$

$$\left. + C_{22})x^2 + C_{12}\right],$$

$$a_{22} = e^{-2x^1}[C_{33}(x^2)^2 - 2C_{23}x^2 + C_{22}], \quad a_{13} = e^{-2x^1}\left[\frac{1}{2}C_{33}(x^2)^2 - C_{23}x^2 - \right.$$

$$\left. - C_{33}x^3 + C_{13}\right],$$

$$a_{23} = e^{-2x^1}[-C_{33}x^2 + C_{23}], \quad a_{33} = C_{33}e^{-2x^1}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = C_{11}e^{-2x^1}(dx^1)^2 + 2C_{12}e^{-2x^1}[-x^2(dx^1)^2 + dx^1dx^2] +$$
$$+ C_{22}e^{-2x^1}[(x^2)^2(dx^1)^2 - 2x^2dx^1dx^2 + (dx^2)^2] +$$
$$+ 2C_{13}e^{-2x^1}\left[\frac{(x^2)^2}{2}(dx^1)^2 - x^2dx^1dx^2 - x^3(dx^1)^2 + dx^1dx^3\right] +$$

$$+ 2\,C_{23}\,e^{-2x^1}\left[-\frac{(x^2)^3}{2}(dx^1)^2 + x^2\,x^3\,(dx^1)^2 + \frac{3}{2}(x^2)^2\,dx^1\,dx^2 - \right.$$

$$\left. - x^3\,dx^1\,dx^2 - x^2\,(dx^2)^2 - x^2\,dx^1\,dx^3 + dx^2\,dx^3\right] +$$

$$+ C_{33}\,e^{-2x^1}\left[\frac{(x^2)^4}{4}(dx^1)^2 - (x^2)^2\,x^3\,(dx^1)^2 + (x^3)^2\,(dx^1)^2 - \right.$$

$$- (x^2)^3\,dx^1\,dx^2 + 2\,x^2\,x^3\,dx^1\,dx^2 + (x^2)^2\,(dx^2)^2 + (x^2)^2\,dx^1\,dx^3 -$$

$$\left. - 2\,x^3\,dx^1\,dx^2 - 2\,x^2\,dx^2\,dx^3 + (dx^3)^2\right].$$

Dacă punem

$$u^1 = -\,e^{-x^1},\quad u^2 = x^2\,e^{-x^1},\quad u^3 = \left[x^3 - \frac{(x^2)^2}{2}\right]e^{-x^1} \tag{35'}$$

obținem $ds^2 = C_{ij}\,du^i\,du^j$ și formulele (35') ne spun că V_3 se așterne peste semispațiul $u^1 < 0$ al lui E_3.

Să considerăm în sfîrșit cazul (36). Avem

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x^1} = -\,2\,a_{11},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^2} = -\,2\,a_{12},\quad \frac{\partial a_{11}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x^1} = -\,2\,a_{12},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^2} = a_{11} - a_{22},\quad \frac{\partial a_{12}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x^1} = -\,2\,a_{22},\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^2} = 2\,a_{12},\quad \frac{\partial a_{22}}{\partial x^3} = 0,$$

$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x^1} = -\,a_{13},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^2} = -\,a_{23},\quad \frac{\partial a_{13}}{\partial x^3} = -\,a_{13},$$

$$\frac{\partial a_{33}}{\partial x^1} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial a_{33}}{\partial x^3} = -\,2\,a_{33},$$

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x^1} = -\,a_{23},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^2} = a_{13},\quad \frac{\partial a_{23}}{\partial x^3} = -\,a_{23}.$$

Integrînd, obținem

$$a_{11} = e^{-2x^1}\left[\frac{A\sin 2x^2 - B\cos 2x^2}{2} + C\right],$$

$$a_{12} = e^{-2x^1}\left[-\frac{A\cos 2x^2 + B\sin 2x^2}{2}\right],$$

$$a_{22} = e^{-2x^1}\left[-\frac{A\sin 2x^2 - B\cos 2x^2}{2} + C\right],$$

$$a_{13} = e^{-(x^1+x^3)}\,[C_{13}\cos x^2 - C_{23}\sin x^2],$$

$$a_{23} = e^{-(x^1+x^3)}\,[C_{13}\cos x^2 + C_{23}\sin x^2],$$

$$a_{33} = C_{33}\,e^{-2x^3}.$$

Metrica lui V_3 se scrie

$$ds^2 = -A\,e^{-2x^1}\left[-\frac{\sin 2x^2}{2}(dx^1)^2 + \cos 2x^2\,dx^1\,dx^2 + \frac{\sin 2x^2}{2}(dx^2)^2\right] -$$

$$- B\,e^{-2x^1}\left[\frac{\cos 2x^2}{2}(dx^1)^2 + \sin 2x^2\,dx^1\,dx^2 - \frac{\cos 2x^2}{2}(dx^2)^2\right] +$$

$$+ 2C\,e^{-2x^1}\left[\frac{(dx^1)^2+(dx^2)^2}{2}\right] + 2C_{13}\,e^{-(x^1+x^3)}\,[\cos x^2\,dx^1 + \sin x^2\,dx^2]\,dx^3 +$$

$$+ 2C_{23}\,e^{-(x^1+x^3)}\,[-\sin x^2\,dx^1 + \cos x^2\,dx^2]\,dx^3 + C_{33}\,e^{-2x^3}\,(dx^3)^2.$$

Dacă luăm $u^1 = e^{-x^1}\cos x^2$, $u^2 = e^{-x^1}\sin x^2$, $u^3 = -e^{-x^3}$ (36′)

şi

$$A = -2C_{12}, \quad B = C_{22} - C_{11}, \quad C = \frac{C_{11}+C_{22}}{2}$$

şi atunci metrica lui V_3 se scrie $ds^2 = C_{ij}du^i\,du^j$, iar formulele (36′) ne spun că V_3 se aşterne de o infinitate de ori peste semispaţiul $u^3 < 0$.

Primită la redacţie la 20 octombrie 1962

О ЛОКАЛЬНО ЭВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ V_3 С ПОСТОЯННОЙ АФФИННОЙ СВЯЗЬЮ

РЕЗЮМЕ

Продолжая идею акад. проф. Г. Врэнчану, определяем все римановые эвклидовые пространства V_3 с постоянной связностью, используя приведение к канонической форме связи локально эвклидового пространства A_3 с постоянной связностью, которое было дано доцентом Петре Мокану.

SUR LES ESPACES V_3 À CONNEXION AFFINE CONSTANTE, LOCALEMENT EUCLIDIENS

RÉSUMÉ

En suivant une idée du professeur G. Vrănceanu, l'auteur détermine tous les espaces riemanniens V_3 à connexion constante, localement euclidiens, par la réduction, à la forme canonique, de la connexion d'un espace A_3 à connexion constante, localement euclidien, telle qu'elle a été donnée par Petre Mocanu.

BIBLIOGRAFIE

1. GH. VRĂNCEANU, *Lecții de geometrie diferențială*. București, I, II.
2. — *Asupra spațiilor lui Riemann cu conexiune constantă*. St. cerc. mat., **XIII**, *2* (1962).
3. P. MOCANU, *Asupra clasificării spațiilor A_3 cu conexiune constantă local euclidiene*. Com. Acad. R.P.R., **I**, *3* (1951).

ASUPRA GRUPURILOR DE VALUARE

DE

ION D. ION

1. Dacă V este o valuare a corpului K pe grupul total ordonat Γ atunci pot fi evidențiate o serie de proprietăți algebrice ale grupului Γ care provin prin valoarea V. Astfel, între idealele inelului de valoare O și clasele superioare de elemente pozitive ale grupului Γ se stabilește o corespondență biunivocă, produsului idealelor corespunzîndu-i suma claselor superioare respective [1]. Pe baza acestei corespondențe se transpun imediat pentru clasele superioare toate rezultatele teoriei idealelor în inelul O. Rămîne de clarificat, cum este firesc, în ce măsură rezultatele obținute pe această cale sînt adevărate în general pentru grupuri total ordonate? Pentru grupurile total ordonate abeliene răspunsul este afirmativ (teorema 1). În grupuri total ordonate necomutative se poate face pentru clase superioare o teorie asemănătoare celei a idealelor în inele, independent de un rezultat ca cel obținut prin teorema 1 pentru grupuri abeliene. Recent I. Yakabe [5] a introdus noțiunea de semivaluare. În această notă problema de mai sus este reluată și pentru semivaluări.

2. Un grup Γ a cărui lege de compoziție este notată cu $+$ se numește laticial ordonat dacă există o relație binară $\leqslant$ în Γ astfel ca

1) $\alpha \leqslant \alpha$ pentru toți $\alpha \in \Gamma$,

2) $\alpha \leqslant \beta$ și $\beta \leqslant \alpha$ implică $\alpha = \beta$,

3) $\alpha \leqslant \beta$ și $\beta \leqslant \gamma$ implică $\alpha \leqslant \gamma$,

4) $\alpha \leqslant \beta$ implică $\gamma + \alpha + \delta \leqslant \gamma + \beta + \delta$ pentru orice $\gamma, \delta \in \Gamma$,

5) orice pereche de elemente $\alpha, \beta \in \Gamma$ are un cel mai mare minorant, notat $\alpha \cap \beta$, și un cel mai mic majorant, notat $\alpha \cup \beta$.

Din 2) și 5) rezultă că pentru orice $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\alpha \cap \beta$ și $\alpha \cup \beta$ sînt unic determinați. Pentru orice $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$, n întreg pozitiv oarecare, $\bigcap_{i=1}^{n} \alpha_i$ și $\bigcup_{i=1}^{n} \alpha_i$ (cel mai mare minorant, respectiv cel mai mic majorant al lui $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) există și sînt unic determinați.

Un grup Γ pe care s-a introdus o ordine totală $\leqslant$ ce satisface condiția

$$a \leqslant b \Rightarrow \alpha + a + \beta \leqslant \alpha + b + \beta \quad \forall a, b, \alpha, \gamma \in \Gamma,$$

se numește grup total ordonat. Fie K^* grupul multiplicativ al elementelor diferite de zero ale unui corp K. O aplicație univocă V definită pe K^* și cu valori într-un grup total ordonat Γ se numește valuare a corpului K dacă

$$V(xy) = Vx + Vy,$$

$$V(x + y) \geqslant \min(Vx, Vy), \quad \forall x, y \in \Gamma,$$

$$V(K^*) = \Gamma,$$

Γ numindu-se grupul de valuare al lui V. Se convine ca

$$V(0) = \infty, \quad V(0) > \alpha, \quad \forall \alpha \in \Gamma \text{ și } \infty + \infty = \alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty.$$

Modulul unui element $\alpha \in \Gamma$, notat $|\alpha|$, se definește astfel

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{dacă } \alpha > 0, \\ 0, & \text{dacă } \alpha = 0, \\ -\alpha, & \text{dacă } \alpha < 0. \end{cases}$$

O mulțime nevidă Ω de elemente ale lui Γ se numește clasă superioară dacă întotdeauna

$$\alpha \in \Omega, \quad \beta \in \Gamma, \quad \alpha < \beta \Rightarrow \beta \in \Omega.$$

În cele ce urmează vom lucra numai cu clase superioare de elemente pozitive. Suma a două clase superioare

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \{x \mid x = x_1 + x_2; \quad x_1 \in \Omega_1, \quad x_2 \in \Omega_2\}$$

este o clasă superioară. Mulțimea claselor superioare de elemente pozitive ale lui Γ este un lanț în raport cu relația de incluziune.

3. TEOREMA 1. *Orice grup abelian Γ total ordonat este grup de valuare: există un corp K și o valuare a acesteia pe grupul Γ.*

Demonstrație. Fie Γ un grup abelian, total ordonat pentru care adoptăm notația aditivă. Fie R un inel comutativ unitar și fără divizori ai lui zero. Construim inelul $A = R[X]$ al polinoamelor cu coeficienți din R în familia de nedeterminate $X = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ ([2], p. 40).

Avem $A = \bigcup_H R[H]$, unde H parcurge toate părțile finite ale lui X. Fie $p \in A$, $p \neq 0$ și $H = \{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_s}\}$ astfel ca $p \in R[H]$. Atunci $p = \sum_{m \in M} c_m X_{\alpha_1}^{m_1} X_{\alpha_2}^{m_2} \ldots X_{\alpha_s}^{m_s}$, unde $c_m \in R$, $c_m \neq 0$, $m = (m_1, m_2, \ldots, m_s)$, m_i numere întregi nenegative, însumarea făcîndu-se după o mulțime M finită de sisteme m. Dintre elementele $\sum_{k=1}^{s} m_k \alpha_k$, $m \in M$ ale grupului Γ alegem unul care este cel mai mic; alegerea este posibilă deoarece grupul Γ este

total ordonat și M este o mulțime finită. Fie $\sum_k r_k\alpha_k$ un astfel de element. Termenul $t_p^* = c_r X_{\alpha_1}^{r_1} X_{\alpha_2}^{r_2} \dots X_{\alpha_s}^{r_s}$ al polinomului p va fi numit termen minimal. În general el nu este unic determinat. Avem

$$\sum_k r_k\alpha_k \leqslant \sum_k m_k\alpha_k, \quad \forall m \in M.$$

La orice polinom $p \in A = R[X]$, $p \neq 0$ asociem elementul $\sum_k r_k\alpha_k \in \Gamma$, unde $t_p = c_n X_{\alpha_1}^{r_1} X_{\alpha_2}^{r_2} \dots X_{\alpha_s}^{r_s}$ este un termen minimal al lui p. Notăm cu $A^* = A \setminus \{0\}$. Definim aplicația univocă $v : A^* \to \Gamma$ astfel

$$\forall p \in A^*, \quad v(p) = \sum_k r_k\alpha_k, \quad \text{unde} \quad t_p = c_r X_{\alpha_1}^{r_1} X_{\alpha_2}^{r_2} \dots X_{\alpha_s}^{r_s}.$$

Dacă $p, q \in A^*$, atunci există o parte finită $H = \{X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \dots, X_{\alpha_s}\}$ a lui X astfel ca $p, q \in R[H]$. Fie

$$p = \sum_{m \in M} c_m X_{\alpha_1}^{m_1} X_{\alpha_2}^{m_2} \dots X_{\alpha_s}^{m_s}, \quad q = \sum_{m \in N} d_n X_{\alpha_1}^{n_1} X_{\alpha_2}^{n_2} \dots X_{\alpha_s}^{n_s},$$

M și N fiind mulțimi finite. Fie $t_p = c_r X_{\alpha_1}^{r_1} \dots X_{\alpha_s}^{r_s}$, $t_q = d_t X_{\alpha_1}^{t_1} \dots X_{\alpha_s}^{t_s}$ termeni minimali ai polinoamelor p, q respectiv.

Vom avea

$$\sum_k r_k\alpha_k \leqslant \sum_k m_k\alpha_k, \quad \forall m \in M,$$

$$\sum_k t_k\alpha_k \leqslant \sum_k n_k\alpha_k, \quad \forall n \in N,$$

de unde

$$\sum_k (r_k + t_k)\alpha \leqslant \sum_k (m_k + n_k)\alpha_k, \quad \forall m \in M, \quad \forall n \in N.$$

Cum $pq = \sum_{M,N} c_m d_n X_{\alpha_1}^{m_1+n_1} \dots X_{\alpha_s}^{m_s+n_s}$, rezultă că $t_{pq} = c_r d_t X_{\alpha_1}^{r_1+t_1} \dots X_{\alpha_s}^{r_s+t_s}$ este un termen minimal al polinomului pq (R fără divizori ai lui zero, $c_r \neq 0$, $d_t \neq 0$ implică $c_t d_r \neq 0$).

Avem

$$v(pq) = \sum_k (r_k + t_k)\alpha_k = \sum_k r_k\alpha_k + \sum_k t_k\alpha_k = v(p) + v(q).$$

Presupunem $p + q \neq 0$ și fie $t_{p+q}^* = a_u X_{\alpha_1}^{u_1} \dots X_{\alpha_s}^{u_s}$ un termen minimal al său. Ușor se constată că

$$v(p + q) = \sum_k u_k\alpha_k \geqslant \min(v(p), v(q)).$$

Rezumînd, am găsit o aplicație univocă $v : A^* \to \Gamma$ care satisface condițiile

$$v(pq) = v(p) + v(q), \quad \forall p, q \in A^*,$$

$$v(p + q) \geqslant \min(v(p), v(q)), \quad \forall p, q \in A^*, \quad p + q \neq 0.$$

Cum $A = R[X]$, o dată cu R, este domeniu de integritate, atunci v([3], p. 37) poate fi extinsă în mod unic la o valuare V a corpului fracțiilor $K = R(X)$ al inelului $A = R[X]$ definind pentru orice $f \in K$, $f = \frac{p}{q} \neq 0$

$$V(f) = v(p) - v(q).$$

Această extindere nu este posibilă dacă grupul Γ nu este abelian. Pentru orice $\alpha \in \Gamma$ avem $\alpha = V(X_\alpha)$, $X_\alpha \in K$ și deci V este o surjecție. Cu aceasta teorema 1 este demonstrată.

4. În [5] I. Yakabe introduce noțiunea de semivaluare ca fiind o aplicație univocă S a grupului multiplicativ K^* al unui corp K pe un grup Γ laticial ordonat, care satisface condițiile

(a) $$S(a+b) \geqslant Sa \cap Sb,$$

(b) $$S(ab) = Sa + Sb,$$

(c) $$S(K^*) = \Gamma.$$

Se convine ca $S(0) = \infty$, $S(0) > \alpha$ pentru orice $\alpha \in \Gamma$ și $\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty + \infty$.

TEOREMA 2. *Orice grup abelian Γ laticial ordonat este un grup de semivaluare; există un corp K și o semivaluare S a acestuia pe grupul Γ.*

Demonstrația o pregătim cu următoarele leme.

LEMA 1. *Dacă $a, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \Gamma$, atunci*

$$a + \bigcap_{j=1}^{n} b_j = \bigcap_{j=1}^{n} (a + b_j).$$

Demonstrația o facem prin inducție. Fie $n = 2$.
Avem

$$b_1 \cap b_2 \leqslant b_j, \quad j = 1, 2,$$

și deci

$$a + b_1 \cap b_2 \leqslant a + b_j, \quad j = 1, 2,$$

de unde

$$a + b_1 \cap b_2 \leqslant (a + b_1) \cap (a + b_2). \tag{1}$$

Avem

$$(a + b_1) \cap (a + b_2) \leqslant a + b_j, \quad j = 1, 2,$$

și deci

$$-a + (a + b_1) \cap (a + b_2) \leqslant b_i, \quad j = 1, 2$$

de unde

$$-a + (a + b_1) \cap (a + b_2) \leqslant b_1 \cap b_2$$

sau

$$(a + b_1) \cap (a + b_2) \leqslant a + b_1 \cap b_2. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$a + (b_1 \cap b_2) = (a + b_1) \cap (a + b_2).$$

Presupunînd propoziţia adevărată pentru $n - 1$, vom avea

$$a + \bigcap_{j=1}^{n} b_j = a + \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} b_j\right) \cap b_n = \left(a + \bigcap_{j=1}^{n-1} b_j\right) \cap (a + b_n) =$$

$$= \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} (a + b_j)\right) \cap (a + b_n) = \bigcap_{j=1}^{n} (a + b_j).$$

Analog se demonstrează

LEMA 2. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b \in \Gamma$, *atunci*

$$\bigcap_{i=1}^{m} a_i + b = \bigcap_{i=1}^{m} (a_i + b).$$

LEMA 3. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \Gamma$, *atunci*

$$\bigcap_{i} a_i + \bigcap_{j} b_j = \bigcap_{i,j} (a_i + b_j).$$

Folosind lemele precedente vom avea

$$\bigcap_{i} a_i + \bigcap_{j} b_j = \bigcap_{i} \left(a_i + \bigcap_{j} b_j\right) = \bigcap_{i} \left(\bigcap_{j} (a_i + b_j)\right) = \bigcap_{i,j} (a_i + b_j).$$

Fie acum inelul $A = R[X]$ construit ca în 3, de data aceasta folosind grupul laticial ordonat Γ. Dacă

$$p \in A, \quad p \neq 0$$

atunci

$$p = \sum_{m \in M} c_m X_{\alpha_1}^{m_1} X_{\alpha_2}^{m_2} \ldots X_{\alpha_s}^{m_s}.$$

Notăm cu $a_m = \sum_k m_k \alpha_k$, $m \in M$ şi definim aplicaţia univocă τ pe $A^* = A \setminus \{0\}$ şi cu valori în Γ astfel

$$\forall p \in A^*, \quad \tau(p) = \bigcap_{m \in M} a_m.$$

Dacă $q \in A^*$, $q = \sum_{n \in N} d_n X_{\alpha_1}^{n_1} X_{\alpha_2}^{n_2} \ldots X_{\alpha_s}^{n_s}$, atunci punînd $b_n = \sum_k n_k \alpha_k$, $n \in N$, vom avea $\tau(q) = \bigcap_{n \in N} b_n$. Cum

$$pq = \sum_{m \in N,\ n \in N} c_m d_n X_{\alpha_1}^{m_1 + n_1} \ldots X_{\alpha_s}^{m_s + n_s}$$

avem

$$\tau(pq) = \bigcap_{m,n} \left(\sum_k (m_k + n_k) \alpha_k\right) = \bigcap_{m,n} (a_m + b_n) = \bigcap_{m} a_m + \bigcap_{n} b_n = \tau(p) + \tau(q).$$

Se constată ușor că

$$\tau(p+q) \geqslant \tau(p) + \tau(q).$$

Aplicația $\tau : A^* \to \Gamma$ se poate extinde în mod unic la o semivaluare S a corpului fracțiilor $K = R(X)$ punînd

$$S(p/q) = \tau(p) - \tau(q), \ \forall p/q \in K^* = K \setminus \{0\}.$$

Într-adevăr, dacă p/q, $p'/q' \in K^*$ și $p/q = p'/q'$, atunci $pq' = qp'$ și deci $\tau(p) + \tau(p') = \tau(q) + \tau(p')$, de unde

$$S(p/q) = S(p'/q'),$$

adică S este o aplicație univocă.

Avem

$$S(p/q \cdot p'/q') = S(pp'/qq') = \tau(pp') - \tau(qq') = \tau(p) + \tau(p') -$$

$$- \tau(q) - \tau(q') = \tau(p) - \tau(q) + \tau(p') - \tau(q') = S(p/q) + S(p'/q')$$

(R fiind fără divizori ai lui zero, atunci și $R[X]$ este fără divizori ai lui zero și deci pp'/qq' are sens dacă p/q și p'/q' au sens : în calculul de mai sus a fost folosită și comutativitatea grupului Γ)

Avem

$$S(p/q + p'/q') = S((pq' + qp')/qq') = \tau(pq' + qp') - \tau(qq') \geqslant$$

$$\geqslant \tau(pq') \cap \tau(qp') - \tau(qq') = (\tau(pp') - \tau(qq')) \cap (\tau(qp') - \tau(qq')) =$$

$$= (\tau(p) + \tau(q') - \tau(q) - \tau(q')) \cap (\tau(p) + \tau(p') - \tau(q) - \tau(q')) =$$

$$= S(p/q) \cap S(p'/q')$$

(printre altele, în calculul de mai sus s-a folosit și lema 2). Deci S este o semivaluare.

5. În încheiere vom schița cum într-un grup Γ total ordonat, nu neapărat comutativ, se poate face pentru clasele superioare de elemente pozitive o teorie analogă cu aceea a idealelor într-un inel, independent de un rezultat ca cel stabilit prin teorema 1. Să notăm cu N mulțimea întregilor pozitivi.

Definiția 1. *O clasă superioară P de elemente pozitive ale lui Γ se numește primă dacă*

$$\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \ \alpha + \beta \in P, \ \alpha \notin P \Rightarrow \beta \in P.$$

COROLAR. *Clasa superioară P este primă dacă și numai dacă oricare ar fi clasele superioare Ω_1, Ω_2 ce înfășoară strict pe P avem $\Omega_1 + \Omega_2 \not\subseteq P$.*

Definiția 2. *O clasă superioară Q de elemente pozitive ale lui Γ se numește primară dacă*

$$\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \ \alpha + \beta \in Q, \ \alpha \notin Q \Rightarrow \exists n \in N, \ n\beta \in Q.$$

esențiale atît de departe cît era necesar pentru o bună înțelegere a lor și pentru a completa lipsa unor demonstrații nu întotdeauna utile unui chimist, după părerea autorilor, au dat în carte numeroase aplicații fizice, chimice sau tehnologice care vor ajuta trecerea de la matematica abstractă la cea aplicată în chimie.

Materia tratată este foarte bogată. Enumerarea capitolelor evidențiază acest lucru. Primul capitol tratează despre mărimi și funcții, al doilea despre limite și derivate, precum și despre aplicațiile acestor noțiuni care se expun în capitolul al treilea. Autorii dau o importanță deosebită teoremelor de valori medii ale lui Lagrange și Rolle și lămuresc conceptul de diferențială și calculul cu diferențiale cu ajutorul acestor teoreme. Seria lui Taylor formează obiectul unui capitol special, completat cu numeroase exemple și unele aplicații. Calculul integral este tratat într-un capitol destul de important care conține o scurtă lămurire a conceptelor de integrală definită și nedefinită precum și regulile de integrare ca și integrările aproximative ca de pildă aceea dată de regula lui Simpson.

Ecuațiile diferențiale sînt tratate în aproximativ treizeci de pagini, cu o scurtă vedere generală asupra noțiunii de ecuație diferențială, și privește în special ecuațiile diferențiale liniare. Semnalăm aici cîteva interesante aplicații, fie ale procedeelor de integrare fie ale problemelor generale ale ecuațiilor diferențiale liniare. În prima categorie intră prezentarea legii de răcire a lui Newton, a ecuației barometrice de variația presiunei cu înălțimea, ecuația diferențială a vitezei de solvire a unui corp și a adsorbției electroliților, ecuația diferențială a unor reacții chimice de primul ordin sau de ordin superior, legea de integrare a gazionilor și altele, ca mișcarea ionilor într-un electrolit de temperatură constantă, mișcarea browniană, determinarea echilibrului radioactiv printr-un sistem de ecuații diferențiale liniare etc.

Capitole noi pentru un astfel de manual sînt desigur acelea care tratează despre funcții de mai multe variabile și acela care se ocupă de reprezentări grafice. Pentru funcțiile de mai multe variabile se definește diferențiala totală a unei funcții, reprezentarea parametrică a unei curbe, se definește integrala de-a lungul unei curbe și se aplică la tratarea în spiritul lui Karatheodori a primului principiu al termodinamicii (în legătură cu formele liniare cu mai multe variabile și cu noțiunea de multiplicator se dă și enunțul principiului al doilea al termodinamicii). Capitolul se termină cu definiția integralei duble.

Fundamentele reprezentărilor grafice sînt prezentate din punct de vedere general, corespunzînd faptului că orice dependență funcțională între mai multe mărimi poate căpăta o convenabilă reprezentare grafică. Se dau apoi grafice pentru mai multe funcții de două sau trei variabile. Se explică modul de folosire a tabelelor care întovărășesc graficele cu ajutorul a cîtorva exemple foarte interesante.

Autorii acordă un loc destul de important teoriei probabilităților și trebuie să spunem puțin neobișnuit. Această teorie este tratată în capitolul X înaintea ecuațiilor cu derivate parțiale și a seriilor Fourier, care sînt dezvoltate în capitolul XII, și înaintea numerelor complexe despre care se vorbește în Apendice.

În legătură cu probabilitățile se expune teoria combinărilor, se face o scurtă prezentare a probabilității în sensul clasic, cu diverse exemple, se introduce noțiunea de probabilitate condiționată și aceea de independență a evenimentelor, se definesc mediile. O atenție specială se dă legii numerelor mari și repartiției Poisson, cu diverse exemple. Capitolul se termină cu diverse considerații asupra teoriei erorilor de măsură și a metodei celor mai mici pătrate.

Capitolul XI tratează sumar despre ecuațiile cu derivate parțiale avînd în special în considerare ecuațiile procesului de difuzie și rezolvarea lor cu ajutorul seriilor Fourier.

Lucrarea este scrisă foarte clar și are numeroase exemple, fiind desigur foarte utilă studenților în chimie cărora le este destinată.

O. Onicescu

J. WILLARD GIBBS, *Elementary Principles in Statistical Mechanics (Developed with Special Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics)* (Principii elementare în mecanica statistică (dezvoltată cu referire specială la baza rațională a termodinamicii)). Dover Publications, Inc., New York, 1960, 208 p.

Această carte constituie retipărirea integrală a lucrării fundamentele, devenită clasică, scrisă de J. Willard Gibbs încă în 1901 și tipărită pentru prima dată în anul 1902.

După ce în anul 1859 James Clark Maxwell a îmbinat pentru prima dată principiile mecanicii cu legile teoriei probabilităților în cadrul teoriei cinetice a gazelor, stabilind legea de distribuție a vitezelor particulelor care compun un gaz, Ludwig Boltzmann (1844—1906) și J. Willard Gibbs (1839—1903) au elaborat bazele mecanicii statistice, mecanica ansamblurilor mari de particule materiale. Apărută cu un an înaintea morții autorului, cartea *Elementary Principles in Statistical Mechanics* constituie o tratare elegantă și riguroasă a bazelor mecanicii statistice, cuprinzînd într-o formă sistematizată cercetările lui R. Clausius, J. Maxwell, L. Boltzmann și ale lui J. W. Gibbs însuși, în acest domeniu distinct al fizicii. A expune conținutul acestei cărți înseamnă a expune, cu mici excepții, conținutul actual al mecanicii statistice clasice (necuantice) pentru sistemele aflate în stare de echilibru, de unde importanța covîrșitoare a lucrării lui J. W. Gibbs.

Cele 15 capitole ale cărții ar putea să fie repartizate în trei părți distincte :

a) În prima parte ar intra capitolele I, II și III.

În această parte se introduce spațiul fazelor, un spațiu euclidian cu 2 n dimensiuni, ale cărui coordonate sînt cele n impulsuri și cele n coordonate generalizate ale sistemului mecanic cu n grade de libertate. În acest spațiu al fazelor mișcarea unui singur punct reprezentativ pe o anumită traiectorie reprezintă evoluția în timp a sistemului mecanic. Din ecuațiile de mișcare, scrise sub forma canonică, hamiltoniană, rezultă principiul de conservare a densității de probabilitate și a volumului în acest spațiu al fazelor. Principiul de conservare a probabilității de fază este aplicat la teoria erorilor în calcularea fazelor sistemului și la integrarea ecuațiilor diferențiale care descriu mișcarea sistemului.

b) În a doua parte ar intra capitolele IV—XII.

În această parte se face ipoteza că densitatea de probabilitate este funcție numai de energie, în spațiul fazelor $P = f(\varepsilon)$. Gibbs introduce distribuția canonică, caracterizată prin dependența liniară a logaritmului densității de probabilitate, de energie, adică caracterizată prin relația

$$\eta = \log P = \frac{\Psi - \varepsilon}{\Theta}, \tag{1}$$

unde Ψ și Θ sînt constante, ultima fiind pozitivă. Se studiază interacțiunea a două sisteme astfel încît reuniunea lor să fie un sistem în echilibru. Se stabilesc ecuațiile diferențiale pe care le satisfac valorile medii într-un ansamblu canonic, ecuații formal identice cu ecuațiile fundamentale ale termodinamicii. Paralel cu studiul global, în întregul spațiu al fazelor se fac raționamente similare în două subspații ale spațiului fazelor : spațiul euclidian n-dimensional al coordonatelor generalizate ale sistemului, numit spațiul configurațiilor, și spațiul euclidian n-dimensional al impulsurilor sistemului, numit spațiul vitezelor. Se examinează astfel distribuția canonică, volumul, densitatea de probabilitate, valorile medii, ecuațiile diferențiale relative la valorile medii într-un ansamblu canonic separat în spațiul configurațiilor, și respectiv în spațiul vitezelor, urmărindu-se analogia cu ecuațiile termodinamice ale lui Clausius. Atît pentru întregul spațiu al fazelor, cît și separat, pentru spațiul configurațiilor și respectiv spațiul vitezelor, se introduce cea mai importantă funcție de energia sistemului

$$\Phi = \log \frac{dV}{d\varepsilon}, \quad \Phi_q = \log \frac{dV_q}{d\varepsilon_q}, \quad \Phi_p = \log \frac{dV_p}{d\varepsilon_p}, \tag{2}$$

unde V reprezintă volumul din spațiul fazelor care cuprinde toate punctele în care energia ia valori mai mici sau egale cu ε, V_q volumul din spațiul configurațiilor care cuprinde toate punctele în care energia potențială este mai mică sau egală cu ε_q iar V_p reprezintă volumul punctelor din spațiul vitezelor în care energia cinetică are valori mai mici sau egale cu ε_p. Se evaluează V_p, Φ_p, se calculează V din V_q, se dă o formulă de aproximație a acestor mărimi cînd numărul gradelor de libertate ale sistemului este foarte mare. Cunoscîndu-se funcțiile V și Φ pentru două sisteme, se calculează valorile lor pentru sistemul total.

Se face legătura între funcția Φ și distribuția canonică, arătîndu-se că pentru $n > 2$, cea mai probabilă valoare a energiei într-un ansamblu canonic este determinată de relația

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon} = \frac{1}{\Theta} \tag{3}$$

și că de asemenea pentru $n > 2$, valoarea medie a cantității într-un ansamblu canonic este $\frac{1}{\Theta}$.

Se stabilește rezultatul fundamental, potrivit căruia pentru n mare, valoarea lui Φ corespunzătoare ecuației diferențiale (3) este echivalentă, cu excepția unei constante aditive, cu valoarea medie a logaritmului densității de probabilitate, luată cu semnul minus, adică formula fundamentală a lui Boltzmann referitoare la entropia unui sistem. În cazul în care în fiecare punct al spațiului fazelor energia este aceeași, se introduce distribuția microcanonică, calculîndu-se valoarea medie a funcțiilor care depind de energia cinetică și de energia potențială, în această distribuție microcanonică. Se face legătura cu distribuția canonică, arătîndu-se că dacă două funcții au aceeași valoare medie în orice ansamblu microcanonic, ele au aceeași valoare medie în orice ansamblu canonic. Se studiază interacțiunea a două sisteme a căror reuniune formează un sistem distribuit microcanonic, urmărindu-se legătura cu ecuațiile termodinamice. Se studiază de asemenea proprietățile de maximum și minimum ale diferitelor distribuții, de exemplu faptul că dacă un ansamblu este distribuit canonic, valoarea medie a logaritmului densității de probabilitate, adică valoarea medie a funcției H a lui Boltzmann, este mai mică decît în orice altă distribuție a ansamblului avînd aceeași valoare medie a energiei.

c) În partea a treia, și ultima, ar intra capitolele XIII—XV.

Mecanica statistică are astăzi aplicații variate în numeroase capitole ale fizicii. În forma inițială, însă, mecanica statistică urmărea să dea o fundamentare principalelor ecuații ale termodinamicii, de unde și subtitlul cărții lui J. W. Gibbs. Deși în majoritatea capitolelor se urmărește analogia cu ecuațiile termodinamicii, ultimele trei capitole se ocupă exclusiv de paralela dintre mecanica statistică și termodinamică. Se face discuția unor procese mecanice, analoge proceselor termodinamice, cum este de exemplu ciclul Carnot. Se dă definiția mecanică a parametrilor termodinamici, arătîndu-se că valoarea medie a logaritmului densității de probabilitate în spațiul fazelor, valoare medie luată cu semnul minus, reprezintă entropia termodinamică, iar parametrul Θ, care apare în distribuția canonică, reprezintă temperatura absolută. Mecanica statistică permite stabilirea ecuației de stare care leagă entropia și temperatura, ecuație pe care termodinamica o presupunea dată de experiență și din care rezultă toate celelalte ecuații ale termodinamicii.

Retipărirea, în condiții grafice excelente a lucrării fundamentale *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, după 60 de ani de la prima ei apariție, vine să confirme o dată în plus actualitatea cercetărilor și rezultatelor lui J. Willard Gibbs în domeniul mecanicii statistice.

Silviu Guiașu

WOLFGANG HAHN, *Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov* (Teoria și aplicarea metodei directe a lui Liapunov). Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1959, 140 p.

Teoria stabilității mișcării este un capitol important al teoriei calitative a sistemelor de ecuații diferențiale și a fost creată de Liapunov, într-un memoriu celebru publicat în limba rusă în 1892.

Contribuția școlii matematice sovietice la dezvoltarea teoriei stabilității și a nenumăratelor ei aplicații practice este esențială. Bibliografia monografiei lui W. Hahn citează un mare număr de memorii și cărți sovietice de Aizerman, Barbașin, Bautin, Cetaev, Erughin, Iakubovici, Krassowski, Letow, Lurie, Malkin, Maraşkov, Nemîtski, Persidski, Stepanov, Zubov — de asemenea pentru a nu menționa decît unele dintre ele — conținînd rezultate fundamentale și care au contribuuit în mod esențial la dezvoltarea teoriei.

Sînt citate de asemenea unele dintre primele lucrări ale cercetătorului romîn Vasile Mihai Popov, membru corespondent al Academiei R.P.R., care a adus o contribuție importantă la studiul stabilității sistemelor de reglare automată.

Primele două capitole conțin definiții și condiții suficiente de stabilitate sau instabilitate. În capitolul trei sînt studiate probleme concrete. Desigur că acest capitol va fi mult ameliorat într-o viitoare ediție a monografiei, incluzîndu-se o serie de lucrări importante mai recente ale matematicianului romîn Vasile Mihai Popov. Capitolul patru conține importantele teoreme de inversiune datorită lui Malkin, Massera, Kurzweil, Krassowski, Zubov. În capitolul cinci se introduce noțiunea de număr caracteristic Liapunov-Perron al unei soluții și noțiunile de stabilitate și instabilitate exponențială.

În capitolul șase sînt examinate probleme de stabilitate la perturbații permanente; sînt expuse rezultatele lui Krassowski, Barbașin și Skalkina, Malkin, Massera. În capitolul șapte sînt studiate unele cazuri critice, pentru sisteme cu parte liniară și anume sînt expuse importantele rezultate ale lui Malkin. Problema frontierei domeniului de stabilitate în spațiul parametrilor este examinată succint în paragraful 33 (rezultatele lui Malkin, Bautin, Lurie, Aizerman, Hahn). În capitolul opt sînt examinate generalizări ale noțiunii de stabilitate și anume stabilitate pe interval finit, stabilitate în spații metrice, unele probleme de stabilitate la sisteme de ecuații cu derivate parțiale, la sisteme cu argument întîrziat și la sisteme cu diferențe.

Scrisă într-un stil atrăgător, această carte este utilă atît celor ce vor să se inițieze în teoria stabilității cît și specialiștilor.

I. Barbălat

PAPY, *Groupes* (Grupuri). Bruxelles, 1961, 249 + IX p.

Cartea de față constituie o expunere a elementelor de bază ale *Teoriei grupurilor* la un nivel cît mai ușor accesibil. După cum constată autorul în prefața sa, ar fi de dorit ca aceste elemente să fie predate chiar în cadrul învățămîntului mediu; acest deziderat este însă departe de a fi realizat, în ciuda serioasei tendințe de îmbunătățire a învățămîntului matematicii care se manifestă în lumea întreagă. Scopul declarat al cărții este de a constitui un text de bază care să servească la includerea elementelor fundamentale ale teoriei grupurilor în învățămîntul mediu.

Capitolul I al lucrării conține definiția noțiunii de grup și proprietățile esențiale ale elementului neutru și ale simetricului unui element. Capitolul II conține numeroase exemple de

grupuri, ca și exemple de legi de compoziție care nu definesc structuri de grup. În capitolul III se arată modul cum grupul aditiv al numerelor întregi acționează asupra unui grup oarecare; aceasta ar putea servi, în învățămîntul mediu, la elucidarea problemelor relative la exponenții negativi și fracționari și la rădăcinile unității.

Autorul tratează în capitolul IV despre toate noțiunile fundamentale legate de aceea de subgrup, iar în capitolul V despre anumite rezultate privind grupurile abeliene, printre care teorema lui Dedekind asupra modularității laticii subgrupurilor. În capitolul VI, pe baza studiului proprietăților grupului aditiv al numerelor întregi, se ajunge la teoremele fundamentale ale aritmeticii elementare, printre care teorema de descompunere unică în factori primi. Capitolul VII, consacrat conceptelor de omomorfism și grup-factor, conține, între altele, teoreme care afirmă că orice omomorfism poate fi factorizat într-un epimorfism, un izomorfism (între coimagine și imagine) și un monomorfism, precum și prima și a doua teoremă de izomorfism.

Capitolul VIII studiază grupul de permutări ale unei mulțimi finite sau infinite, iar capitolul IX introduce noțiunea de grup cu operatori care lărgește considerabil cîmpul de aplicație al teoriei; se demonstrează în acest cadru mai general teoremele fundamentale ale teoriei grupurilor, înglobînd în felul acesta studiul modulelor și al spațiilor vectoriale.

Ultimul capitol este consacrat noțiunii de dimensiune în teoria grupurilor cu operatori. Se definesc noțiunile de lanț normal și de lanț de compoziție și se demonstrează teoremele lui Jordan-Hölder, Schreier și Zassenhaus.

Cartea conține un apendice, unde sînt explicate o serie de noțiuni de logică matematică și teoria mulțimilor utilizate în text, și un indice al tuturor termenilor.

Fiecare capitol este urmat de un mare număr de aplicații referitoare la capitolul respectiv și există și un grup de exerciții recapitulative asupra întregii cărți, unde se introduc noțiuni noi importante a căror expunere sistematică iese din cadrul lucrării.

Cartea conține numeroase figuri, dintre care multe în culori. Ele facilitează înțelegerea materialului din text și au scopul de a sugera metode de predare elementară a noțiunilor fundamentale ale teoriei grupurilor.

Lucrarea reprezintă, fără îndoială, o încercare interesantă și demnă de toată atenția de a îmbunătăți învățămîntul matematicii la nivelul școlilor medii, în scopul de a-l pune — pe cît posibil — în pas cu dezvoltarea matematicii contemporane.

A. Deleanu

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI R.P.R.

D. BARBILIAN, **Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)**, 619 p., 25,50 lei.
D. BARBILIAN, **Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)**, 380 p., 15,35 lei.
JANKO BÉLA, **Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare**, 223 p., 8,85 lei.
N. BOBOC, C. CONSTANTINESCU și A. CORNEA, **Teoria potențialului pe suprafețe riemanniene, Seminar S. Stoilov** 1959—1960, 160 p., 5 lei.
C. CIUCU și R. THEODORESCU, **Procese cu legături complete**, 232 p., 3,85 lei.
C. CONSTANTINESCU, **Teoria mulțimilor, Seminar M. Neculcea**, 108 p., 3,25 lei.
C. CORDUNEANU, **Funcții aproape periodice**, 191 p., 8,30 lei.
ROMULUS CRISTESCU, **Spații liniare ordonate**, 332 p., 11,10 lei.
I. CUCULESCU, **Algebre Lie, Seminar O. Onicescu**, 148 p., 5,15 lei.
C. FOIAȘ, **Teoria spectrală în algebre Banach (necomutative) axată pe noțiunea de rezolvantă, Seminar M. Nicolescu** 1959—1960, 82 p., 2, 85 lei.
G. GALBURĂ, **Corpuri de funcții algebrice și varietăți algebrice**, 180 p. 7,85 lei.
M. GHERMĂNESCU, **Ecuații funcționale**, 523 p., 25,60 lei.
ALEXANDRU FRODA, **Algebră superioară, fundamente : mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme patratice**, 455 p., 24,50 lei.
A. HALANAY, **Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale**, 484 p., 21,50 lei.
CAIUS IACOB, **Introduction mathématique à la mécanique des fluides**, 1288 p., 66,50 lei.
TRAIAN LALESCU, **Introducere la teoria ecuațiilor integrale**, 135 p., 5,90 lei.
* * * **Lucrările celui de-al III-lea Congres al matematicienilor romîni**, 288 p., 8,55 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie și topologie, Iași 2—5 iunie 1958**, 264 p., 9,75 lei.
* * * **Lucrările Consfătuirii de geometrie diferențială din 9—12 iunie 1955 organizată de Secția de științe matematice și fizice a Academiei R.P.R.** 368 p., 9,50 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale normate**, 259 p., 6 lei.
G. MARINESCU, **Spații vectoriale topologice și pseudotopologice**, 213 p., 8,80 lei.
N. MIHĂILEANU, **Geometrie neeuclidiană**, 144 p., 4,30 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă**, 495 p.,25,90 lei.
TIBERIU MIHĂILESCU, **Geometrie diferențială proiectivă. Teoria corespondenței**, 232 p., 10,50 lei.
G. MIHOC și V. URSEANU, **Matematici aplicate în statistică**, 732 p., 34,70 lei.
GR. C. MOISIL, **Circuite cu tranzistori**, vol. I, 8,25 lei, vol. II, 8,55 lei.
GR. C. MOISIL, **Funcționarea în mai mulți timpi a schemelor cu relee ideale**, 279 p., 12 lei.
GR. C. MOISIL, **Introducere în algebră, I. Inele și ideale**, vol. I, 256 p., 9,10 lei.
GR. C. MOISIL, **Matricele asociate sistemelor de ecuații cu derivate parțiale. Introducere în studiul cercetărilor lui L. N. Lopatinschi**, 64 p., 1,20 lei.
GR. C. MOISIL, **Scheme cu comandă directă cu contacte și relee**, 205 p., 9,65 lei.
ALEXANDRU MYLLER, **Serieri matematice**, 595 p. + 1 pl., 30,40 lei.
VERA MYLLER-LEBEDEV, **Lecții de algebră**, 396 p., 8,75 lei.
MIRON NICOLESCU, **Analiza matematică**, vol. II, 420 p., 11,90 lei.
OCTAV ONICESCU și colab., **Calculul probabilităților și aplicații**, 788 p., 15 lei.
OCTAV ONICESCU, **Numere și sisteme aleatoare**, 262 p., 11,20 lei.
O. ONICESCU, I. CUCULESCU, G. SÎMBOAN, G. MARINESCU și R. THEODORESCU, **Seminar de funcții sumă sub conducerea prof. Octav Onicescu**, 123 p., 4,23 lei.
OCTAV ONICESCU, **Strategia jocurilor, cu aplicații la programarea liniară**, 228 p., 8,45 lei.
* * * **Opera matematică a lui Alexandru Pantazi**, 496 p., 24,20 lei.
DIMITRIE POMPEI, **Opera matematică**, 535 p. + 1 pl., 30,20 lei.
N. RANCU și L. TÖVISSI, **Statistica matematică cu aplicații în producție**, 898 p. + 20 pl., 45 lei.
S. STOILOW, **Teoria funcțiilor de o variabilă complexă**, vol. I, 308 p., 10 lei ; vol. II în colaborare cu Cabiria Andreian-Cazacu, 379 p., 25,70 lei.
P. P. TEODORESCU, **Probleme plane în teoria elasticității**, vol. I, 996 p. +6 pl. 42,80 lei.
GHEORGHE ȚIȚEICA, **Geometria diferențială proiectivă a rețelelor**, 287 p., 8 lei.
DRAGOȘ VAIDA, **Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică**, 76 p., 3,15 lei.
SERGIU VASILACHE, **Elemente de teoria mulțimilor și structurilor algebrice**, 235 p., 5 lei.
GH. VRĂNCEANU, **Leçons de géometrie différencielle**, vol. I, 407 p., 26,50 lei ; vol. II, 428 p., 27,50 lei.

Din

STUDII ŞI CERCETĂRI MATEMATICE

au apărut:

anul I, 1950, 2 fascicule (a 5 lei);
anul II, 1951, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul III, 1952, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul IV, 1953, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul V, 1954, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VI, 1955, 4 n-re (2 n-re duble a 5 lei);
anul VII, 1956, 4 n-re (2 n-re duble: nr. 1—2, 5 lei; nr. 3—4, 8 lei);
anul VIII, 1957, 4 n-re (2 n-re duble a 8 lei);
anul IX, 1958, 2 n-re duble (a 10 lei);
anul X, 1959, 2 n-re (a 10 lei);
anul XI, 1960, 2 n-re (a 10 lei);
anul XII, 1961, 2 n-re (a 10 lei);
anul XIII, 1962, 4 n-re (nr. 1, 10 lei; nr. 2—4, a 7 lei);
anul XIV, 1963, 3 n-re (a 7 lei).

Numerele curente se găsesc de vînzare

în Bucureşti:
la LIBRĂRIA ACADEMIEI;
LIBRĂRIA „MIHAIL EMINESCU";
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 17;
LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 4;

în Cluj:
la LIBRĂRIA „A. S. PUŞKIN";

în Iaşi:
la LIBRĂRIA „CARTEA RUSĂ";

în Timişoara:
la LIBRĂRIA NOASTRĂ nr. 1,

precum şi la chioşcurile şi magazinele de difuzare a presei din mediul urban.

Se pot comanda şi prin poştă la librăria
„CARTEA PRIN POŞTĂ"
Bucureşti, str. Biserica Enei nr. 16, raionul 30 Decembrie.

Abonamentele se fac la oficiile poştale, agenţiile poştale, prin factorii poştali şi difuzorii voluntari din întreprinderi şi instituţii.

Pentru străinătate, cererile de numere izolate sau de abonamente se fac prin întreprinderea de stat pentru comerţul exterior „Cartimex" I.S.C.E., str. Aristide Briand nr. 14, sau căsuţa poştală 134—135, Bucureşti.

I. P. „Informaţia" — c. 3225

43.831

Lei 7.—